5/5/2016 الخميس المحاضرة 11

(مقدمة في نظرية القياس)

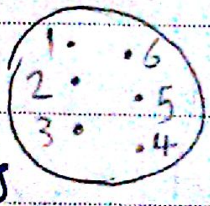
- مفاهيم طبولوجية - مفاهيم في نظرية المجموعات
- مفاهيم أساسية في نظرية القياس.

المجموعة: هي وعاء يحتوي على عدة أشياء.

تمثل المجموعة بعدة طرق

طريقة القائمة طريقة القاعدة طريقة مخططات فن

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$X = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 6\}$

العلاقات بين المجموعات مع بعضها البعض (وبين المجموعة وعناصرها)

$=$ و $\not\subset$ و $\subset$ و $\subseteq$ و $\notin$ و $\in$

$A = \{1, 2, 3\} \subseteq X$ $X \subseteq X$

$1 \in X$, $7 \notin X$

المجموعة ϕ : محتواة في جميع المجموعات

وحيدة

قدرة المجموعة: عدد عناصر هذه المجموعة

$|X| = 6$ $|A| = 3$

$P(A)$: مجموعة جميع أجزاء المجموعة

$P(A) = \{\phi, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

$|P(A)| = 2^{|A|}$ $A \in P(A)$, $\{1,2\} \in P(A)$

صف من أجزاء A $\tau = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2\}\}$

$$\underbrace{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}_{\text{محدودة}} \subset \underbrace{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}_{\text{غير محدودة}}$$

العمليات على المجموعات:

$\cup$, $\cap$, $\setminus$, Δ , ^{c}

الفرق التناظري ← Δ ، متمم ← ^{c}

$\boxed{\forall A, B \in X}$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \Delta B$, A^c

1. $\emptyset^c = X$, $X^c = \emptyset$
2. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$

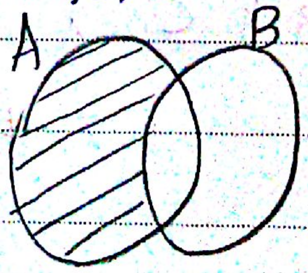
   بشرط أن تكون المجموعة محدودة

   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $\qquad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$
4. $A \setminus B = A \cap B^c$

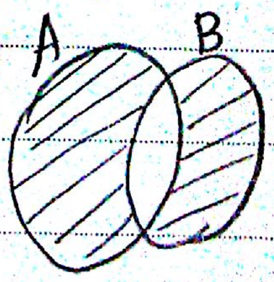
   $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

   $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$

   $A \setminus B = (A \cup B) \Delta B$



الفرق



الفرق التناظري

5. $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B)$
6. $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ $\qquad (A \Delta B) \cup (A \cap B) = \emptyset$

   $A \cup B = A \Delta (B \setminus A)$

Scanned by CamScanner

7) $A \cup A^c = X$

$A \cap A^c = \emptyset$

مثال: وضح أن مجموعة أجزاء المجموعة A مغلقة بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات

$A = \{1, 2, 3\}$

الحل:

$P(A) = \{ - - - - - \}$

$\cup$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	A	$\{1,2,3\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	A	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{3\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3\}$	A	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	A	$\{1,2\}$	A	A	$\{1,2,3\}$
$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	A	$\{1,3\}$	A	$\{1,3\}$	A	A
$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	A	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	A	A	$\{2,3\}$	A
$\{1,2,3\}$	A	A	A	A	A	A	A	A

تعريف الطبولوجيا:

$X \neq \emptyset$ و τ صف من أجزاء X

$(\tau \subseteq P(X))$ نقول عن τ أنه يمثل طبولوجيا على X إذا تحققت الشروط:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau \, , \, A \cap B \in \tau$

3) $\forall A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

$i \in I$ (غير منتهية) ليست بالضرورة محدودة

ملاحظات:

1- كل عنصر من τ يسمى مجموعة مفتوحة

2- كل عنصر لا ينتمي إلى τ يسمى مجموعة مغلقة

3- A^c مغلقة $\Longleftrightarrow$ A مفتوحة.

4- $\emptyset$ وَ X مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان بآن واحد.

مثال: $X = \{1, 2\}$

(1) $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ ✓ تمثل طبولوجيا

(2) $\tau_2 = \{\emptyset, \{2\}, X\}$ ✓ " "

(3) $\tau_3 = \{X, \{1\}, \{2\}\}$ ✗ لا تمثل طبولوجيا

- $\tau = \{\emptyset, X\}$ الطبولوجيا التافهة
- $\tau = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ تمثل طبولوجيا
- $P(X)$ تمثل طبولوجيا

الحلقة:

$X \neq \emptyset$ ، τ صف من أجزاء X

ولتكن $\emptyset \in \tau$ ، نقول عن τ إنها تمثل حلقة على X إذا اتحقق الشرطان:

1) $\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau$ مغلق بالنسبة للاجتماع

2) $\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \setminus B \in \tau$ ومغلق بالنسبة للفرق

★ $\forall A, B \in \tau : A \Delta B = \underbrace{\underbrace{(A \setminus B)}_{\in \tau} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \tau}}_{\in \tau} \Rightarrow A \Delta B \in \tau$

(ومغلق بالنسبة للفرق التناظري)

* $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) \in \mathcal{T}$ (مغلقة بالنسبة للتقاطع)

* $A \in \mathcal{T} \overset{?}{\Longrightarrow} A^c \overset{?}{\in} \mathcal{T}$ (الحلقة ليست مغلقة بالنسبة للمتمم)

مثال:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad \{1, 2\}^c = \{3, 4\} \notin \mathcal{T}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

- $\mathcal{T}$ لا تمثل طبولوجيا لأن $X \notin \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ تمثل حلقة لأنها تحقق جميع شروط الحلقة.

نكتب: $\cup\!\!|$ (جدول للجمع) $\quad \setminus\!\!|$ (جدول للفرق)

مثال:

$X = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

- $\mathcal{T}$ تمثل طبولوجيا لأنها تحقق شروط الطبولوجيا
- $\mathcal{T}$ تمثل حلقة لأنها تحقق جميع شروط الحلقة.

وهي مغلقة بالنسبة للمتمم

مبرهنة:

إذا كانت $\mathcal{T}$ صفاً من أجزاء X وكانت $\emptyset \in \mathcal{T}$

عندئذٍ $\mathcal{T}$ حلقة إذا حققت أحد الشروط

1) $\forall A, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{T} \ \wedge \ A \setminus B \in \mathcal{T}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \Delta B \in \mathcal{T} \ \wedge \ A \cup B \in \mathcal{T}$

3) $\forall A, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \Delta B \in \mathcal{T} \ \wedge \ A \setminus B \in \mathcal{T}$

4) $\forall A, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \Delta B \in \mathcal{T} \ \wedge \ A \cap B \in \mathcal{T}$

بيِّن بمثال أنه إذا كان $A, B \in \tau$:

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \in \tau \\ A \cap B \in \tau \end{array}\right\} \not\Rightarrow \tau \text{ حلقة}$$

الحلقة التامة:

نقول عن الصف τ أنه حلقة تامة إذا كان مغلقاً بالنسبة للاجتماع المعدود أي:

$$\forall A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$$

مثال:

إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$

وكان

$$\tau = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$$

صفاً من أجزاء X

المطلوب:

إيجاد أصغر حلقة وأصغر طبولوجيا

الحل:

حلقة $\tau_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

طبولوجيا $\tau_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, X\}$

إن τ_2 لا تمثل حلقة (الطبولوجيا ليست بالضرورة حلقة)

إن τ_1 لا تمثل طبولوجيا (الحلقة ليست بالضرورة طبولوجيا)

انتهى