المحاضرة الثالثة

التجزئة لـ $[a,b]$:

$$P=\{x_0=a<x_1<x_2 ----<x_n=b\}$$

التجزئة الأدق: P' أدق من P إذا كانت $P\subset P'$

نظيم التجزئة:

$$\|P\|=\Delta P=\lambda P=\max_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$$

الدوال ذات التغير المحدود على $[a,b]$:

$$\infty>\overset{b}{\underset{a}{V}} f=\sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P)$$

حيث:

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

نتائج:

① $P\subset P' \Rightarrow \Delta P\geq \Delta P'$

② $\forall P\in \mathbb{P}[a,b] \Rightarrow V(f,P)\le \overset{b}{\underset{a}{V}} f$

③ إذا كانت f د. ذ. ت. م على $[a,b]$ فهي د. ت. م على $[a,b]\supseteq[a',b']$

أي هي د. ت. م على أي مجال جزئي

④ $[a',b']\subset[a,b] \Rightarrow \overset{b'}{\underset{a'}{V}} f\le \overset{b}{\underset{a}{V}} f$

⑤ $P\subset P' \Rightarrow V(f,P)\le V(f,P')$

⑥ $\forall \varepsilon>0,\ \exists P'\in \mathbb{P}[a,b] : \overset{b}{\underset{a}{V}} f\le V(f,P)+\varepsilon$

f د. ذ. ت. م على $[a,+\infty[$ أو $]-\infty,b]$ أو $]-\infty,+\infty[$ إذا كانت f د. ذ. ت. م على أي مجال جزئي مغلق منها.

خواص الدوال ذات التغير المحدود :

[1] إذا كانت f د.ذ.ت.م على $[a,b]$ فإنها محدودة ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة (أي يمكن إيجاد دالة محدودة لكن ليست ذات تغير محدود)

البرهان :

$(\Leftarrow)$ المطلوب إثبات : $\exists M>0 : |f(x)| \leq M$

$\forall x \in [a,b]$

بما أن f د.ذ.ت.م نأخذ تجزئة ما وهي : $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$; $P = \{a, x, b\}$

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)|$$

$$\leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f + |f(a)| = M < \infty$$

التغير الكلي

$\forall x \in [a,b]$ حيث $0 < M < \infty$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \geq V(f;P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)|$$

سيتم إثبات الاتجاه المعاكس أثناء حل التمارين

[2] إذا كانت f د.ذ.ت.م على $[a,b]$ فإن :

① $|f(x)|$ د.ذ.ت.م على $[a,b]$ ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة .

② αf د.ذ.ت.م على $[a,b]$

③ $\frac{1}{f}$ د.ذ.ت.م على $[a,b]$ حيث :

وذلك : $|f(x)| \geq c > 0$ $\forall x \in [a,b]$

[3] إذا كانت الدالتان g و f د.ت.م على $[a,b]$ فإن :

-1 $f+g$ د.ذ.ت.م على $[a,b]$

-2 $f-g$ د.ذ.ت.م على $[a,b]$

-3 $f.g$ د.ذ.ت.م على $[a,b]$

4- $\frac{f}{g}$ د.ذ.ت.م على $[a,b]$
بحيث $\forall x \in [a,b]$ و $|g(x)| \geq C > 0$

$\boxed{4}$ إذا كانت f د.ذ.ت.م على $[a,b]$ وكانت $a<c<b$
فإن f د.ذ.ت.م على $[c,b]$ و $[a,c]$ وبالعكس
وتحقق العلاقة :
$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

برهان الخاصة الثانية $\boxed{2}$.
إذا كانت f د.ذ.ت.م على $[a,b]$ فإن :
$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty \quad : \quad P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

① إن $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$ و $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$
لتكن $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ تجزئة ما لـ $[a,b]$
وكانت :
$$V(|f|, P) = \sum_{k=1}^{n} \big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \big|$$

نعلم أن :
$$\big| |a| - |b| \big| \leq |a-b|$$

وبالتالي :
$$\big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \big| \leq |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \big| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\Longrightarrow V(|f|, P) \leq V(f, P)$$

$$\Longrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} (|f|, P) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$$

$\Longleftarrow$ $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

– أما العكس إذا كانت الدالة ذات القيمة المطلقة دالة ذات تغير محدود فليس بالضرورة أن تكون الدالة دالة ذات تغير محدود

(2) αf دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

لتكن P تجزئة ما للمجال $[a,b]$ بحيث:

$$P=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

لأن f دالة ذات تغير محدود $\bigvee_a^b f<\infty$

نريد إثبات أن: $\bigvee_a^b(\alpha f)<\infty$

$$V(\alpha f,P)=\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha f(x_k)-\alpha f(x_{k-1})\right|$$

$$=|\alpha|\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$$

$$=|\alpha|\,V(f,P)$$

ومنه: $\bigvee_a^b(\alpha f)=|\alpha|\bigvee_a^b f<\infty$

αf دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

(3) $\frac{1}{f}$ د. ذ. ت. م على $[a,b]$:

لتكن P تجزئة ما لـ $[a,b]$

$$P=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

ولنبرهن أن $\bigvee_a^b\frac{1}{f}<\infty$

$$V\left(\frac{1}{f},P\right)=\sum_{k=1}\left|\frac{1}{f(x_k)}-\frac{1}{f(x_{k-1})}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1\,|f(x_k)-f(x_{k-1})|}{|f(x_k)\cdot f(x_{k-1})|}\longrightarrow\frac{1}{C^2}$$ نعتبرها (*)

نعلم أن f هي دالة ذات تغير محدود فهي دالة محدودة وبالتالي يوجد $0<M$

تحقق:

$$\forall x\in[a,b]:\ |f(x)|<M$$

$$M>0$$

$$\forall x\in[a,b]:\ |f(x)|\geqslant C$$

ومنه فإن $f(x)$ محدودة من الأدنى ومحدودة من الأعلى.

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{|f(x)|} \quad ; \forall x \in [a,b]$$

ضربت بـ $\frac{1}{c}$ وضربت بـ $\frac{1}{f(x_{k-1})}$ لأن x اختيارية $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{|f(x_k)| \cdot |f(x_{k-1})|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{1}{|f(x_k) \cdot f(x_{k-1})|}$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{1}{f}, P\right) \leq \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \quad \text{من } (*)$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{1}{f}, P\right) \leq \frac{1}{c^2} (f, P)$$

$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} \frac{1}{f} \leq \frac{1}{c^2} \overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$$

$\Leftarrow \frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

برهان الخاصية $\boxed{3}$

لتكن P تجزئة ما لـ $[a,b]$ حيث: $P = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$

ولكن لدينا: $\overset{b}{\underset{a}{V}} g < \infty$ و $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$

ولنبرهن أن $\overset{b}{\underset{a}{V}} (f \mp g) < \infty$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} (f \mp g) < \infty \quad (2) + (1)$$

$$V(f \mp g, P) = \sum_{k=1}^{n} |(f \mp g)(x_k) - (f \mp g)(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1}) \mp g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$V(f \mp g, P) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[|f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})| \right]$$

وذلك بالاعتماد على الخاصية $|a+b| \leq |a| + |b|$ و $|a-b| \leq |a| + |b|$

$$V(f \mp g, P) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$\Longleftrightarrow V(f\mp g,P)\leq V(f,P)+V(g,P)$$

$$\Longleftrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f\mp g)\leq \overset{b}{\underset{a}{V}}f+\overset{b}{\underset{a}{V}}g<\infty$$

$\Longleftarrow$ $f\mp g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

③ لتكن P تجزئة ما على $[a,b]$ ؛ $P=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b\}$

$$V(f\cdot g,P)=\sum_{k=1}^{n}\left|(f\cdot g)(x_k)-(f\cdot g)(x_{k-1})\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)\cdot g(x_k)-f(x_{k-1})\cdot g(x_{k-1})\right|$$

طريقتين: ط١ : نضيف ونطرح $f(x_{k-1})\cdot g(x_k)$ ، ط٢ : نضيف ونطرح $g(x_{k-1})\cdot f(x_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)\cdot g(x_k)-f(x_{k-1})\cdot g(x_k)+f(x_{k-1})\cdot g(x_k)-f(x_{k-1})\cdot g(x_{k-1})\right|$$

$$=\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left|\underbrace{g(x_k)}_{}\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right]+\underbrace{f(x_{k-1})}_{}\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right]\right|}\quad I$$

دالة محدودة أصغر من M_1 ، دالة محدودة أصغر من M_2

بما أن f و g دوال ذات تغير محدود $(\forall x\in[a,b])$ فإن :

$$I\leq M_1\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+M_2\sum_{k=1}^{n}\left|g(x_k)-g(x_{k-1})\right|$$

|| (متساويات) ، بأخذ الـ sup

$$I\leq M_1\,V(f,P)+M_2\,V(g,P)$$

$$\leq M_1\underbrace{\overset{b}{\underset{a}{V}}f}_{<\infty}+M_2\underbrace{\overset{b}{\underset{a}{V}}g}_{<\infty}<\infty$$