تعريف(12) (نظيم شعاع):

يُعرّف نظيم شعاع بأنّه التطبيق

$$\|\cdot\| : R^n \to R^+ = [0,+\infty[$$

الّذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|x\| > 0 \quad if \quad x \neq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|c\,x\| = |c|\,\|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

أمثلة على نظائم الأشعة:

1) نظيم القيمة المطلقة أو ℓ_1 :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2) النظيم الإقليدي أو ℓ_2 :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

3) نظيم الـ max أو ℓ_∞

$$\|x\|_\infty = \max_{0 \le i \le n} |x_i|$$

مثال(8):

لا توجد فواصل

بفرض أنه لدينا الشعاع $x = (4,4,-4,4)^T$ أوجد $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$.

الحل:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = 16$$

مربع ومن ثم نجمع ثم نجذر

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} |x_i|^2} = 8$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le 4} \{|x_i|\} = 4$$

تعريف(13) (نظيم مصفوفة):

يُعرّف نظيم مصفوفة بأنه التطبيق:

$$\|\cdot\| : M_{m \times n}(R) \to R^+ = [0, +\infty[$$

الذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|A\| > 0 \quad if \quad A \ne 0$
2. $\|cA\| = |c| \|A\|$
3. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

ملاحظة:

إنّ أي نظيم لمصفوفة يُحقق خاصية التماسك (Consistency property)

$$\|A\cdot B\| \le \|A\|\cdot\|B\| \quad \forall A,B\in M_{n\times n}(R)$$

مصفوفة مربعة

أمثلة على نظائم مصفوفة:

1) النظيم الإقليدي لمصفوفة أو نظيم (Frobenius)

$$F(A)=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

2) النظائم المرتبة جزئياً لمصفوفة (Subordinate norms)

$$\|A\|_1=\max_k\sum_i|a_{ik}|$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\max_i\{|\lambda_i|\}}\quad ;\lambda_i\in\lambda\left(A^T.A\right)$$

$$\|A\|_\infty=\max_i\sum_k|a_{ik}|$$

$\|A\|_1$ للأعمدة

العمود الأول = ٤ أي $|1|+|1|+|-2|=4$

العمود الثاني = ٤

العمود الثالث = ٤

مثال(9): احسب $\|A\|_\infty,\|A\|_2,\|A\|_1$ للمصفوفة

القيمة المطلقة

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow \text{غير متناظرة}$$

$\|A\|_\infty=5$

الحل:

للأعمدة

$$\|A\|_1=\max_j\sum_i|a_{ij}|=\max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{4,4,4\}=4$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\max_i\{|\lambda_i|\}}\quad ;\lambda_i\in\lambda\left(A^T.A\right)$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&2&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

تحويل كل عمود إلى سطر

$$\det\left(AA^T - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.0616 \\ \lambda_2 = 5.0256 \\ \lambda_3 = 12.9128 \end{cases}$$

ومنه:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \{|\lambda_i|\}} = \sqrt{12.9128} \approx 3.5934$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{3,5,4\} = 5$$

مبرهنة(5):

بفرض A مصفوفة مربعة عندئذٍ $\rho(A) \le \|A\|$ حيثُ $\|.\|$ نظيم مرتب جزئياً لمصفوفة A، أي لا يوجد قيمة ذاتية لمصفوفة مربعة تتجاوز نظيم المصفوفة.

مبرهنة(6):

بفرض A مصفوفة مربعة عندئذٍ $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ إذا كان $\|A\| < 1$ أو إذا وفقط إذا $\rho(A) \le 1$.

تعريف(14)العدد الشرطي لمصفوفة (Condition number of matrix):

بعضِ جمل المعادلات الخطية حساسة جداً لأخطاء التدوير أي إنّه يمكن أن نحصل على حلول مختلفة تماماً عند تدوير بعض عناصر الجملة، ندعو الجملة في مثل هذه الحالة بالجملة المريضة (ill-condition system) ولمعرفة فيما إذا كانت جملة ما مريضة أم لا فإننا نعتمد على ما يُسمى بالعدد الشرطي لمصفوفة الأمثال.

ونعرف هذا العدد كما يلي:

بفرض A مصفوفة مربعة وقابلة للقلب $(\det(A) \neq 0)$ عندئذٍ يُعرّف **العدد الشرطي** لهذه المصفوفة على أنّه

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

حيثُ $\|\|$ نظيم مرتب جزئياً للمصفوفة A.

طرائق حل جملة المعادلات الخطية

الطرائق المباشرة

- طرائق غاوس
  - طرائق غاوس وغاوس جوردان
  - تقنية المرتكز الجزئي
- طرائق LU

لنرى ما هي طرائق LU

1- نكتب جملة المعادلات بالشكل المصفوفة

أي $A \cdot X = b$

2- نفرض $A = L \cdot U$

3- نعوض في (1) ومنه $LUX = B$

4- نفرض $UX = Y$ ثم نعوضها في (3)

5- $L\overset{\text{مجهولة}}{Y} = \overset{\text{معلومة}}{B}$ ← معلومة

6- نعوض Y في (4)

طرائق LU: كراوت - دولتيل - تشوليسكي

كراوت لا الشكل

(Lower)
$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{12} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

(upper)
$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

دولتيل لا الشكل

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{21} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

تشوليسكي بالشكل

حيث تكون $U = L^T$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

مثال(16):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية:

$$x + y + z = 1$$
$$4x + 3y - z = 6$$
$$3x + 5y + 3z = 4$$

وفق طريقة كراوت بدقة ثلاث منازل عشرية.

الحل:

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{11} = a_{11} = 1 , \ell_{21} = a_{21} = 4 , \ell_{31} = a_{31} = 3$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 1 , u_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1$$

وعليه نجد

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \ell_{22} & 0 \\ 3 & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{22} = a_{22} - \ell_{21} u_{12} = -1$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - \ell_{21} u_{12}}{\ell_{22}} = 5$$

وعليه

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&\ell_{32}&\ell_{33}\end{pmatrix}\ ,\ U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&3&-1\\3&5&3\end{pmatrix}$$

$$\ell_{32}=2\ ,\ \ell_{33}=2$$

وعليه

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&\underset{-10}{2}\end{pmatrix}\ ,\ U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&3&-1\\3&5&3\end{pmatrix}$$

وبذلك نحصل على الجملة

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&2\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}UX=Z\\LZ=b\end{cases}$$

$$LZ=b\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}_{Z}=\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}$$

ومنهُ

$$x'=1$$
$$4x'-y'=6$$
$$3x'+2y'-10z'=4$$

وبحل هذه الجملة نجد أنّ

$$x' = 1$$
$$y' = -2$$
$$z' = -0.5$$

وعليه

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -0.5 \end{pmatrix}^T$$

لنحل الآن الجملة

$$UX = Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$x + y + z = 1$$
$$y + 5z = -2$$
$$z = -0.5$$

وبحل هذه الجملة نجد أنّ

$$x = 1$$
$$y = 0.5$$
$$z = -0.5$$

وعليه

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T$$

وهو المطلوب.

مثال(17):

بفرض أنّه لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

والمطلوب:

1) فرق هذه المصفوفة وفق دوليتل.

2) استفد من الطلب السابق في حل جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيث

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

الحل:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \;,\; U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \;,\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11} = 1, u_{12} = a_{12} = 1, u_{13} = a_{13} = -1$$

$$\ell_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 1, \ell_{12} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = -2$$

وعليه نجد

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \;,\; U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \;,\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = a_{22} - \ell_{21}u_{21} = 1$$

$$u_{23} = a_{23} - \ell_{21}u_{12} = -1$$

ومنهُ:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \;,\; U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \;,\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{31}u_{12}}{u_{22}} = 3 \quad , \quad u_{33} = a_{33} - \ell_{31}u_{12} - \ell_{32}u_{23} = 2$$

وعليه

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \;,\; U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;,\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وبذلك نحصل على الجملة

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} UX = Z \\ LZ = b \end{cases}$$

$$LZ = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{Z}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وحسب طريقة التعويضات المتقدمة نجد أنّ:

$$x' = 1$$

$$y' = 0$$

$$z' = 3$$

وعليه

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T$$

لنحل الآن الجملة

$$UX = Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \overset{1}{\cancel{0}} & \overset{-1}{\cancel{0}} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

وبتطبيق طريقة التعويضات التراجعية نجد أنّ

$$x = 1$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{3}{2}$$

وعليه

مثال(18):

حل جملة المعادلات الخطية الآتية وفق طريقة تشوليسكي:

$$4x + 2y + 14z = 14$$

$$2x + 17y - 5z = -101$$

$$14x - 5y + 83z = 155$$

الحل:

$$A:\begin{pmatrix}4 & 2 & 14\\ 2 & 17 & -5\\ 14 & -5 & 83\end{pmatrix}$$

نكتب المصفوفة A (مصفوفة الأمثال) وفق طريقة تشولسكي:

$$A = LU = LL^T$$

$$= \begin{pmatrix}\ell_{11} & 0 & 0\\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0\\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31}\\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32}\\ 0 & 0 & \ell_{33}\end{pmatrix}$$

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2 \,,\, \ell_{21} = \frac{a_{21}}{\ell_{11}} = 1 \,,\, \ell_{31} = \frac{a_{31}}{\ell_{11}} = 7$$

$$\ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = 4$$

$$\ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{31}\ell_{21}}{\ell_{22}} = -3$$

$$\ell_{33} = \sqrt{a_{33} - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2} = 5$$

وبذلك تصبح جملة المعادلات بالشكل

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 7 & -3 & 5\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix}14\\ -101\\ 155\end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}UX = Z\\ LZ = b\end{cases}$$

$$LZ = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 7 & -3 & 5\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}}_{Z} = \begin{pmatrix}14\\ -101\\ 155\end{pmatrix}$$

ومنه

$$Z = (7 \quad -27 \quad 5)^T$$

لنحل الآن الجملة

$$UX = Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}^T$$

وهو المطلوب.