معايير الدوال ذات التغير المحدود.

1 إذا كانت f دالة معرفة ومطردة على $[a,b]$ فإن f د. ت. م على $[a,b]$ وتحقق العلاقة

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(b)-f(a)|$$

نتيجة:

2 إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط لبشتز على $[a,b]$ فإن f د. ت. م على $[a,b]$

3 نتيجة: إذا كانت f دالة ذات مشتقات محدودة على $[a,b]$ فإن f د. ت. م على $[a,b]$

$\exists M>0 : |f'(x)| < M$

4 إذا كانت f دالة ذات مشتقات محدودة على $[a,b]$ ربما باستثناء عدد منتهٍ من النقاط وكان $\int_a^b |f'(x)|dx$ موجوداً أو محدوداً.

فإن f د. ت. م على $[a,b]$ وأن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

التغير الكلي

5 إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ فإن الشرط اللازم والكافي لتكون f د. ت. م على $[a,b]$ هي أن تكتب على شكل فرق دالتين متزايدتين محدودتين على $[a,b]$ أي:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad : \forall x \in [a,b]$$

حيث f_1 و f_2 دالتين متزايدتين ومحدودتين.

6 إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \lim_{\Delta P \to 0} V(f,P)$$

نظيم التجزئة يسعى للصفر

حيث P تجزئة ما لـ $[a,b]$

1 f معرفة على $[a,b]$

f متزايدة على $[a,b]$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

$$P \in \mathbb{P}[a,b]$$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= \cancel{f(x_1)} - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \cdots f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})}$$

$$= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a) \geq 0$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} V(f,P)$$

إذا كانت متزايدة أو متناقصة فهي دالة مطردة

$$= \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \left[{}^{-}f(b) \,{}^{+}_{-}\, f(a) \right]$$

$$= {}^{-}f(b) \,{}^{+}_{-}\, f(a) = |f(b) - f(a)| < \infty$$

أي أن f د. ت. م على $[a,b]$

نتيجة:

إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وأمكن تجزئة المجال $[a,b]$ إلى مجالات جزئية

$$[a, c_1], [c_1, c_2], \dots [c_m, b]$$

بحيث تكون f مطردة على المجالات الجزئية

عندئذ f د. ت. م على $[a,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(c_1) - f(a)| + |f(c_2) - f(c_1)| + \dots + |f(b) - f(c_m)|$$

هذه الدالة لا تشترط أن الدوال متزايدة

$$f \longrightarrow [a,b]$$

$$[a,c], [c,b]$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

$\boxed{2}$ شرط ليبشتز:

إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$

نقول عن f إنها تحقق شرط ليبشتز إذا وجد $L > 0$ بحيث

$$|f(v) - f(u)| \leq L\,|u - v|$$

$$\forall u, v \in [a,b]$$

البرهان :

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b\}$$
$$p \in \mathbb{P}[a,b]$$

$$V(f,p) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

f دالة تحقق شرط ليبشتز

$$\exists L > 0 : V(f,p) \leq \sum_{k=1}^{n} L\,|x_k - x_{k-1}|$$

$$V(f,p) \leq L\,[\,|x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|\,]$$

$$V(f,p) \leq L\,[\,\cancel{x_1} - \underline{x_0} + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cdots + \underline{x_n} - \cancel{x_{n-1}}\,]$$

$$x_0 = a$$
$$x_n = b$$

$$V(f,p) \leq L\,(b-a) < \infty$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{p \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,p) < \infty$$

f د. ت. م على $[a,b]$

نتيجة: $\left\{\begin{array}{l} f \text{ معرفة على } [a,b] \\ \exists M > 0 : |f'(x)| \leq M \\ \forall x \in [a,b] \end{array}\right. \Leftarrow$ f د. ت. م على $[a,b]$

$$[a,b] \; : \exists t \in]a,b[\qquad f'(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نظرية التزايدات المحدودة.

البرهان $a \leq u < v \leq b$

f قابل للاشتقاق على $[a,b]$ فهو قابل للاشتقاق على $[u,v]$ حسب نظرية التزايدات المحدودة

$$\exists t \in]u,v[\; : \; f'(t) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$$

$$f(u)-f(v) = f'(t)\,(u-v)$$

$$|f(u)-f(v)| = |f'(t)| \cdot |u-v|$$

$$\exists M > 0 : |f(u)-f(v)| \leq M|u-v|$$

إذاً f تحقق شرط ليبشتز $\Longleftarrow$ f د.ت.م على $[a,b]$

تمهيد:

f دالة معرفة على $[a,b]$

f د.ت.م على $[a,b]$

نعرف دالة $g(x)$ تسمى دالة التغير للدالة f على الشكل التالي:

$$g(x) = \bigvee_a^x f \; : \; a < x \leq b$$

$$g(a) = 0 \quad : \quad x = a$$

$$\{ x_0 = a < \cdots x_{m-1} < x_m < x \}$$

- g دالة محدودة على $[a,b]$
- g دالة متزايدة على $[a,b]$
- g مستمرة على $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ f مستمرة على $[a,b]$

• $$|g(x)| = \left|\bigvee_a^x f\right| = \bigvee_a^x f \le \bigvee_a^b f < \infty$$

$x \in]a,b]$

$\exists M > 0 : |g(x)| \le M \quad ; \forall x \in [a,b]$

وهـ . م . (الدالة g محدودة على $[a,b]$

• $\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2$ g متزايد.

$\Longrightarrow g(x_1) \le g(x_2)$

$$\underset{\ge 0}{\bigvee_a^{x_2} f} = \underset{\ge 0}{\bigvee_a^{x_1} f} + \underset{\ge 0}{\bigvee_{x_1}^{x_2} f}$$ f د . ت . م

$$\bigvee_{x_1}^{x_2} f = \bigvee_a^{x_2} f - \bigvee_a^{x_1} f \ge 0$$

$$= g(x_2) - g(x_1) \ge 0$$

$\Longrightarrow g(x_2) \ge g(x_1)$ #

إذاً g متزايد.

متزايدة ومحدودة   متزايدة ومحدودة

$\exists\, g(x), h(x)$ $\Longleftarrow$ f د . ت . م

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$h(x) = g(x) - f(x) =$

انتهى