المحاضرة الثالثة : تطبيقات نظرية الفئات 2016/3/28

الدوال :

مراجعة :

الدالة المباشرة :

$F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$

$F : ob(\mathcal{C}_1) \longrightarrow Ob(\mathcal{C}_2)$

$A \longmapsto F(A)$

$F : Mor(\mathcal{C}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{C}_2)$

$u : A \longrightarrow B$

$F(u) : F(A) \longrightarrow F(B)$

$F(I_A) = I_{F(A)}$

$F(g.f) = F(g).F(f)$

$\forall x \in ob(\mathcal{C})$

$h_x : \mathcal{C} \longrightarrow set's$

$h_x(A) = \mathcal{C}(x, A)$

الدالة غير المباشرة :

$F(u) : F(B) \longrightarrow F(A)$

$F(I_A) = I_{F(A)}$

$F(g.f) = F(f).F(g)$

تتمة برهان المبرهنة :

2- أياً كان $X \in ob(\mathcal{C})$ يوجد دالي غير مباشر :

$\hat{h}_x : \mathcal{C} \longrightarrow Set's$

البرهان : لنعرف $\hat{h}_x$ من خلال :

تطبيق الأشياء :

$\hat{h}_x : ob(\mathcal{C}) \longrightarrow ob(set's)$

$\hat{h}_x(A) = \mathcal{C}(A, X)$

واضح أن $\hat{h}_x$ تطبيق .

- تطبيق المورفيزمات

$\hat{h}_x : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(Set's)$

$\forall \quad u : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}(A, B)$

$$\hat{h}_x(u) : \hat{h}_x(B) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$
$$: \mathcal{f}(B,X) \longrightarrow \mathcal{f}(A,X)$$

$$\hat{h}_x(u) : \mathcal{f}(B,X) \longrightarrow \mathcal{f}(A,X)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f.u"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\forall f \in \mathcal{f}(B,X)$$
$$\hat{h}_x(u)(f) = f.u \in \mathcal{f}(A,X)$$

واضح أن: $\hat{h}_x(u)$ تطبيق.

$$I_A : A \longrightarrow A$$
$$\hat{h}_x(I_A) : \hat{h}_x(A) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$
$$: \mathcal{f}(A,X) \longrightarrow \mathcal{f}(A,X)$$
$$\hat{h}_x(I_A)(f) = f.I_A = f = I_{\mathcal{f}(A,X)}(f)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "I_A"] \arrow[dr, "f.I_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\hat{h}_x(I_A) = I_{\mathcal{f}(A,X)} = I_{\hat{h}_x(A)}$$

الشرط الأول تم إثباته

نثبت الشرط الثاني:

$u : A \longrightarrow B \quad , \quad v : B \longrightarrow D$

مورفيزمين للفئة $\mathcal{f}$.

$$v.u : A \longrightarrow D$$
$$\hat{h}_x(v.u) : \hat{h}_x(D) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$
$$: \mathcal{f}(D,X) \longrightarrow \mathcal{f}(A,X)$$
$$\forall g \in \mathcal{f}(D,X) \; ;$$
$$\hat{h}_x(v.u)(g) = g.(v.u)$$
$$\overset{\text{تجميعي}}{=} (g.v).u$$

$\hat{h}_x(v)(g) =$

$$\hat{h}_x(v) : \hat{h}_x(D) \longrightarrow \hat{h}_x(B)$$
$$: \mathcal{f}(D,X) \longrightarrow \mathcal{f}(B,X)$$
$$\hat{h}_x(v)(g) = g.v$$

$$u : A \longrightarrow B$$
$$\hat{h}_x(u) : \hat{h}_x(B) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$
$$: \mathcal{f}(B,X) \longrightarrow \mathcal{f}(A,X)$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "g.v"'] & D \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$\hat{h}_x(u)(w) = w.u$

لدينا : $g.v \in f(B,X)$

$\hat{h}_x(u)(g.v) = (g.v).u$

تطبيق $\boxed{\hat{h}_x(v.u)(g)} = (g.v).u$

$= \hat{h}_x(u)(g.v)$

$= \underbrace{\hat{h}_x(u)}_{\text{تطبيق}}\big(\underbrace{\hat{h}_x(v)}_{\text{تطبيق}}(g)\big)$

$= \boxed{\hat{h}_x(u).\hat{h}_x(v)}(g)$ تطبيق

$\Rightarrow \hat{h}_x(v.u) = \hat{h}_x(u).\hat{h}_x(v)$

وبالتالي $\hat{h}_x$ دالي غير مباشر .

الأشياء الجزئية :

يوجد تطبيق : $A \longrightarrow B$ $A \subseteq B$

$\forall a \in A,\ a \in B$

تعريف : لتكن f فئة و $A \in ob(f)$.

لنأخذ الصف M_A المؤلف من جميع المونومورفيزمات

$u : U \longrightarrow A \qquad U \in ob(f)$

واضح أن الصف M_A ليس خالياً لأن $I_A \in M_A$.

لنعرف على الصف M_A علاقة « $\leq$ » بالشكل الآتي :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u_1"'] & A \\ & V \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

$\forall u, v \in M_A ;\ u \leq v \Leftrightarrow \exists\, u_1 \in f(U,V)$

$v.u_1 = u$

ولما كان u مونومورفيزم فإن u_1 مونومورفيزم

تمهيدية ١ : لتكن f فئة و $A \in ob(f)$

وليكن $u, v \in M_A$. الشروط الآتية متكافئة :

1) $u \leq v$.

2) يوجد مورفيزم وحيد $u_1 \in f(U,V)$ يحقق :

$u = v.u_1$

البرهان: (1) ⇐ (2): لنفرض أن $u \leq v$ حسب التعريف يوجد: $u_1 \in f(U,V)$ بحيث
$u = v.u_1$

ليكن $u_2 \in f(U,V)$ بحيث:
$u = v.u_2$
$v.u_1 = v.u_2$

لما كان v مونومورفيزم $V \to A$ فإن التطبيق: $\alpha: f(X,V) \longrightarrow f(X,A)$ متباين
$\alpha(g) = v.g$

ومنه لأجل $X = U$ نجد:
$u_1, u_2 \in f(U,V)$
$\alpha(u_1) = v.u_1$
$\alpha(u_2) = v.u_2$
$\Rightarrow \alpha(u_1) = \alpha(u_2)$
$\Rightarrow u_1 = u_2$

ومنه فإن المورفيزم u_1 وحيد.

(2) ⇐ (1) ينتج حسب التعريف.

تمهيدية: لتكن f فئة و $A \in ob(f)$.
العلاقة $\leq$ والمعرفة على M_A انعكاسية ومتعدية.

البرهان:
ليكن $u \in M_A$ عندئذ يوجد: $I_U \in f(U,U)$ يحقق:
$u.I_U = u$

ومنه $u \leq u$ انعكاسية.

التعدي: ليكن $u, v, w \in M_A$

$u \leq v \Rightarrow \exists\, u_1 \in f(U,V)\,;\; v.u_1 = u$

$v \leq w \Rightarrow \exists\, v_1 \in f(V,W)\,;\; w.v_1 = v$

$u \leq w \quad \exists\, \boxed{} \in f(U,W)$ المطلوب إيجاده

لنأخذ المورفيزم $v_1.u_1 \in f(U,W)$ ويحقق:

$$w_1(v_1 . u_1) = (w . v_1) . u_1$$
$$= v . u_1$$
$$= u$$

وحسب التعريف نجد أن : $u \leq w$.

ومنه العلاقة متعدية .

تمهيدية : لتكن f فئة و $A \in ob(f)$

وليكن $u, v \in M_A$ الشروط الآتية متكافئة :

1) $u \leq v \wedge v \leq u$

2) توجد ايزومورفيزمات وحيد

$$v_1 \in f(V, U) \quad , u_1 \in f(U, V)$$

تحقق : $v . u_1 = u \ , \ u . v_1 = v$

البرهان:

$1 \Rightarrow 2$: لنفرض أن $u \leq v \ , \ v \leq u$

عندئذ حسب التعريف توجد مورفيزمات $\boxed{\text{وحيدة}}$

$$v_1 \in f(V, U) \quad , u_1 \in f(U, V)$$

تحقق : $v . u_1 = u \ , \ u . v_1 = v$

لدينا : $v_1 : V \longrightarrow U$

$u_1 : U \longrightarrow V$

$v_1 . u_1 : U \longrightarrow U$

$u_1 . v_1 : V \longrightarrow V$

لما كان : $u : U \longrightarrow A$ مونومورفيزم

فإن التطبيق : $\alpha : f(X, U) \longrightarrow f(X, A)$

المعرف بالشكل : $\alpha(g) = u . g$ متباين .

لأجل $X = U$ نجد أن :

$$v_1 . u_1 \in f(U, U)$$

$$\alpha(v_1 . u_1) = u . (v_1 . u_1)$$

$$= (u.v_1).u_1 = v.u_1 = u$$
$$= \alpha(I_v)$$

$\boxed{v_1.u_1 = I_v}$ لأن α متباين

لما كان: $v_1 : V \longrightarrow A$ مونومورفيزم.

فإن التطبيق: $\beta : f(X,V) \longrightarrow f(X,A)$

$\beta(\lambda) = v_1.\lambda$ متباين.

لأجل $X = V$

ولما كان: $u_1.v_1 \in f(V,V)$

$$\beta(u_1.v_1) = v_1.(u_1.v_1)$$
$$= (v_1.u_1).v_1 = u.v_1 = v$$
$$= \beta(I_V).$$

$u_1.v_1 = I_V$ لأن β متباين

مما سبق نجد أن كل من u_1, v_1 إيزومورفيزم.

والوحدانية اثبتناها سابقاً. و.هـ.م.

2 ⟸ 1 حسب التعريف.

عبر ناس الصفة التناظرية بلغة المورفيزمات.

مبرهنة: لتكن f فئة، $A \in ob(f)$.

العلاقة $\S$ المعرفة على الصف M_A بالشكل الآتي:

$$\forall u,v \in M_A ;\ u \S v \Longleftrightarrow u \leq v \wedge v \leq u$$

البرهان وظيفة.

تعريف:

لتكن f فئة، $A \in ob(f)$

وجدنا أن العلاقة $\S$ المعرفة على الصف M_A من خلال المبرهنة السابقة هي علاقة تكافؤ على M_A

نرمز لصف التكافؤ المولد بالعنصر

$$u : U \longrightarrow A \in M_A$$

بالشكل $\overline{u}$ والمؤلف من جميع العناصر $v \in M_A$ وتحقق $u \S v$

نسمي الممثل u لصنف التكافؤ $\bar{u}$ شيئاً جزئياً من A أو بمعنى آخر:

نسمي الثنائية $(\bar{U}, u)$ شيئاً جزئياً من A .

$$u : \bar{U} \longrightarrow A$$

u مونو

ونسمي المونومورفيزم u المونومورفيزم القانوني.

انتهت المحاضرة الثالثة

المحاضرة الرابعة : تطبيقات نظرية الفئات 2016/3/29

تعريف: ليكن $F, G : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ داليين مباشرين.

نقول أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $f : F \longrightarrow G$

إذا تحقق ما يلي:

- أياً كان $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ فإن:

$$f(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$$

مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$

- أياً كان $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$

فإن المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\
F(B) \arrow[r, "f(B)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

تبديلي.

$$G(u).f(A) = f(B).F(u)$$

تعريف: ليكن $F, G : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ داليين غير مباشرين.

نقول أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي:

$$f : F \longrightarrow G$$

إذا تحقق ما يلي:

- أياً كان $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ فإن:

$$f(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$$

مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$.

- أيا كان $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة f فإن المخطط الآتي :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] & G(A) \\ F(B) \arrow[u, "F(u)"] \arrow[r, "f(B)"'] & G(B) \arrow[u, "G(u)"'] \end{tikzcd}$$

تبديلي .

$$G(u).f(B) = f(A).F(u)$$

مبرهنة : لتكن f فئة و $w : X \longrightarrow X'$ مورفيزم للفئة f . عندئذٍ يوجد مورفيزم $f : h_{X'} \longrightarrow h_X$ دالي

البرهان :

لنفرض أن $w : X \longrightarrow X'$ مورفيزم للفئة f عندئذٍ : $X, X' \in ob(f)$

ومنه توجد دوال مباشره

$$h_X , h_{X'} : f \longrightarrow Set's$$

لنعرف $f : h_{X'} \longrightarrow h_X$

- ليكن $A \in ob(f)$. لنضع :

$$f(A) : h_{X'}(A) \longrightarrow h_X(A)$$

$$f(A) : f(X',A) \longrightarrow f(X,A)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "u.w"'] & X' \arrow[d, "u"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$\forall\ u \in f(X',A)$

$$f(A)(u) = u.w$$

$\forall\ u, u_1 \in f(X',A) \ : \ u = u_1$

$\Rightarrow u.w = u_1 w$

ومنه نجد أن $f(A)$ مورفيزم للفئة $Set's$

- ليكن $v : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة f .

المخطط الآتي :

$$\begin{tikzcd} h_{X'}(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "h_{X'}(v)"'] & h_X(A) \arrow[d, "h_X(v)"] \\ h_{X'}(B) \arrow[r, "f(B)"'] & h_X(B) \end{tikzcd}$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{tikzcd}
f(X',A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "h_{X'}(v)"'] & f(X,A) \arrow[d, "h_X(v)"] \\
f(X',B) \arrow[r, "f(B)"'] & f(X,B)
\end{tikzcd}$$

$$h_X(v).f(A) = f(B).h_{X'}(v)$$

$\forall\, \lambda \in f(X',A)$;

$$h_X(v).f(A)(\lambda) = h_X(v)\big(f(A)(\lambda)\big)$$
$$= h_X(v)(\lambda.w) = v.(\lambda.w)$$
$$f(B).h_{X'}(v)(\lambda) = f(B)\big(h_{X'}(v)(\lambda)\big)$$
$$= f(B)(v.\lambda) = (v.\lambda).w$$

ومنه نجد أن المخطط السابق تبديلي وبالتالي: f مورفيزم دالي .

مبرهنة: لتكن f فئة و $w: X \longrightarrow X'$ مورفيزم للفئة f .

← دوال غير مباشره .

عندئذٍ يوجد مورفيزم دالي $g: \hat{h}_X \longrightarrow \hat{h}_{X'}$

البرهان:

لنفرض أن $w: X \longrightarrow X'$ مورفيزم للفئة f ، عندئذٍ $X, X' \in ob(f)$

وبالتالي توجد دوال غير مباشره :

$$\hat{h}_X\, ,\, \hat{h}_{X'} : f \longrightarrow Set's$$

لنعرف $g: \hat{h}_X \longrightarrow \hat{h}_{X'}$

بالشكل الآتي:

أياً كان $A \in ob(f)$ فإن:

$$g(A): \hat{h}_X(A) \longrightarrow \hat{h}_{X'}(A)$$
$$: f(A,X) \longrightarrow f(A,X')$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "w.v"'] & X \arrow[d, "w"] \\
& X'
\end{tikzcd}$$

$\forall\, v \in f(A,X)$

$$g(A)(v) = w.v$$

فنجد أن $g(A)$ مورفيزم للفئة $Set's$

- ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{J}$

$$\begin{tikzcd} \hat{h}_x(A) \arrow[r, "g(A)"] & \hat{h}_{x'}(A) \\ \hat{h}_x(B) \arrow[u, "\hat{h}_x(u)"] \arrow[r, "g(B)"'] & \hat{h}_{x'}(B) \arrow[u, "\hat{h}_{x'}(u)"'] \end{tikzcd}$$

تطبيق نسبة

تطبيق مورفيزمات

لنبرهن على أن: $g(A).\hat{h}_x(u) = \hat{h}_{x'}(u).g(B)$

$\forall M \in \hat{h}_x(B) = \mathcal{J}(B,X)$;

$$g(A).\hat{h}_x(u)(M) = g(A)(\hat{h}_x(u)(M))$$
$$= g(A)(M.u)$$
$$= w.(M.u)$$
$$\hat{h}_{x'}(u).g(B)(M) = \hat{h}_{x'}(u)(g(B)(M))$$
$$= \hat{h}_{x'}(u)(w.M)$$
$$= (w.M).u$$

ومنه فإن المخطط السابق تبديلي وبالتالي g مورفيزم دالي.

تمهيدية: ليكن $F : \mathcal{J}_1 \longrightarrow \mathcal{J}_2$ دالي مباشر.

عندئذ يوجد مورفيزم دالي $I_F : F \longrightarrow F$

والذي يسمى بالمورفيزم الدالي المطابق.

<u>البرهان:</u>

لأجل كل $A \in ob(\mathcal{J}_1)$ نعرف:

$$I_F(A) : F(A) \longrightarrow F(A)$$

بالشكل: $I_F(A) = I_{F(A)}$

عندئذ يكون $I_F(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{J}_2$

ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{J}_1$.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "I_F(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & F(A) \arrow[d, "F(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "I_F(B)"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

$$F(u).I_F(A) = F(u).I_{F(A)} = F(u)$$
$$I_F(B).F(u) = I_{F(B)}.F(u) = F(u)$$

ومنه فإن المخطط السابق تبديلي ،

وبالتالي I_F مورفيزم دالي .

تعريف: لتكن $\mathcal{f}_1, \mathcal{f}_2$ فئتين

و $Funct(\mathcal{f}_1, \mathcal{f}_2)$ صف الدوال (المباشرة) من $\mathcal{f}_1$ إلى $\mathcal{f}_2$.

وليكن f, g مورفيزمين داليين معرفين على الصف $Funct(\mathcal{f}_1, \mathcal{f}_2)$

نعرف الجداء $f.g$ بالشكل :

$$\forall A \in ob(\mathcal{f}_1) \; ; \; f.g(A) = f(A).g(A)$$

ضرب المورفيزمات المعرف على الفئة $\mathcal{f}_2$

تعريف: ليكن $F, G : \mathcal{f}_1 \longrightarrow \mathcal{f}_2$ داليين

وليكن $f : F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي

نقول أن f إيزومورفيزم دالة إذا كان :

لأجل كل $A \in ob(\mathcal{f}_1)$ فإن : $f(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$

إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{f}_2$.

مبرهنة: ليكن $F, G : \mathcal{f}_1 \longrightarrow \mathcal{f}_2$ دوال .

وليكن $f : F \longrightarrow G$ مورفيزم داليه .

إذا كان f إيزومورفيزم دالي عندئذٍ يوجد مورفيزم دالي :

$$g : G \longrightarrow F$$

يحقق : $f.g = I_G \; , \; g.f = I_F$

البرهان

لنفرض أن f إيزومورفيزم دالي

عندئذٍ : لأجل كل $A \in ob(\mathcal{f}_1)$ فإن :

$$f(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$$

إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{f}_2$.

عندئذٍ يوجد مورفيزم $g(A): G(A) \longrightarrow F(A)$ للفئة f_2 يحقق :

$$\left.\begin{aligned} f(A).g(A) &= I_{G(A)} \\ g(A).f(A) &= I_{F(A)} \end{aligned}\right\} \text{الشروط}$$

لنعرف $g: G \longrightarrow F$ بالشكل الآتي :

$\forall A \in ob(f_1)$;

فإن $g(A)$ هو المورفيزم الذي يحقق الشروط السابقة .

ليكن $u: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة f_1 .

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "g(A)"] \arrow[d, "G(u)"'] & F(A) \arrow[d, "F(u)"] \\ G(B) \arrow[r, "g(B)"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

ولنبرهن على أن

$$F(u).g(A) = g(B).G(u)$$

ولما كان $f: F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي

فإنه لأجل المورفيزم $u: A \longrightarrow B$ المخطط الآتي :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

تبديلية .

عندئذٍ : $G(u).f(A) = f(B).F(u)$

ومنه فإن :

$$\begin{aligned} F(u).g(A) &= I_{F(B)}.F(u).g(A) \\ &= g(B).f(B).F(u).g(A) \\ &= g(B).G(u).f(A).g(A) \\ &= g(B).G(u).I_{G(A)} \\ &= g(B).G(u) \end{aligned}$$

ومنه فإن g مورفيزم دالي .

وظيفة :

اثبت أن تركيب داليين مباشرين أو غير مباشرين هو دالي مباشر .

واثبت أن تركيب دالي مباشر مع آخر غير مباشر هو دالي غير مباشر

انتهت المحاضرة الرابعة .

المحاضرة الخامسة : تطبيقات نظرية الفئات 2016/4/4

تعريف :

لتكن f_1, f_2 فئتين و $Faunct(f_1, f_2)$ هو الدوال المباشرة من f_1 إلى f_2

وليكن f, g مورفيزمين داليين .

$$\forall A \in ob(f_1) \quad , \quad f.g(A) = f(A).g(A)$$

تمهيدية : لتكن $F, G, H : f_1 \longrightarrow f_2$

دوال مباشرة ، وليكن $f : F \longrightarrow G$, $g : G \longrightarrow H$

مورفيزمين داليين ، عندئذٍ : $g.f : F \longrightarrow H$ مورفيزم دالي .

البرهان :

ليكن $A \in ob(f_1)$ ، ولنبرهن على أن $g.f(A)$ مورفيزم للفئة f_2

لما كان كل من f, g مورفيزمات دالية فإن : $f(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$

$g(A) : G(A) \longrightarrow H(A)$

مورفيزمات للفئة f_2

ومنه فإن : $g(A).f(A) : F(A) \longrightarrow H(A)$

مورفيزم للفئة f_2 ومنه ، $g.f(A)$ مورفيزم للفئة f_2 .

وبالتالي الشرط الأول محقق .

ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة f_1 ولنبرهن على أن المخطط الآتي :

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "g.f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & H(A) \arrow[d, "H(u)"] \\
F(B) \arrow[r, "g.f(B)"'] & H(B)
\end{tikzcd}$$

تبديلي .

أي أن: $H(u).(g.f)(A) = (g.f)(B).F(u)$

إن: $H(u).(g.f)(A) = H(u).(g(A).f(A))$

$= (H(u).g(A)).f(A)$

لما كان $g : G \to H$ مورفيزم دالي فإنه لأجل u المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "g(A)"] \arrow[d, "G(u)"'] & H(A) \arrow[d, "H(u)"] \\
G(B) \arrow[r, "g(B)"'] & H(B)
\end{tikzcd}$$

أي أن:

$H(u).g(A) = g(B).G(u)$

ومنه: $H(u).(g.f)(A) = (g(B)G(u)).f(A)$

$= g(B).(G(u).f(A))$

أيضاً لما كان f مورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم u المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\
F(B) \arrow[r, "f(B)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

أي أن:

$G(u).f(A) = f(B).F(u)$

ومنه:

$H(u).(g.f)(A) = g(B).f(B).F(u)$

$= (g.f)(B).F(u)$

ومنه نجد أن $g.f$ مورفيزم دالي.

أشياء الخارج:

لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $B \in ob(\mathcal{C})$ ولنأخذ الصف E_B المؤلف من جميع الايزومورفيزمات $v : B \to V$ حيث $V \in ob(\mathcal{C})$

إن الصف E_B ليس خال لأن $I_B \in E_B$

تعريف: لتكن $\mathcal{f}$ فئة و $B\in ob(\mathcal{f})$ لنعرف على الصف E_B العلاقة "$\leq$"

بالشكل التالي:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & U \\ V \arrow[ru, "u_1"'] & \end{tikzcd}$$

$$\forall u, v\in E_B \;;\; u\leq v \iff \exists u_1\in \mathcal{f}(V,U) : u_1.v=u$$

ولما كان u ابيمورفيزماً نجد أن u_1 ابيمورفيزم.

تمهيدية 1: لتكن $\mathcal{f}$ فئة و $B\in ob(\mathcal{f})$

وليكن:

$$u: B\longrightarrow U$$

$$v: B\longrightarrow V$$

مورفيزمين للفئة $\mathcal{f}$ الشروط الآتية متكافئة.

1. $u\leq v$
2. يوجد ابيمورفيزم وحيد $u_1: V\longrightarrow U$ يحقق:

$$u_1.v=u$$

البرهان:

$1\Rightarrow 2$) لنفرض أن $u\leq v$ عندئذٍ حسب التعريف يوجد ابيمورفيزم $u_1\in \mathcal{f}(V,U)$

يحقق: $u_1.v=u$

لنبرهن على أن u_1 وحيد.

ليكن $u_2\in \mathcal{f}(V,U)$ يحقق $u_2.v=u$

فنجد أن $u_1.v=u_2.v$

لما كان: $v: B\longrightarrow V$ ابيموفيزماً فإن التطبيق:

$\alpha: \mathcal{f}(V,X)\longrightarrow \mathcal{f}(B,X)$ المعرف بالشكل: $\forall f\in \mathcal{f}(V,X)$

فإن: $\alpha(f)=f.v$

متباين.

وذلك $\forall X\in ob(\mathcal{f})$

ومنه لأجل $X=U$ نجد أن $u_1,u_2\in \mathcal{f}(V,U)$

ومنه $\alpha(u_1)=u_1.v=u_2.v=\alpha(u_2)$

وبالتالي: $u_1=u_2$ لأن α متباين.

وبالتالي المورفيزم u_1 وحيد.

$2\Rightarrow 1$) واضح من التعريف.

تمهيدية 2: لتكن $\mathcal{f}$ فئة ، $B\in ob(\mathcal{f})$

، العلاقة $\leq$ المعرفة على الصف E_B انعكاسية ومتعدية .

البرهان:

ليكن $v\in E_B$ عندئذٍ : $v: B \longrightarrow V$

$$I_V\cdot v = v$$

وهذا يبين أن $v \leq v$ ومنه العلاقة انعكاسية .

لنبرهن على أن $\leq$ متعدية .

ليكن $u, v, w \in E_B$

$$u: B \longrightarrow U$$

$$v: B \longrightarrow V$$

$$w: B \longrightarrow W$$

ولنفرض أن : $v \leq w$, $u \leq v$

$$u \leq v \Longrightarrow \exists\, u_1 \in \mathcal{f}(V, U)$$

يحقق : $u_1 \cdot v = u$

$$v \leq w \Longrightarrow \exists\, v_1 \in \mathcal{f}(W, V)$$

يحقق : $v_1 \cdot w = v$

لنبرهن على أن $u \leq w$

إن $u_1 \cdot v_1 : W \longrightarrow U$ مورفيزم للفئة $\mathcal{f}$

$$(u_1 \cdot v_1)\cdot w = u_1 (v_1 \cdot w)$$
$$= u_1 \cdot v = u$$

ومنه نجد أن $u \leq w$ وبالتالي العلاقة $\leq$ متعدية .

تمهيدية : لتكن $\mathcal{f}$ فئة و $B \in ob(\mathcal{f})$ ، $u, v \in E_B$ ، الشروط الآتية متكافئة :

1. $u \leq v$, $v \leq u$
2. توجد ايزومورفيزمات وحيدة

$$u_1 : V \longrightarrow U$$

$$v_1 : U \longrightarrow V$$

تحقق : $u_1 \cdot v = u$, $v_1 \cdot u = v$

البرهان:

$1 \Leftarrow 2)$ لنعرض أن $U \le V$, $V \le U$

عندئذٍ حسب تمهيدية سابقة يوجد $u_1 : V \longrightarrow U$

$v_1 : U \longrightarrow V$

كل منهما ايبومورفيزم وحيد و يحققان : $u_1 . v = u$, $v_1 . u = v$

$u_1 . v_1 : U \longrightarrow U$

$v_1 . u_1 : V \longrightarrow V$

لأجل $u_1 . v_1$:

لدينا: $u : B \longrightarrow U$ ايبومورفيزم و منه فإن التطبيق

$\alpha : f(U, X) \longrightarrow f(B, X)$

المعرف بالشكل : $\alpha(f) = f . u$ متباين .

عندئذٍ لأجل $X = U$ نجد أن $u_1 , v_1 \in f(U, U)$ و يحقق:

$$\alpha(u_1 . v_1) = (u_1 . v_1) . u$$
$$= u_1 . (v_1 . u) = u_1 . v = u = I_U . u$$
$$= \alpha(I_U)$$

$$u_1 . v_1 = I_U$$

بنفس الطريقة لأجل $v_1 . u_1$

نجد أن $v_1 . u_1 = I_V$

مما سبق نجد أن كل من v_1 , u_1 ايزومورفيزم

$2 \Leftarrow 1)$ واضح

انتهت المحاضرة الخامسة