9/5/2016 الاثنين   المحاضرة 12

المدخل إلى نظرية القياس

- مفاهيم نظرية المجموعات.
- مفاهيم نظرية الطبولوجيا
- مفاهيم أساسية في نظرية القياس
  - الحلقة / الحلقة التامة
  - الجبر / الجبر التام
  - الحلقة المولدة لصف T
  - الجبر المولد لصف T
- تعريف القياس / أمثلة عن بعض القياسات.

الجبر:

إذا كانت $X \neq \emptyset$ و $\mathcal{A}$ صف من أجزاء X

نقول عن $\mathcal{A}$ بأنه جبر إذا تحققت الشروط:

1) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A}$

$\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

البرهان:

$X \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{A}, X \setminus A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

ملاحظة:

الجبر مغلق بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات $\setminus, \cup, \cap, \Delta, {}^c$

تعريف مكافئ:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ أو $A \in \mathcal{A}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

الجبر التام: هو جبر مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود

$$\forall A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

ممكن إثبات بسهولة أن الجبر التام مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود

$$\forall A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

2) $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ جبر تام: لأن صف المجموعات منتهي

3) $P(X)$ جبر تام

مجموعة أجزاء X

(الـ X مجموعة منتهية)

$X = \{a, b, c\}$

$P(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$

مثال:

إذا كانت $X = \{a, b, c, d\}$

$\tau = \{\{a,b\}, \{c\}\}$

والمطلوب

1. أوجد أصغر حلقة تحوي τ
2. أوجد أصغر طبولوجيا تحوي τ
3. أوجد أصغر جبر يحوي τ
4. أوجد جبر (غير الجبر السابق) يحوي τ
5. أصغر جبر من أجزاء X
6. أكبر جبر من أجزاء X.

الحل:

1. $\tau_1 = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}$

حلقة لأنها تحقق شروط الحلقة:

① $\emptyset \in \tau_1$

② $\forall A, B \in \tau_1 \Rightarrow A \cup B \in \tau_1$
$A \setminus B \in \tau_1$

U	أصغر حلقة
	وهي الحلقة المولدة من الصف τ

③ $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{c\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{a,b,d\}, \{d\}\}$

أصغر جبر يحوي τ

U^c

② $\tau_3 = [\emptyset, X, \{a,b\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}$

وهي أصغر طبولوجيا تحوي τ

④ $P(X)$ جبر يحوي τ (يحوي τ_2) سيكون يساوي أصغر جبر (τ_2) أو
إذا أوجدنا جبر آخر يحوي τ فبالضرورة سيحوي τ_2 أو أوسع منه
وهنا أوسع منه
فيحويه

⑤ $\{\emptyset, X\}$

⑥ $P(X)$

جبر بوريل:

إذا كان (IR, τ) الفضاء الطبولوجي المألوف:

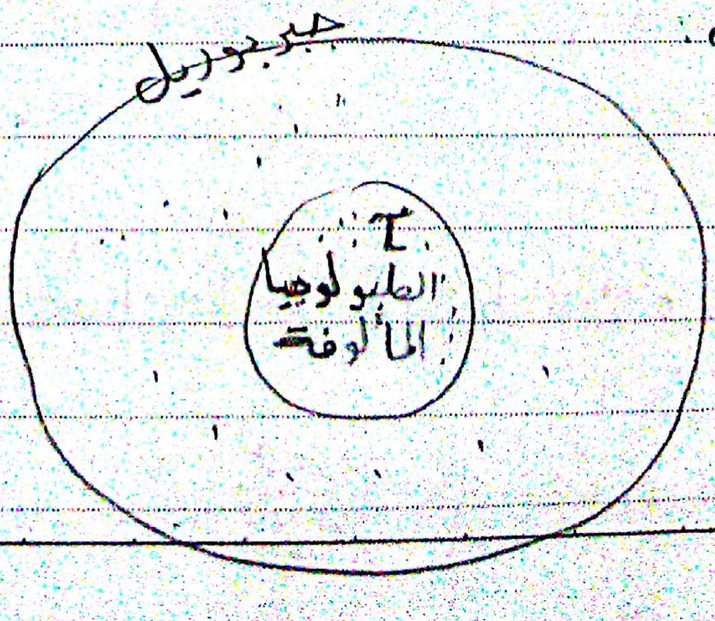
$$\tau = \{A : A \subseteq IR \ : \ \forall x \in A, \exists a,b \in IR \quad x \in]a,b[\subseteq A\}$$

مثال:

$A =]2,3[\cup]4,5[$

كل مفتوحة $\Rightarrow$ بورولية

$\nLeftarrow$



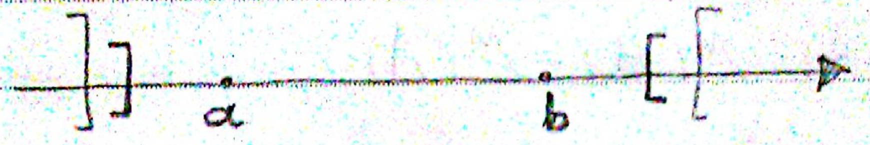
جبر بوريل :

هو الجبر المولّد بالطبولوجيا المألوفة يرمز: $\mathcal{A}(\mathbb{R}) = B(\mathbb{R})$

كل مجموعة من جبر بوريل هي مجموعة بوريلية

أمثلة على استخدام جبر بوريل للانتقال من المجالات المغلقة إلى المفتوحة بأحد الطرائق :

- $[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$ $\quad a \leq b$



- $[a,b[= \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b[$
- $]a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a, b+\frac{1}{n}[$

تعريف القياس :

إذا كانت $X \neq \emptyset$ وكانت $\mathcal{A}$ جبر تام من أجزاء X

نعرف القياس بأنه تابع μ

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$$

يحقق الشرطين :

منطلقه الجبر التام

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A} \quad : A_i \cap A_j = \emptyset$

$i \neq j$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(قياس الأعداد الطبيعية كمجموعة هي صفر)

ملاحظات :

$\boxed{1}$

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

$$\mu(A) = P(A)$$

[2] $\mu(A)<\infty$

القياس المنتهي

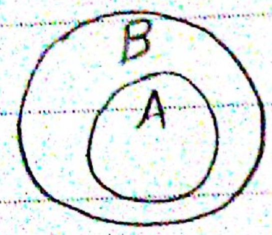
[3] كل مجموعة تنتمي إلى $\mathcal{A}$ تسمى مجموعة قيوسة.

[4] نسمي الثلاثية $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء القياس

خواص القياس: $(X,\mathcal{A},\mu)$

(1) الخاصية الفرقية:

$$A\subseteq B \Rightarrow \mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$$



(2) الخاصية الطردية:

$$A\subseteq B \Rightarrow \mu(A)\leq \mu(B)$$

(3)

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} : A_n\in\mathcal{A} \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

(4) خاصية استمرار الاجتماع:

$$A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots\subseteq A_n\cdots$$

عندئذٍ:

$$\underbrace{\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)}_{\text{قيمة}}=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$ (من قياس إلى نهاية)

(5) خاصية استمرار التقاطع:

$$A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\cdots\supseteq A_n\cdots$$

عندئذٍ:

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

أمثلة على القياس :

1) قياس العد : لتكن $X \neq \emptyset$

$$\mu : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \longrightarrow \mu(A) = \begin{cases} n & A \text{ منتهية} \\ +\infty & A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

حيث n عدد عناصر A : $|A| = n$

$(X, P(X), \mu)$ قياس العد.

2) قياس ديراك : لتكن $X \neq \emptyset$

وليكن $a \in X$

$$\mu : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \{0,1\}$$

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

$(X, P(X), \mu)$ قياس ديراك

3) القياس المعدود ; لتكن $X \neq \emptyset$

$\mathcal{A} = \{ A \in P(X) :$ إما A معدودة أو A^c معدودة $\}$

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \longmapsto \mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ معدودة} \\ 1 & A^c \text{ معدودة} \end{cases}$$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ القياس المعدود

4) قياس لوبيغ : (تعميم لقياس المجالات)

نعرف قياس المجال $[a,b]$ و $]a,b[$ ... $a \leq b$

$$l(]a,b[) = b - a$$

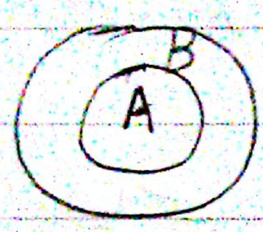
نعرف قياس لوبيغ

$$\mu : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A}(\mathbb{R}) : A_i \cap A_j \neq \emptyset$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$



$B = A \cup (B \setminus A)$ مجموع موجب.

$$\overbrace{\mu(B)}^{\geq 0} = \overbrace{\mu(A)}^{\geq 0} + \overbrace{\mu(B \setminus A)} \rightarrow \geq 0$$

$$A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

انتهى