2016/5/16

المحاضرة الثالثة عشرة : تطبيقات نظرية الفئات

تمهيدية :

إن الصفين :

1- صف الأشياء : المؤلف من كل الأزواج الممكنة (M,R) حيث M مجموعة غير خالية و R علاقة تكافؤ على M

2- صف المورفيزمات : المؤلف من جميع التطبيقات الممكنة

$$F:(M,R)\longrightarrow(N,S)$$

حيث (N,S) و (M,R) ينتميان إلى الصف السابق ، التي تحقق :

$$\forall a,b\in M \ , \ (a,b)\in R$$
$$(f(a),f(b))\in S$$

يشكلان فئة نرمز لها ب $\bar{f}$

مبرهنة :

لتكن $\bar{f}$ الفئة المعرفة بالتمهيدية السابقة ، عندئذٍ :

1- يوجد دالي مباشر $C:\bar{f}\longrightarrow set's$

معرف بالشكل : $\forall(M,R)\in ob(\bar{f})$;

$C(M,R)=M$ (الدالي الماسح) أو الحاذف

2- يوجد دالي مباشر : $Q:\bar{f}\longrightarrow set's$

معرف بالشكل : $\forall(M,R)\in ob(\bar{f})$;

$Q(M,R)=M/R$ مجموعة الخارج مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة R

البرهان :

1- واضح أن C هو تطبيق أشياء .

ليكن $u:(M,R)\longrightarrow(N,S)$ مورفيزم للفئة $\bar{f}$

$$C(u):C(M,R)\longrightarrow C(N,S)$$
$$:M\longrightarrow N$$
$$\forall a\in M \ , \ C(u)(a)=u(a)$$

ليكن u,v مورفيزمين للفئة $\bar{f}$ بحيث $u=v$ عندئذٍ :

$$u,v:(M,R)\longrightarrow(N,S)$$

$\forall a \in M \quad , \quad u(a) = v(a)$

$$C(u)(a) = u(a) = v(a) = C(v)(a)$$

$$\boxed{C(u) = C(v)}$$

$\forall (M,R) \in ob(\bar{f})$;

$$C(I_{(M,R)}) : C(M,R) \longrightarrow C(M,R)$$

$$: M \longrightarrow M$$

$$\forall a \in M : C(I_{(M,R)})(a) = I_{(M,R)}(a) = a$$

$$C(I_{(M,R)}) = I_M = I_{C(M,R)}$$

ليكن : $(M,R) \xrightarrow{u} (N,S) \xrightarrow{v} (K,T)$

مورفيزميين من الفئة $\bar{f}$

$$v.u : (M,R) \longrightarrow (K,T)$$

$$C(v.u) : C(M,R) \longrightarrow C(K,T)$$

$$: M \longrightarrow K$$

$$\forall b \in M, \; C(v.u)(b) = v.u(b) = v(u(b)) = C(v)(u(b))$$

$$= C(v)(C(u)(b))$$

$$= C(v) . C(u)(b)$$

$$C(v.u) = C(v).C(u)$$

ومنه فإن C دالي مباشر

2- واضح أن Q هو تطبيق أشياء صورة أية ثنائية هو عنصر وحيد و بالتالي فهو تطبيق أشياء

ليكن $u : (M,R) \longrightarrow (N,S)$

مورفيزم للفئة $\bar{f}$

$$Q(u) : Q(M,R) \xrightarrow{\bar{u}} Q(N,S)$$

$$M/R \longrightarrow N/S$$

صنف التكافؤ المولد بالعنصر

$\forall \bar{a} \in M/R \quad ; \quad a \in M$ $\qquad U : (M,R) \longrightarrow (N,S)$

$Q(U)(\bar{a}_R) = \overline{U(a)}_S$ $\qquad U(a) \in N$

ليكن U, V مورفيزميين من فئة $\bar{f}$ بحيث $U = V$

$$U, V : (M,R) \longrightarrow (N,S)$$

وبالتالي أيا كان:

$$\forall a \in M ; \ U(a) = V(a)$$

$$\Rightarrow \overline{U(a)} = \overline{V(a)}$$

$$Q(U)(\bar{a}) = Q(V)(\bar{a})$$

$$Q(U) = Q(V)$$

أي أن Q تطبيق مورفيزمات .

$\forall (M,R) \in ob(\bar{f})$;

$$Q(I_{(M,R)}) : Q(M,R) \longrightarrow Q(M,R)$$

$$: M/R \longrightarrow M/R$$

$\forall \bar{a} \in M/R$;

$$Q(I_{(M,R)})(\bar{a}) = \overline{I_{(M,R)}(a)} = \bar{a}$$

$$Q(I_{(M,R)}) = I_{M/R} = I_{Q(M,R)}$$

ليكن: $(M,R) \xrightarrow{U} (N,S) \xrightarrow{V} (K,T)$

مورفيزميين للفئة $\bar{f}$

$$V.U : (M,R) \longrightarrow (K,T)$$

$$Q(V.U) : Q(M,R) \longrightarrow Q(K,T)$$

$$M/R \longrightarrow K/T$$

$\forall \bar{a} \in M/R \ ; \ Q(V.U)(\bar{a}) = \overline{V.U(a)}$

$$Q(V).Q(U)(\bar{a}) = Q(V)(Q(U)(\bar{a}))$$

$$= Q(V)(\overline{U(a)}) = \overline{V(U(a))}$$

$$= \overline{V.U(a)}$$

$$Q(V.U)(\bar{a}) = Q(V).Q(U)(\bar{a})$$

$Q(V.U) = Q(V).Q(U)$ $\qquad$ ومنه نجد أن Q دالي مباشر.

Scanned by CamScanner

تعريف :

لتكن f فئة ؛ $X \in ob(f)$

نقول أن X معرف عليه علاقة تكافؤ إذا وجد دالي غير مباشر

$F : f \longrightarrow \bar{f}$

لأجله المخطط الآتي تبديلي :

$$
\begin{tikzcd}
 & f \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "\hat{h}_x"] & \\
\bar{f} \arrow[rr, "C", "\text{دالي ماسح}"'] & & Set's
\end{tikzcd}
$$

أي أن : $C.F = \hat{h}_x$ انتهى التعريف .

$\forall\, y \in ob(f)$;

$$C.F(y) = \hat{h}_x(y)$$

$$F(y) = f(y, x)$$

توضيح :

$$F(y) \in ob(\bar{f})$$

$$(F(y), \rho_y)$$

$$C(F(y), \rho_y) = \hat{h}_x(y)$$

$$F(y) = f(y, x)$$

تمرين: ليكن لدينا الدالي F دالي مباشر و G دالي غير مباشر :
اثبت أن تركيب هذين الداليين هو دالي غير مباشر.

الحل:

$$F: \mathcal{f}_1 \longrightarrow \mathcal{f}_2$$
$$G: \mathcal{f}_2 \longrightarrow \mathcal{f}_3$$
$$G.F: \mathcal{f}_1 \longrightarrow \mathcal{f}_3$$

بما أن F دالي مباشر عندئذٍ يوجد تطبيق أشياء :

$$F: ob(\mathcal{f}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{f}_2)$$

وبما أن G دالي غير مباشر عندئذٍ يوجد تطبيق أشياء :

$$G: ob(\mathcal{f}_2) \longrightarrow ob(\mathcal{f}_3)$$

ومنه من تركيب التطبيقين السابقين نجد :

$$G.F: ob(\mathcal{f}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{f}_3)$$

أياً كان u مورفيزم للفئة $\mathcal{f}_1$

$$u: A \longrightarrow B$$
$$F(u): F(A) \longrightarrow F(B)$$

مورفيزم للفئة $\mathcal{f}_2$

$$G(F(u)): G(F(B)) \longrightarrow G(F(A))$$

$\forall A \in ob(\mathcal{f}_1)$;

$$G(F(I_A)) = G(I_{F(A)}) = I_{G(F(A))}$$

أياً كان : $f, g \in G(F(B))$

$$G(F(f.g)) = G(F(f).F(g))$$
$$= G(F(g)).G(F(f))$$
$$G.F(f.g) = G.F(g).G.F(f)$$

وهو ح

انتهت المحاضرة الثالثة عشرة