31/3/2016 الخميس

المحاضرة الخامسة

ذ. ت. م

- تعريف ذ. ت. م
- خواص الدوال ذات التغير المحدود.

① f د. ت. م $\Leftarrow$ محدودة على $[a,b]$ ولكن العكس ليس بالضرورة

② f . د. ت. م $\Leftarrow$ $|f(x)|$ د. ت. م على $[a,b]$
ولكن العكس ليس بالضرورة.

$\Leftarrow$ f α ذ. ت. م على $[a,b]$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{f}$ ذ. ت. م على $[a,b]$

③ f و g ذ. ت. م $\Leftarrow$ $f \mp g$ د. ت. م على $[a,b]$
على $[a,b]$

f/g و $f * g$ ذ. ت. م على $[a,b]$

مبرهنة:

④ إذا كانت f ذ. ت. م على $[a,b]$ وكانت $a < c < b$
فإن f ذ. ت. م على $[a,c]$ وعلى $[c,b]$ وبالعكس
كما تتحقق العلاقة.

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$$

نتيجة:

إذا كانت $a < c_1 < c_2 \cdots c_n < b$
وكانت f د. ت. م على $[a,b]$ فإن f د. ت. م على جميع المجالات
$[a,c_1], [c_1,c_2], \ldots [c_n,b]$ وبالعكس
وتتحقق العلاقة

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^{c_1} f + \bigvee_{c_1}^{c_2} f + \cdots + \bigvee_{c_n}^{b} f$$

- معايير الدوال ذات التغير المحدود.

البرهان:

f د. ت. م على $[a,b]$. f د. ت. م على $[a,c]$ و $[c,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \geq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

$[a,c] \subset [a,b]$ فإذا كانت الدالة د. ت. م على $[a,b]$

$[c,b] \subset [a,b]$ فإنها ذات تغير محدود على أي مجال جزئي منه.

نأخذ تجزئة لـ $[a,c]$

$$P_1 = \{ x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = c \}$$

نأخذ تجزئة لـ $[c,b]$

$$P_2 = \{ y_0 = c < y_1 < y_2 \dots < y_n = b \}$$

فنلاحظ $P = P_1 \cup P_2$ تجزئة لـ $[a,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \geq V(f,P) = V(f,P_1) + V(f,P_2)$$

دوماً أصغر من الـ sup ، المجموع

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \geq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

f د. ت. م على $[a,b]$ $\Longleftarrow$ f د. ت. م على $[a,c]$ ، f د. ت. م على $[c,b]$

فنأخذ تجزئة ما لـ $[a,b]$ بحيث لا تحتوي هذه التجزئة على النقطة c

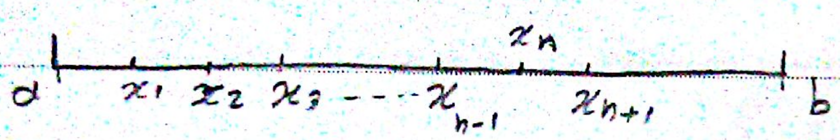
أي أن P تجزئة لـ $[a,b]$ و $c \notin P$

ثم نقوم ببناء تجزئة P' بحيث $c \in P'$ $\Longleftarrow$ $P \subset P'$ تجزئة أدق

$$V(f,P) \leq V(f,P')$$

$$P = \{ x_0 = a < x_1 < x_2 \dots x_{n-1} < x_n = b \}$$

$$\begin{cases} P' = P_1' \cup P_2' \\ P_1' = \{x_0 = a < x_1 \cdots = x_n = c\} \\ P_2' = \{x_m = c < x_{m+1} < \cdots < x_n = b\} \end{cases}$$



$$V(f,P) \le V(f,P')$$

$$V(f,P) \le V(f,P_1') + V(f,P_2')$$

$$V(f,P) \le V(f,P_1') + V(f,P_2') \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} < \infty \Longrightarrow$$ f د.ت.م على $[a,b]$

مثال معاكس:

f د.ت.م على $[a,b]$ $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$

أما العكس ليس بالضرورة.

مثال:

إذا كانت الدالة f معرفة على $[0,1]$ بحيث:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

أثبت أن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$

" " f " ليست د.ت.م على $[0,1]$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}} (f, P)$$

$$= \lim_{n \to \infty} V(f, P)$$

$$= +\infty \Rightarrow$$ f ليست ذات تغير محدود.

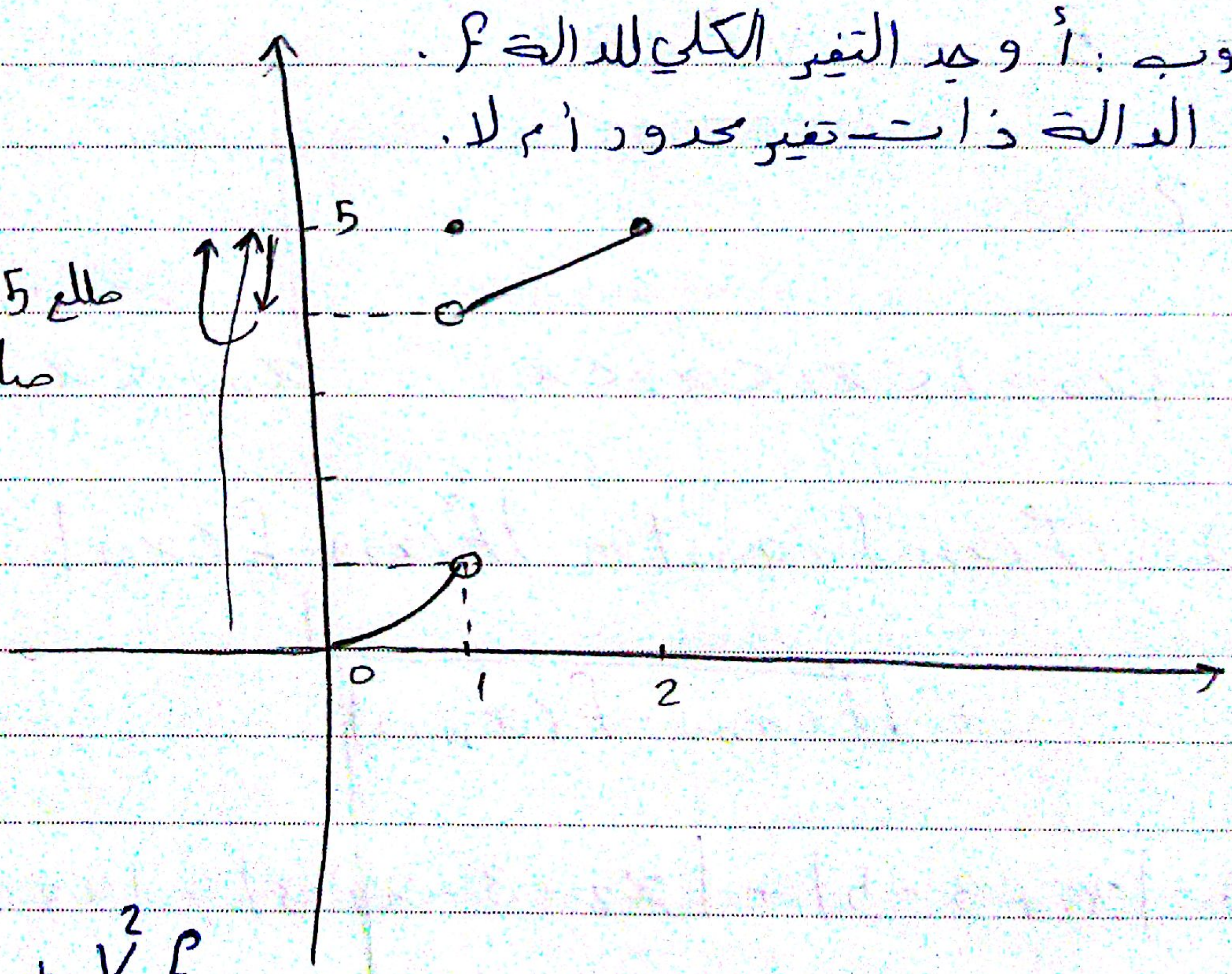
مثال:

إذا كانت الدالة f معرفة على $[0, 2]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x + 3 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد التغير الكلي للدالة f.

هل الدالة ذات تغير محدود أم لا.



طلع ↑ نزل 1 ↓ طلع 5 ↑

صار الـ sup هو 7

$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{2}{\underset{1}{V}} f$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = ?$$

$$P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 \cdots x_{n-1} < x_n = 1\}$$

$$V(f,P) = |f(x_1)-f(x_0)| + |f(x_2)-f(x_1)| + \cdots$$
$$+ |f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$V(f,P) = |x_1^2 - 0| + |x_2^2 - x_1^2| + |x_3^2 - x_2^2| + \cdots$$
$$|x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2| + |5 - x_{n-1}^2|$$
$$= \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} - \cancel{x_1^2} + \cancel{x_3^2} - \cancel{x_2^2} \cdots$$
$$\cdots + \cancel{x_{n-1}^2} - \cancel{x_{n-2}^2} + 5 - \cancel{x_{n-1}^2}$$
$$= 5 \Rightarrow \boxed{\overset{1}{\underset{0}{V}} f = 5}$$

$$\overset{2}{\underset{1}{V}} f = ?$$

نفرض $P = \{x_0 = 1 < x_1 < x_2 < x_3 \cdots x_{n-1} < x_n = 2\}$

$$V(f,P) = |f(x_1)-f(x_0)| + |f(x_2)-f(x_1)| + \cdots$$
$$\cdots + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$V(f,P) = |x_1 + 3 - 5| + |x_2 + \cancel{3} - x_1 - \cancel{3}| + |x_3 + \cancel{3} - x_2 - \cancel{3}|$$
$$+ \cdots + |x_n + \cancel{3} - x_{n-1} - \cancel{3}|$$
$$= 2 - x_1 + \cancel{x_2} - x_1 + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} \cdots + x_n - x_{n-1}$$

$= 2 - 2x_1 + 2$

$V(f, P) = 4 - 2x_1$

$\overset{2}{\underset{1}{V}} f = \sup_{P} V(f, P) = \sup (4 - 2x_1)$

$= 4 - 2$ أخذنا أصغر قيمة هي 1

$\boxed{\overset{2}{\underset{1}{V}} f = 2}$

$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{2}{\underset{1}{V}} f = 5 + 2 = 7$

انتهى