

السؤال:

مراجعة:

$$F: \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$$

$$F: \text{ob}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{F}_2)$$

$$A \longmapsto F(A)$$

$$F: \text{Mor}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{F}_2)$$

$$u: A \longrightarrow B$$

$$F(u): F(A) \longrightarrow F(B)$$

$$F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$\forall x \in \text{ob}(\mathcal{F})$$

$$h_x: \mathcal{F} \longrightarrow \text{Set's}$$

$$h_x(A) = \mathcal{F}(x, A)$$

الدالة غير المباشرة:

$$F(u): F(B) \longrightarrow F(A)$$

$$F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

تمة برهان البرهان:

2- أيًا كان  $x \in \text{ob}(\mathcal{F})$  يوجد دالة غير مباشرة:

$$\hat{h}_x: \mathcal{F} \longrightarrow \text{Set's}$$

البرهان: لتعرف  $\hat{h}_x$  من خلال:

تطبيق الأشياء:

$$\hat{h}_x: \text{ob}(\mathcal{F}) \longrightarrow \text{ob}(\text{Set's})$$

$$\hat{h}_x(A) = \mathcal{F}(A, x)$$

واضح أن  $\hat{h}_x$  تطبق

- تطبيق المورفيزمات

$$\hat{h}_x: \text{Mor}(\mathcal{F}) \longrightarrow \text{Mor}(\text{Set's})$$

$$\forall u: A \longrightarrow B \in \mathcal{F}(A, B)$$

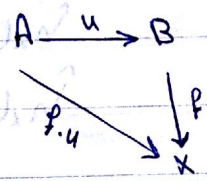
$$\hat{h}_x(u) : \hat{h}_x(B) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: f(B, x) \longrightarrow f(A, x)$$

$$\hat{h}_x(u) : f(B, x) \longrightarrow f(A, x)$$

$$\forall P \in f(B, x)$$

$$\hat{h}_x(u)(P) = P \cdot u \in f(A, x)$$



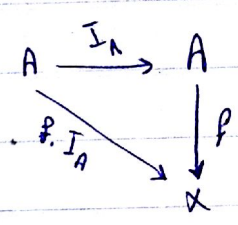
واضح أن:  $\hat{h}_x(u)$  تطبيق

$$I_A : A \longrightarrow A$$

$$\hat{h}_x(I_A) : \hat{h}_x(A) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: f(A, x) \longrightarrow f(A, x)$$

$$\hat{h}_x(I_A)(P) = P \cdot I_A = P = I_{f(A, x)}(P)$$



$$\hat{h}_x(I_A) = I_{f(A, x)} = I_{\hat{h}_x(A)}$$

الشرط الأول يتم إنجازه

$$u : A \longrightarrow B, v : B \longrightarrow D$$

نثبت الشرط الثاني:

مورفزم من الفئة  $f$

$$v \cdot u : A \longrightarrow D$$

$$\hat{h}_x(v \cdot u) : \hat{h}_x(D) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: f(D, x) \longrightarrow f(A, x)$$

$$\forall g \in f(D, x);$$

$$\hat{h}_x(v \cdot u)(g) = g \cdot (v \cdot u)$$

$$= (g \cdot v) \cdot u$$

$$\hat{h}_x(v) : \hat{h}_x(D) \longrightarrow \hat{h}_x(B)$$

$$: f(D, x) \longrightarrow f(B, x)$$

$$\hat{h}_x(v)(g) = g \cdot v$$

$$u : A \longrightarrow B$$

$$\hat{h}_x(u) : \hat{h}_x(B) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: f(B, x) \longrightarrow f(A, x)$$

$$\hat{h}_x(u)(w) = w \cdot u$$

$$g \cdot v \in f(B, x)$$

$$\hat{h}_x(u)(g \cdot v) = (g \cdot v) \cdot u$$

$$\hat{h}_x(v \cdot u)(g) = (g \cdot v) \cdot u$$

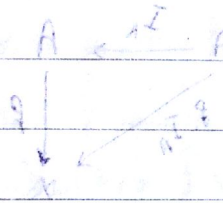
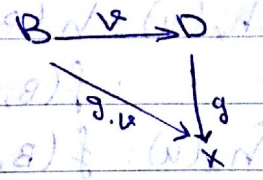
$$= \hat{h}_x(u)(g \cdot v)$$

$$= \hat{h}_x(u) \left( \hat{h}_x(v)(g) \right)$$

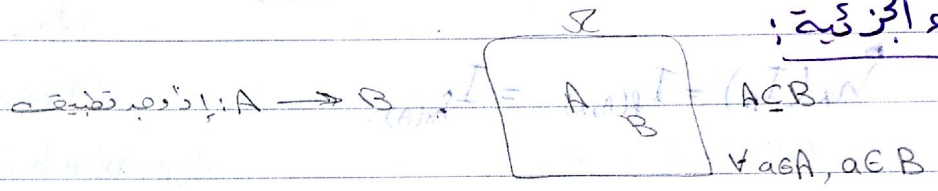
$$= \hat{h}_x(u) \cdot \hat{h}_x(v)(g)$$

$$\Rightarrow \hat{h}_x(v \cdot u) = \hat{h}_x(u) \cdot \hat{h}_x(v)$$

وبالتالي  $\hat{h}_x$  دالية غير مبدئية



الاشياء الجزئية:



تعريف:  $A \in \text{ob}(f)$  تكون  $f$  فئة و  $A \in \text{ob}(f)$

لناخذ الصف  $M_A$  المؤلف من جميع المونومورفيزمات

$$u: U \longrightarrow A \quad U \in \text{ob}(f)$$

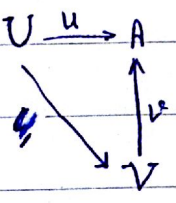
واضح أن الصف  $M_A$  ليس خالياً لأن  $I_A \in M_A$

لتعرف على الصف  $M_A$  علاقة «  $\leq$  » بالمثل الآتية:

$$\forall u, v \in M_A, u \leq v \iff \exists u_1 \in f(U, V)$$

$$v \cdot u_1 = u$$

وطالما كان  $u$  مونومورفيزم، فإن  $u_1$  مونومورفيزم



توحيدية: لتكن  $f$  فئة و  $A \in \text{ob}(f)$

وليكن  $u, v \in M_A$  الشروط الآتية متكافئة:

1.  $u \leq v$

2. يوجد مورفيزم  $w$  وصيد  $u_1 \in f(U, V)$  يحققه:

$$u = v \cdot u_1$$

البرهان: (1)  $\Leftarrow$  (2): لنفرض أن  $u \leq v$  حسب التعريف يوجد:  $u \in f(U, v)$  بحيث

$$u = v \cdot u_1$$

ليكن  $u_2 \in f(U, v)$  بحيث:

$$u = v \cdot u_2$$

$$v \cdot u_1 = v \cdot u_2$$

لما كان  $v$  مورفورفزم فإن التطبيق:  $\alpha: f(X, v) \rightarrow f(X, A)$  متباين

$$\alpha(g) = v \cdot g$$

ومنه لندرج  $X = U$  نجد:

$$u_1, u_2 \in f(U, v)$$

$$\alpha(u_1) = v \cdot u_1$$

$$\alpha(u_2) = v \cdot u_2$$

$$\Rightarrow \alpha(u_1) = \alpha(u_2)$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2$$

ومنه فإن المورفورفزم  $u_1$  وصيد.

(2)  $\Leftarrow$  (1) ينتج حسب التعريف.

**تعميرية:** لتكن  $f$  فئة و  $A \in \text{ob}(f)$

الملاقة  $\leq$  والمعرفة على  $M_A$  انقلابية ومتعدية.

البرهان:

ليكن  $u \in M_A$  عندئذ يوجد:  $I_U \in f(U, v)$  يحققه:

$$u \cdot I_U = u$$

ومنه  $u \leq u$  انقلابية.

التعدية: ليكن  $u, v, w \in M_A$

$$u \leq v \Rightarrow \exists u_1 \in f(v, v); v \cdot u_1 = u$$

$$v \leq w \Rightarrow \exists v_1 \in f(v, w); w \cdot v_1 = v$$

$$u \leq w \Rightarrow \exists \square \in f(v, w)$$

لناخذ المورفورفزم  $v_1 \cdot u_1 \in f(v, w)$  ويحققه:

$$\omega \cdot (v, u) = (\omega \cdot v), u$$

$$= v \cdot u$$

$$(v, v) = u$$

وصف التعريف نجد أن:  $u \leq w$

ومن العلاقة متعددية.

**تعمدية:** لكن  $f$  فئة و  $A \in \text{ob}(f)$

ولكن  $u, v \in M_A$  الشروط الآتية متكافئة:

$$u \leq v \wedge v \leq u \quad (1)$$

(2) توجد مورفيزمات و  $v$

$$v_1 \in f(v, u), \quad u_1 \in f(u, v)$$

$$v \cdot u_1 = u, \quad u \cdot v_1 = v$$

البرهان

$$u \leq v, \quad v \leq u$$

1 ← 2 لنفرض أن

عندئذ حسب التعريف توجد مورفيزمات وصية

$$v_1 \in f(v, u), \quad u_1 \in f(u, v)$$

$$v \cdot u_1 = u, \quad u \cdot v_1 = v$$

لدينا:

$$v_1: v \rightarrow u$$

$$u_1: u \rightarrow v$$

لما كان:  $u: U \rightarrow A$  مورفوريزم

$$\alpha: f(x, U) \rightarrow f(x, A)$$

فإن التطبيق:

$$\alpha(g) = u \cdot g$$

متباين.

المعرف بالمثل.

لأن:

$$v, u \in f(u, u)$$

$$\alpha(v \cdot u) = u \cdot (v \cdot u)$$

$$u = (u, v_1) \cdot u_1 = v_1 \cdot u_1 = u$$

$$= \alpha(I_V)$$

لذلك  $v_1 \cdot u_1 = I_V$

كان  $u$  :  $v_1, V \rightarrow A$  مورفوزين

فإن التطبيق  $\beta : f(x, V) \rightarrow f(x, A)$

$$\beta(\lambda) = v_1 \cdot \lambda$$

متباين

لذلك  $x = V$

$u_1, v_1 \in f(V, V)$  وكان

$$\beta(u_1, v_1) = v_1 \cdot (u_1, v_1)$$

$$= (v_1 \cdot u_1) \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1 = v_1$$

$$= \beta(I_V)$$

لذلك  $u_1, v_1 = I_V$

كما سبق نجد أن كل مورفوزين  $u_1, v_1$  إيزومورفزم والعلاقة أثبتناها سابقاً. و هـ م.

أصبحت التعريف

غير ناعى الصفة التناظرية بصفة المورفوزيات

مبرهنة لتكن  $f$  فئة و  $A \in \text{ob}(f)$

العلاقة  $\leq$  المعرفة على الصف  $M_A$  بالشكل الآتي :

$$\forall u, v \in M_A; u \leq v \iff u \leq v \wedge v \leq u$$

البرهان وظيفة:

تعريف:

لتكن فئة و  $A \in \text{ob}(f)$

وجدنا أن العلاقة  $\leq$  المعرفة على الصف  $M_A$  من خلال المبرهنة السابقة هي علاقة

تكاثر على  $M_A$

نرمز لصف التكاثر المولد بالنظر

$$u, v \rightarrow A \in M_A$$

بالشكل  $\bar{u}$  والمؤلف من جميع العناصر  $v \in M_A$  وتنفق  $u \leq v$

نسمي المثل  $u$  لصفة التكملة  $U$  شيئاً جزئياً من  $A$  أو بعض آخر.  
 نسمي الصائبة  $(U, u)$  شيئاً جزئياً من  $A$ .

$$u: U \rightarrow A$$

ونسمي المونومورفيزم  $u$  المونومورفيزم القانوني.

انتهت المحاضرة الثالثة

2016/3/29

المحاضرة الرابعة: تطبيقات نظرية الفئات

تعريفه: ليكن  $f_1, f_2: A \rightarrow B$  داليتين مباشرتين.

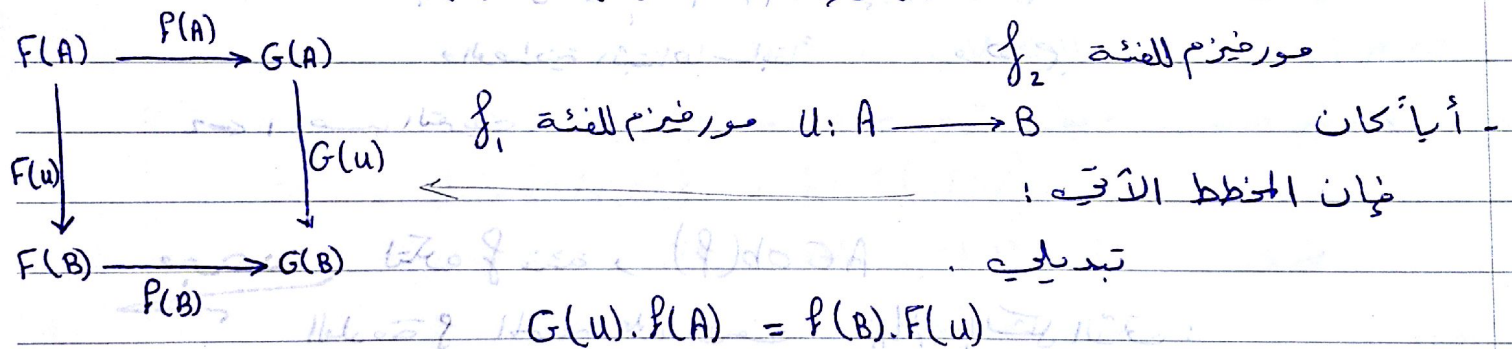
نقول أنه يوجد لدينا مورفيزم  $P$  دالٍ،

$$P: f_1 \rightarrow f_2$$

إذا تحقق ما يلي:

- أيًا كان  $A \in \text{ob}(f_1)$  فإن:

$$P(A): f_1(A) \rightarrow f_2(A)$$



تعريفه: ليكن  $f_1, f_2: A \rightarrow B$  داليتين غير مباشرتين.

نقول أنه يوجد لدينا مورفيزم دالٍ:

$$P: f_1 \rightarrow f_2$$

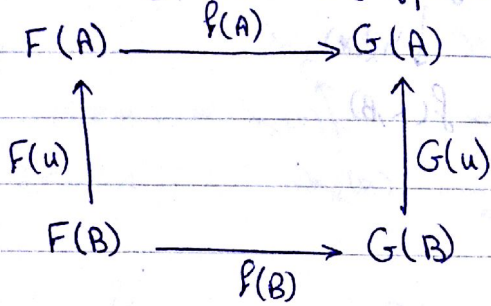
إذا تحقق ما يلي:

- أيًا كان  $A \in \text{ob}(f_1)$  فإن:

$$P(A): f_1(A) \rightarrow f_2(A)$$

مورفيزم للفئة  $f_2$

أيام كان  $U: A \rightarrow B$  مورفزم الفئة  $\mathcal{F}$  فإن الخطب الآتية:



تبدلية

$$G(u) \cdot P(B) = P(A) \cdot F(u)$$

سرهنة: لتكن  $f$  فئة و  $w: X \rightarrow X'$  مورفزم للفئة  $f$ . عندئذ يوجد مورفزم

$$P: h_x \rightarrow h_{x'}$$

البرهان:

لنفرض أن  $x, x' \in \text{ob}(f)$ : عندئذ  $w: X \rightarrow X'$  مورفزم للفئة  $f$  عندئذ:

ومنه توجد دوال مباشرة

$$h_x, h_{x'}: f \rightarrow \text{Set's}$$

$$P: h_x \rightarrow h_{x'}$$

ليكن  $A \in \text{ob}(f)$ . لنضع:

$$P(A): h_{x'}(A) \rightarrow h_x(A)$$

$$P(A): f(x', A) \rightarrow f(x, A)$$

$$\forall u \in f(x', A)$$

$$P(A)(u) = u \cdot w$$

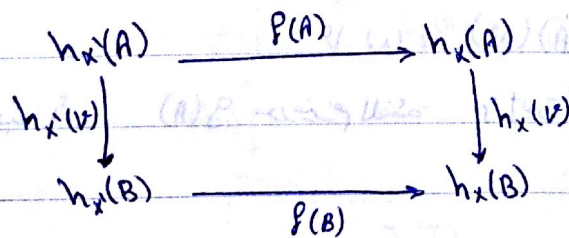
$$\forall u, u_1 \in f(x', A): u = u_1$$

$$\Rightarrow u \cdot w = u_1 \cdot w$$

ومنه نجد أن  $P(A)$  مورفزم للفئة Set's

ليكن  $v: A \rightarrow B$  مورفزم للفئة  $f$ .

الخطب الآتية:



$$\begin{array}{ccc}
 f(x, A) & \xrightarrow{f(A)} & f(x, A) \\
 \downarrow h_x(v) & & \downarrow h_x(v) \\
 f(x, B) & \xrightarrow{f(B)} & f(x, B)
 \end{array}$$

$$h_x(v) \cdot f(A) = f(B) \cdot h_x(v)$$

$\forall \lambda \in f(x, A)$  ;

$$\begin{aligned}
 h_x(v) \cdot f(A)(\lambda) &= h_x(v) (f(A)(\lambda)) \\
 &= h_x(v)(\lambda \cdot \omega) = v \cdot (\lambda \cdot \omega)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(B) \cdot h_x(v)(\lambda) &= f(B) (h_x(v)(\lambda)) \\
 &= f(B)(v \cdot \lambda) = (v \cdot \lambda) \cdot \omega
 \end{aligned}$$

ومنه نجد ان المخطط السابق تبديلي وبالتالي :  $f$  مورفيزم دالي

مبرهنة: لتكن  $f$  فئة و  $\omega: X \rightarrow X'$  مورفيزم للفئة  $f$   
 عندئذ يوجد مورفيزم دالي  $g: \hat{h}_x \rightarrow \hat{h}_{x'}$  دوال غير مباشرة

البرهان:

لنفرض ان  $\omega: X \rightarrow X'$  مورفيزم للفئة  $f$  عندئذ  $x, x' \in \text{ob}(f)$

وبالتالي توجد دوال غير مباشرة:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{h}_x, \hat{h}_{x'}: f & \longrightarrow & \text{Set's} \\
 g: \hat{h}_x & \longrightarrow & \hat{h}_{x'}
 \end{array}$$

لنعرفه

بالشكل الآتي:

أي كان  $A \in \text{ob}(f)$  فإن:

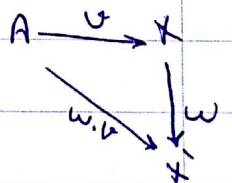
$$g(A): \hat{h}_x(A) \longrightarrow \hat{h}_{x'}(A)$$

$$: f(A, X) \longrightarrow f(A, X')$$

$\forall v \in f(A, X)$

$$g(A)(v) = \omega \cdot v$$

فتبين ان  $g(A)$  مورفيزم للفئة  $f$  من  $\text{Set's}$



لكن  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_x(A) & \xrightarrow{g(A)} & \hat{h}_x(A) \\ \uparrow \hat{h}_x(u) & & \uparrow \hat{h}_x(u) \\ \hat{h}_x(B) & \xrightarrow{g(B)} & \hat{h}_x(B) \end{array}$$

تطبيق إنشاء  
تطبيق مورفيزما

لنبرهن على أن:  $g(A) \cdot \hat{h}_x(u) = \hat{h}_x(u) \cdot g(B)$

$\forall M \in \hat{h}_x(B) = \mathcal{F}(B, x)$  ;

$$g(A) \cdot \hat{h}_x(u)(M) = g(A)(\hat{h}_x(u)(M))$$

$$= g(A)(M \cdot u)$$

$$= \omega.(M \cdot u)$$

$$\hat{h}_x^{-1}(u) \cdot g(B)(M) = \hat{h}_x^{-1}(u)(g(B)(M))$$

$$= \hat{h}_x^{-1}(u)(\omega.M)$$

$$= (\omega.M) \cdot u$$

ومنه فإن المخطط السابق تبديلي وبالتالي  $g$  مورفيزم دالي.

تصريدية؛ ليكن  $F: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  دالي مباشر.

$$I_F: F \rightarrow F$$

عندئذ يوجد مورفيزم دالي

والذي يسمى بالمورفيزم الدالي المطابق

البرهان:

لأجل كل  $A \in \text{ob}(\mathcal{F}_1)$  لتعرف:

$$I_F(A): F(A) \rightarrow F(A)$$

$$I_F(A) = I_{F(A)}$$

بالشكل:

عندئذ يتوه  $I_F(A)$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{F}_2$

ليكن  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{F}_1$

$$F(A) \xrightarrow{I_F(A)} F(A)$$

$$\downarrow F(u)$$

$$\downarrow F(u)$$

$$F(B) \xrightarrow{I_F(B)} F(B)$$

$$I_F(B)$$

$$F(u) \cdot I_F(A) = F(u) \cdot I_{F(A)} = F(u)$$

$$I_{F(B)} \cdot F(u) = I_{F(B)} \cdot F(u) = F(u)$$

ومن هنا الخطأ السابق يتبدل  
وبالتالي  $I_F$  مورفزم دالي.

تعريف: لتكن  $f_1, f_2$  فئتين

و  $\text{Funct}(f_1, f_2)$  صف الدوال (المباشرة) من  $f_1$  إلى  $f_2$ .  
وليكن  $f, g$  مورفزمين داليين معرفين على الصف  $\text{Funct}(f_1, f_2)$   
نصف الجداء  $f \cdot g$  بالشكل:

$$\forall A \in \text{ob}(f_1) ; f \cdot g(A) = f(A) \cdot g(A)$$

تعريف: ليكن  $F, G : f_1 \rightarrow f_2$  داليين

وليكن  $f : F \rightarrow G$  مورفزم دالي

نقول أن  $f$  ايزومورفزم دالة إذا كان:

$$f(A) : F(A) \rightarrow G(A) ; \forall A \in \text{ob}(f_1)$$

ايزومورفزم للفئة  $f_2$

مبرهنة: ليكن  $F, G : f_1 \rightarrow f_2$  دوال

وليكن  $f : F \rightarrow G$  مورفزم دالي

إذا كان  $f$  ايزومورفزم دالي عندئذ يوجد مورفزم دالي:

$$g : G \rightarrow F$$

$$f \cdot g = I_G, g \cdot f = I_F$$

يحقه

البرهان

لنصن أن  $f$  ايزومورفزم دالي

عندئذ: لأجل كل  $A \in \text{ob}(f_1)$  فإن:

$$f(A) : F(A) \rightarrow G(A)$$

ايزومورفزم للفئة  $f_2$

عندئذ يوجد مورفزم  $G(A) \rightarrow F(A)$  للفئة  $\mathcal{F}_2$  تحقق:

$$F(A) \cdot g(A) = I_{G(A)}$$

$$g(A) \cdot F(A) = I_{F(A)}$$

لتعرفه،  $g: G \rightarrow F$  بالشكل الآتي:

$$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{F}_1);$$

حيث  $g(A)$  هو المورفزم الذي يحقق الشرط السابقة.

ليكن  $u: A \rightarrow B$  مورفزم للفئة  $\mathcal{F}_1$ .

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) \\ G(u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ G(B) & \xrightarrow{g(B)} & F(B) \end{array}$$

ولنبرهن على أن

$$F(u) \cdot g(A) = g(B) \cdot G(u)$$

ولما كان  $f: F \rightarrow G$  مورفزم دالي

حيث  $u: A \rightarrow B$  المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

تدليجي

$$G(u) \cdot f(A) = f(B) \cdot F(u)$$

ومنه فإن

$$F(u) \cdot g(A) = I_{F(B)} \cdot F(u) \cdot g(A)$$

$$= g(B) \cdot f(B) \cdot F(u) \cdot g(A)$$

$$= g(B) \cdot G(u) \cdot f(A) \cdot g(A)$$

$$= g(B) \cdot G(u) \cdot I_{G(A)}$$

$$= g(B) \cdot G(u)$$

ومنه فإن  $g$  مورفزم دالي.

وظيفة :

اثبت ان تركيب داليتين مباشرين او غير مباشرين هو دالي مباشر  
واثبت ان تركيب دالي مباشر مع اخر غير مباشر هو دالي غير مباشر

انقرت المحاضرة الرابعة

2016/4/4

تطبيقات نظرية الفئات

المحاضرة الخامسة :

تعريفه :

لتكن  $f_1, f_2$  فئتين و  $\text{Faunct}(f_1, f_2)$  هو الدوال المباشرة من  $f_1$  إلى  $f_2$   
ولتكن  $f, g$  مورفيزمين داليتين .

$$\forall A \in \text{ob}(f_1), f \cdot g(A) = f(A) \cdot g(A)$$

تعمودية: لتكن  $F, G, H: f_1 \rightarrow f_2$

دوال مباشرة ، وليكن  $g: G \rightarrow H, f: F \rightarrow G$

مورفيزمين داليتين ، عندئذ:  $g \cdot f: F \rightarrow H$  مورفيزم دالي.

البرهان

ليكن  $A \in \text{ob}(f_1)$  ، ولنبرهن على أن  $g \cdot f(A)$  مورفيزم للفئة  $f_2$

لما كان كل من  $f, g$  مورفيزمات دالية فإن  $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$

$$g(A): G(A) \rightarrow H(A)$$

مورفيزمات الفئة  $f_2$

$$g(A) \cdot f(A): F(A) \rightarrow H(A)$$

مورفيزم للفئة  $f_2$  ومنه  $g \cdot f(A)$  مورفيزم للفئة  $f_2$

وبالتالي الشرط الأول محقق .

ليكن  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفئة  $f_1$  ولنبرهن على أن المخطط الآتي :

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{g \cdot f(A)} & H(A) \\
 F(u) \downarrow & & \downarrow H(u) \\
 F(B) & \xrightarrow{g \cdot f(B)} & H(B)
 \end{array}$$

تبدليه .

$$H(u) \cdot (g \cdot f)(A) = (g \cdot f)(B) \cdot F(u) \quad \text{أي أن:}$$

$$H(u) \cdot (g \cdot f)(A) = H(u) \cdot (g(A) \cdot f(A)) \quad \text{إذن:}$$

$$= (H(u) \cdot g(A)) \cdot f(A)$$

لما كان  $g: G \rightarrow H$  مورفيزم دالي فإنه لأجل  $u$  الخطة الآتية تبديلية:

$$G(A) \xrightarrow{g(A)} H(A)$$

$$\downarrow H(u) \quad \downarrow H(u)$$

$$G(B) \xrightarrow{g(B)} H(B)$$

أي أن:

$$H(u) \cdot g(A) = g(B) \cdot G(u)$$

$$H(u) \cdot (g \cdot f)(A) = (g(B) \cdot G(u)) \cdot f(A) \quad \text{ومنه:}$$

$$= g(B) \cdot (G(u) \cdot f(A))$$

أيضاً لما كان  $f$  مورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم  $u$  الخطة الآتية تبديلية:

$$F(A) \xrightarrow{f(A)} G(A)$$

$$\downarrow F(u) \quad \downarrow G(u)$$

$$F(B) \xrightarrow{f(B)} G(B)$$

أي أن:

$$G(u) \cdot f(A) = f(B) \cdot F(u)$$

ومنه:

$$H(u) \cdot (g \cdot f)(A) = g(B) \cdot f(B) \cdot F(u)$$

$$= (g \cdot f)(B) \cdot F(u)$$

ومنه نجد أن  $g \cdot f$  مورفيزم دالي.

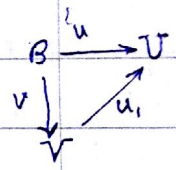
أسماء الخارعة:

لتكن  $f$  فئة و  $B \in \text{ob}(f)$  ولناقة الصف  $E_B$  المؤلف من جميع الـ  $\text{isomorphisms}$

$$\forall \alpha \in \text{ob}(f) \quad \exists \varphi: B \rightarrow \alpha$$

إن الصف  $E_B$  ليس خال لأن  $I_B \in E_B$

تعريف التكرار  $f$  فئة و  $BEob(f)$  لتعرف على الصف  $E_B$  العلاقة " $\leq$ "



$$\forall u, v \in E_B ; u \leq v \iff \exists u_1 \in f(v, U) : u_1 \cdot v = u$$

ولما كان  $u$  ايومورفيزمًا نجد أن  $u_1$  ايومورفيزم

تعميرية 1: لتكن  $f$  فئة و  $BEob(f)$

$$u_1: B \rightarrow U$$

$$v_1: B \rightarrow V$$

مورفيزمين للفئة  $f$  الشروط الآتية متكافئة

1.  $u \leq v$

2. يوجد ايومورفيزم وصيد  $u_1: V \rightarrow U$  يحقق

$$u_1 \cdot v = u$$

البرهان:

$(2 \iff 1)$  لنفرض أن  $u \leq v$  عندئذ حسب التعريف يوجد ايومورفيزم  $u_1 \in f(v, U)$

$$u_1 \cdot v = u$$

لنبرهن على أن  $u_1$  وصيد

$$u_2 \cdot v = u \quad \text{ليكن } u_2 \in f(v, U) \text{ يحقق}$$

$$u_1 \cdot v = u_2 \cdot v$$

ولما كان  $u_1, u_2$  ايومورفيزمات فان التطبيق:

$$\forall f \in f(v, X) \quad \alpha: f(v, X) \rightarrow f(B, X)$$

$$\alpha(f) = f \cdot v$$

متباين

$$\forall X \in ob(f)$$

ومنه لأجل  $X=U$  نجد أن  $u_1, u_2 \in f(v, U)$

$$\alpha(u_1) = u_1 \cdot v = u_2 \cdot v = \alpha(u_2)$$

وبالتالي:  $u_1 = u_2$  لأن  $\alpha$  متباين

وبالتالي المورفيزم  $u_1$  وصيد

$(1 \iff 2)$  واضح من التعريف

تمريرية 2: لكل فئة  $B \in \text{ob}(f)$  ،

العلاقة  $\leq$  المعرفة على الصف  $E_B$  انعكاسية وتمريرية .

البرهان:

ليكن  $v \in E_B$  عندهذا:  $v: B \rightarrow V$

$$I_v \cdot v = v$$

وهذا يبين أن  $v \leq v$  ومنه العلاقة انعكاسية .

لنبرهن على أن  $\leq$  تمريرية .

ليكن  $u, v, w \in E_B$

$$u: B \rightarrow U$$

$$v: B \rightarrow V$$

$$w: B \rightarrow W$$

ولنفرض أن:  $u \leq v$  ,  $v \leq w$

$$u \leq v \implies \exists u_1 \in f(V, U)$$

$$u_1 \cdot v = u$$

$$v \leq w \implies \exists v_1 \in f(W, V)$$

$$v_1 \cdot w = v$$

لنبرهن على أن  $u \leq w$

إن  $u_1, v_1: W \rightarrow U$  مورفزم للفئة  $f$

$$(u_1 \cdot v_1) \cdot w = u_1 \cdot (v_1 \cdot w)$$

$$= u_1 \cdot v = u$$

ومنه نجد أن  $u \leq w$  وبالتالي العلاقة  $\leq$  تمريرية .

تمريرية 1: لكل فئة  $B \in \text{ob}(f)$  ، السوط الأسي متكافئة:  $u, v \in E_B$  ،

$$u \leq v , v \leq u$$

$$u_1: V \rightarrow U$$

$$v_1: U \rightarrow V$$

$$u_1 \cdot v_1 = u , v_1 \cdot u_1 = v$$

تفقت:

2- توجد ايزومورفزمات عكسية



البيان:

1 ← 2) لنفرض أن  $u \leq v, v \leq u$

عندئذ حسب تعريفية علاقة يوجد

$$u_1: V \rightarrow U$$

كل منهما اي مورفيزم  $\downarrow$  و يحققان  $u_1 \cdot v = u, v_1 \cdot u = v$

$$u_1, v_1: U \rightarrow U$$

$$v_1, u_1: V \rightarrow V$$

لنحل  $u_1, v_1$

لدينا:  $u: B \rightarrow U$  المورفيزم ومنه فان التطبيق

$$\alpha: f(U, X) \rightarrow f(B, X)$$

المعرفه بالشكل:  $\alpha(f) = f \cdot u$  متباينه.

عندئذ لاجل  $X = U$  نجد ان  $u_1, v_1 \in f(U, U)$  و يحققه:

$$\begin{aligned} \alpha(u_1, v_1) &= (u_1, v_1) \cdot u \\ &= u_1 \cdot (v_1 \cdot u) = u_1 \cdot v = u = I_U \cdot u \\ &= \alpha(I_U) \end{aligned}$$

$$u_1, v_1 = I_U$$

بنفس الطريقة لاجل  $v_1, u_1$

$$v_1, u_1 = I_V$$

لما سبقه نجد ان كل من  $v_1, u_1$  المورفيزم

2 ← 1) واضح

### انتهى العرضه الكامله