11/4/2016 الاثنين المحاضرة السابعة

د. ت. م

- تعريف د. ت. م
- خواص د. ت. م
- معايير د. ت. م
- أمثلة :

مبرهنة :
إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$
فإن الشرط اللازم والكافي لتكون f د. ت. م على $[a,b]$ هو أن تكتب على شكل فرق دالتين متزايدتين ومحدودتين .
أي أن : $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ حيث f_1 و f_2 دالتين متزايدتين ومحدودتين .

البرهان :
لزوم الشرط :
f د. ت. م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $f = f_1 - f_2$
لنأخذ دالة التغير $g(x)$ للدالة f على $[a,b]$
من تعريف الدالة $g(x)$ نعلم بأنها متزايدة و محدودة على $[a,b]$
لنأخذ الدالة $h(x)$ بالتعريف التالي :

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

إذا أثبتنا أن $h(x)$ متزايدة ومحدودة على المجال $[a,b]$ عندئذٍ نحصل على المطلوب حيث :

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad ; x \in [a,b]$$

لإثبات أن h دالة متزايدة يجب تحقق الشرط :

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) \le h(x_2)$$

$$\cdot\ h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - f(x_2) - g(x_1) + f(x_1)$$

$$= (g(x_2) - g(x_1)) - (f(x_2) - f(x_1)) \overset{?}{\geq} 0$$

$$(f(x_2)-f(x_1)) \leq |f(x_2)-f(x_1)| \leq \bigvee_{x_1}^{x_2} f = \bigvee_{a}^{x_2} f - \bigvee_{a}^{x_1} f = g(x_2)-g(x_1)$$

$$f(x_2)-f(x_1) \leq g(x_2)-g(x_1)$$

$$0 \leq (g(x_2)-g(x_1))-(f(x_2)-f(x_1))$$

$$h(x_2)-h(x_1) \geq 0$$

$$\Longrightarrow h(x_1) \leq h(x_2)$$

وبالتالي h متزايدة.

من جهة ثانية: $h(x)=g(x)-f(x)$

$g(x)$ دالة محدودة لأنها دالة التغير للدالة f. $g(x)-f(x)$ دالة محدودة

$f(x)$ دالة 〃 〃 د.ت.م $h(x)$ دالة محدودة

كفاية الشرط $(\Leftarrow)$:

$f=f_1-f_2 \Longleftarrow f$ د.ت.م

حيث f_1 و f_2 دالتين متزايدتين ومحدودتين.

- f_1 دالة متزايدة على $[a,b]$ فهي مطردة على $[a,b]$ حسب المعيار الأول فهي د.ت.م على $[a,b]$
- f_2 دالة متزايدة على $[a,b]$ في مطردة على $[a,b]$ 〃 〃 〃 〃 〃 د.ت.م على $[a,b]$
- f_1-f_2 دالة فرق بين دالتين كل منها د.ت.م على $[a,b]$ حسب إحدى الخواص فإن الناتج $f=f_1-f_2$ د.ت.م على $[a,b]$ و هـ.م.

أثبت أن الدوال التالية كل منها د.ت.م على المجال المقابل لها

مع الرسم

1- $f(x) = x - |x| \quad : x \in [-3, 3]$

2- $g(x) = x - [x] \quad : x \in [0, 3]$

3- $\psi(x) = x - x^2 \quad ; x \in [0, 2]$

$[x]$ الجزء الصحيح لـ x $\quad n \leq x < n+1$, $\quad [x] = n$

$\left.\begin{array}{l} 3 \leq [3.25] < 4 \\ \Rightarrow [3.25] = 3 \end{array}\right\}$

أوجد التغير الكلي لـ $\psi(x) = x - x^2$ على $[1, 5]$

1- $g(x) = x$

$$h(x) = |x| = \begin{cases} -x & -3 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

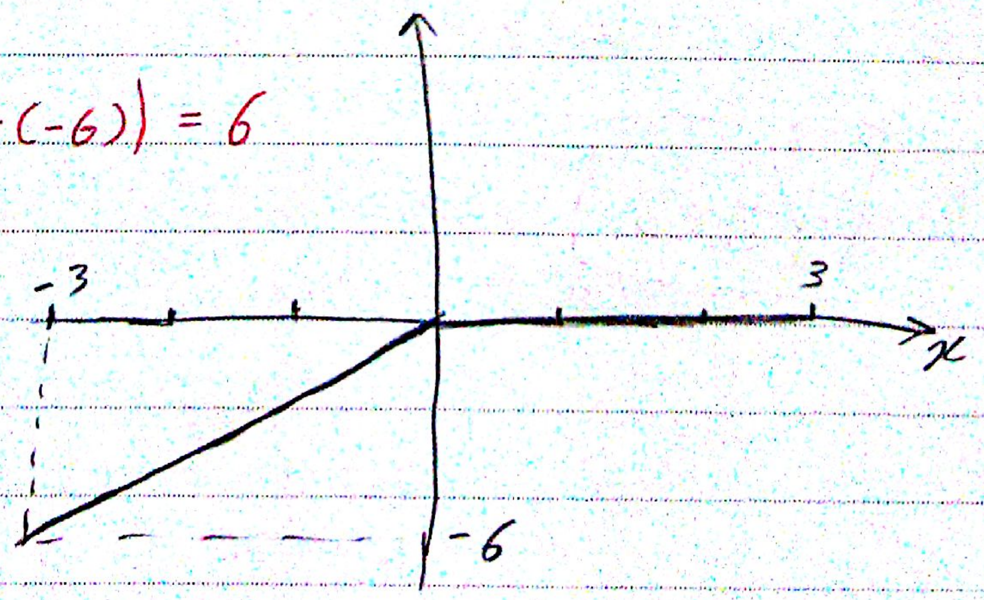
$$f(x) = \begin{cases} 2x & -3 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad [-3, 0] \quad [0, 3]$$

الحل:

$[-3, 3]$ $\quad \psi(x) = x$ متزايدة $\quad$ د.ت.م على $[-3, 3]$

$g(x) = |x|$ د.ت.م على $[-3, 3]$

$$\overset{3}{\underset{-3}{V}} f = |f(3) - f(-3)| = |0 - (-6)| = 6$$



2-

• $0 \le x < 1$

$y = [x] = 0$

• $1 \le x < 2$

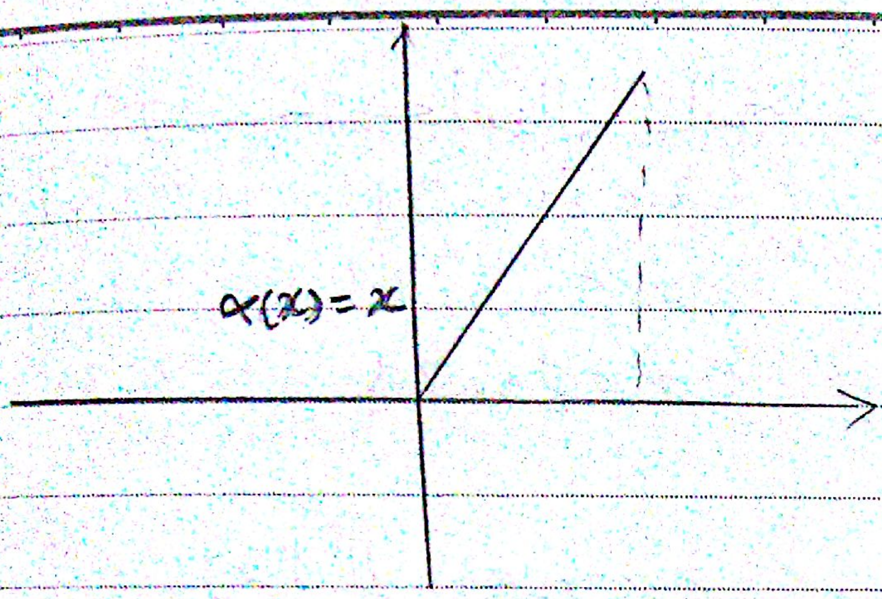
$[x] = 1$

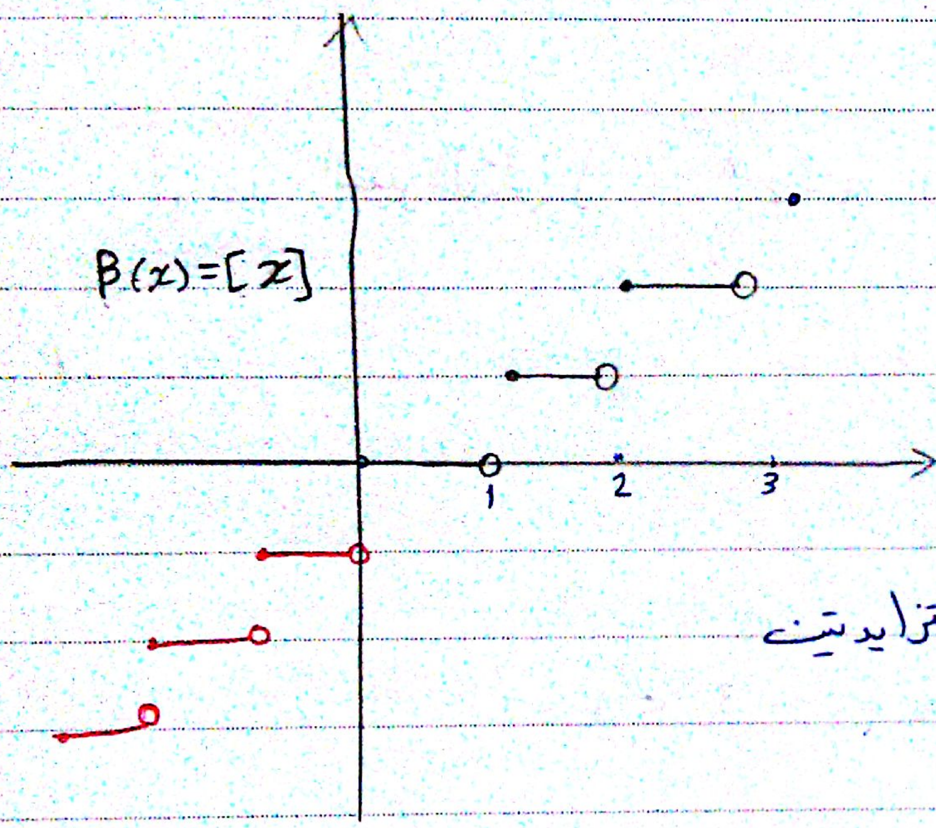
• $2 \le x < 3$

$[x] = 2$

• $x = 3$

$[x] = 3$





(التابع الدرجي)

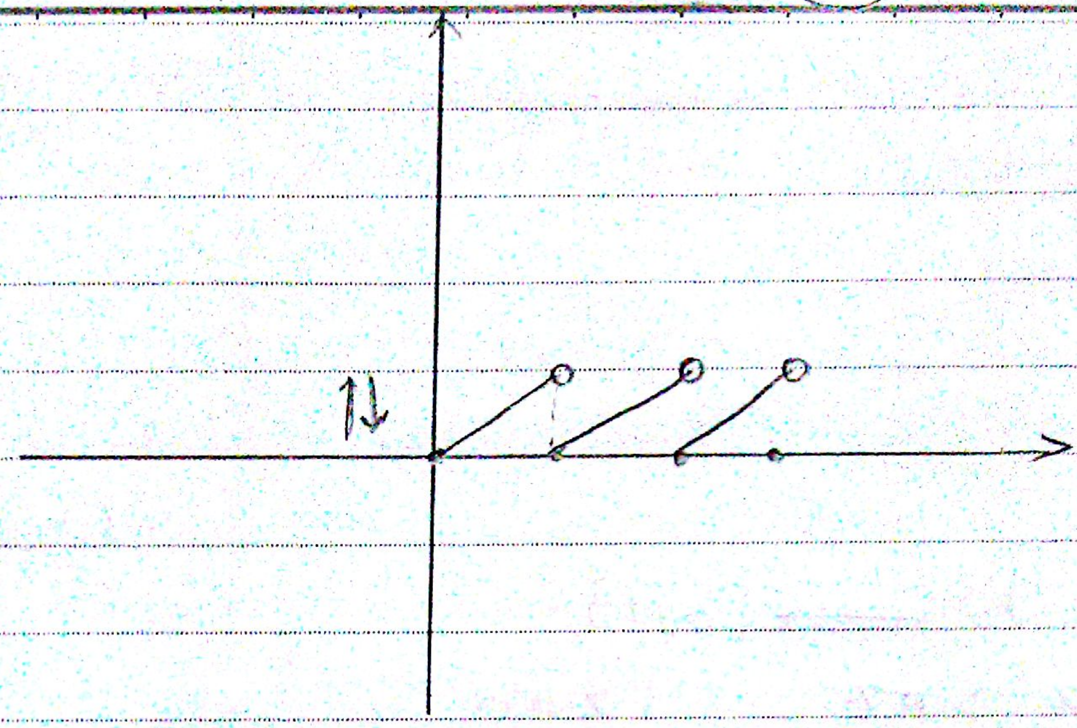
- الفرق أو الضرب أو القسمة لدالتين متزايدتين
ليس بالضرورة دالة متزايدة

- الجمع دوماً دالة متزايدة

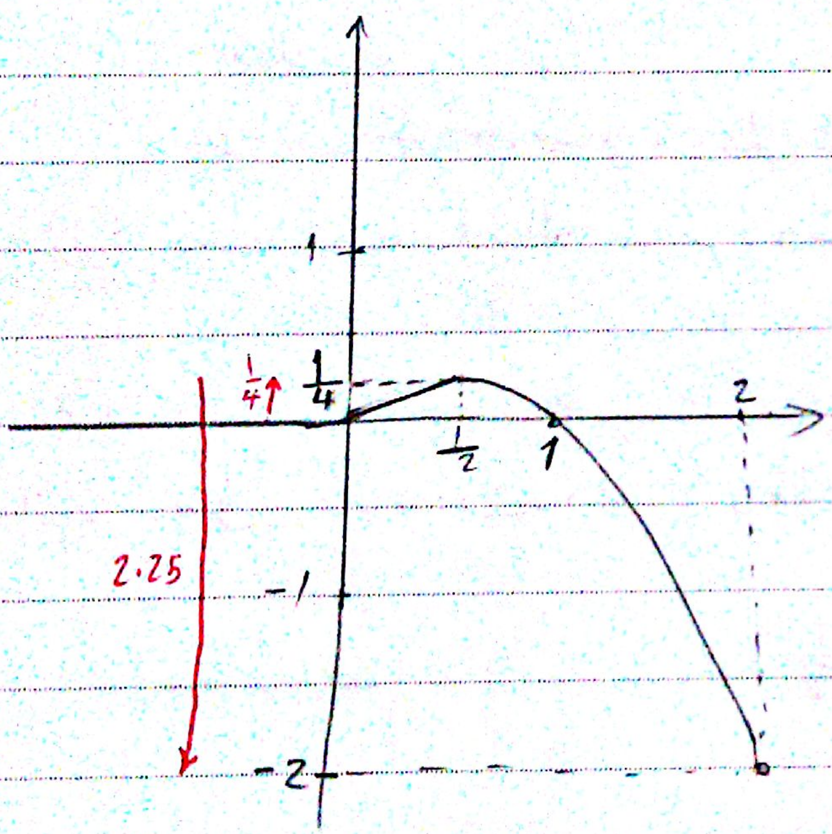
$$g(x) = \begin{cases} x - 0 & ; \ 0 \le x < 1 \\ x - 1 & ; \ 1 \le x < 2 \\ x - 2 & ; \ 2 \le x < 3 \\ 0 & ; \ x = 3 \end{cases}$$

على كل المجالات
نلاحظ أنها متزايدة.

$$\boxed{V_0^3 g = 6}$$



$$\psi(x) = x - x^2 \quad ; \; x \in [0, 2]$$

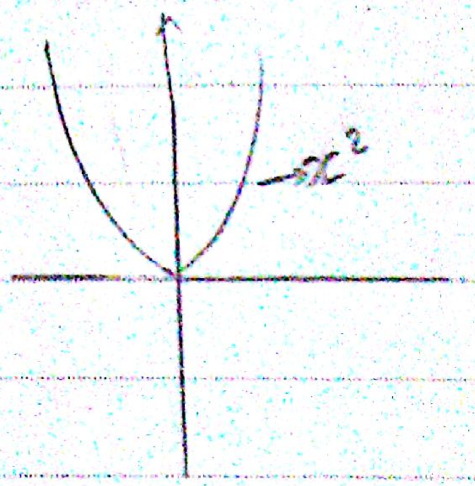


$$\psi(x) = x - x^2$$
$$= x(1-x)$$
$$\psi'(x) = 1 - 2x$$
$$\psi'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

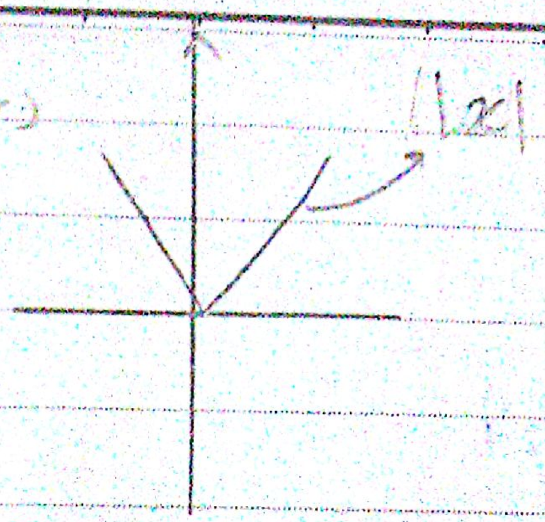
$$\psi(2) = 2 - 4 = -2$$

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}\psi = 2.5$$

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}\psi = \overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}}\psi + \overset{2}{\underset{\frac{1}{2}}{V}}\psi = \left|\psi\left(\tfrac{1}{2}\right) - \psi(0)\right| + \left|\psi(2) - \psi\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4} + \left|-2 - \frac{1}{4}\right|$$



رسم القيمة المطلقة



مثال (1)

$$f: \longrightarrow [0,1]$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

المطلوب :

~~بين أن f دالة مستمرة على المجال~~ .

1. بين أن f دالة مستمرة وقابلة للإشتقاق على $]0,1[$
2. " " " " " " " من اليمين عند $x=0$
3. " " " " " " " من اليسار عند $x=1$
4. هل f د.ت.م ؟ ولماذا ؟

مثال 2 : $f: [0, \frac{1}{2}]$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln x} & x \neq 0 \\ 6 & x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب :

1. f مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$
2. f متزايدة على $[0, \frac{1}{2}]$
3. هل f د.ت.م على $[0, \frac{1}{2}]$ ولماذا ؟ ثم أوجد $V_0^{\frac{1}{2}} f$
4. بين أن الدالة f لا تحقق شرط ليبشتز.

$f(x) = x - x^2$; $[0,5]$

$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = ?$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{1+x}$; $[0,1]$

أثبت أن f . د . ت . م على $[0,1]$ ثم أوجد التغير الكلي .

$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ $[2,+\infty[$

أثبت أن f . د . ت . م من $[2,+\infty[$ $\overset{\infty}{\underset{2}{V}} f$

انتهى