المجموع :

تعريف: لتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{J}$.

وليكن $A\in ob(\mathcal{J})$ و $(u_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{J}$

نقول أن الثنائية $(A, (u_i)_{i\in I})$ تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd} B & A \arrow[l, "\alpha"'] \\ & A_i \arrow[u, "u_i"'] \arrow[ul, "v_i"] \end{tikzcd}$$

إذا تحقق:

لأجل كل $B\in ob(\mathcal{J})$ ولأجل كل أسرة $(v_i : A_i \longrightarrow B)_{i\in I}$

يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : A \longrightarrow B$

لأجله: $\alpha . u_i = v_i \quad \forall i\in I$

$$(\alpha.u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

نسمي المورفيزمات u_i مورفيزمات الاحتواء .

مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{J}$.

الشروط الآتية متكافئة:

1. الثنائية $(A, (u_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I})$ تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

2. التطبيق $\Gamma : \mathcal{J}(A,X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{J}(A_i, X)$

$$\begin{tikzcd} X & A \arrow[l, "f"'] \\ & A_i \arrow[u, "u_i"'] \arrow[ul, "f.u_i"] \end{tikzcd}$$

المعرف بالشكل: $\Gamma(f) = (f.u_i)_{i\in I}$

متباين وغامر .

البرهان:

$(1 \Rightarrow 2)$ واضح أن Γ تطبيق .

لنعرف علاقة أخرى $\Gamma^{-1} : \prod_{i\in I}\mathcal{J}(A_i,X) \longrightarrow \mathcal{J}(A,X)$

بحيث: $\Gamma^{-1}((v_i)_{i\in I}) = \alpha$

α مورفيزم يجعل المخطط تبديلي

$$\begin{tikzcd} X & A \arrow[l, "\alpha"'] \\ & A_i \arrow[u, "u_i"'] \arrow[ul, "v_i"] \end{tikzcd}$$

حيث $\alpha.u_i = v_i \quad \forall i\in I$

إن Γ^{-1} تطبيق .

$$\Gamma.\Gamma^{-1}((v_i)_{i\in I}) = \Gamma(\alpha) = (\alpha.u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

$$\Gamma\Gamma^{-1} = I_{\prod \mathcal{J}(A_i,X)}$$

ليكن $g\in\mathcal{J}(A,X)$:

$$\begin{tikzcd} X & A \arrow[l, "g"'] \\ & A_i \arrow[u, "u_i"'] \arrow[ul, "g.u_i"] \end{tikzcd}$$

$$\Gamma^{-1}\Gamma(g) = \Gamma^{-1}((g.u_i)_{i\in I}) = g$$

$$\Gamma^{-1}\Gamma = I_{\mathcal{J}(A,X)}$$

ومنه Γ متباين وغامر .

Scanned by CamScanner

2) ← 1) ليكن $B\in ob(\mathcal{F})$ و $(v_i : A_i \longrightarrow B)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{F}$

$$\Gamma: \mathcal{F}(A,X) \longrightarrow \prod \mathcal{F}(A_i,X)$$

لدينا Γ متباين وغامر، ومن أجل $X = B$ نجد أن:

$$(v_i)_{i\in I} \in \prod \mathcal{F}(A_i,B)$$

ومنه يوجد $\alpha \in \mathcal{F}(A,B)$ بحيث: $\Gamma(\alpha) = (v_i)_{i\in I}$

وأيضاً لدينا: $\Gamma(\alpha) = (\alpha . u_i)_{i\in I}$

$$\Rightarrow (\alpha . u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

* يبقى علينا اثبات الوحدانية. ((وحدانية المورفيزم α)).

ليكن $\beta \in \mathcal{F}(A,B)$ بحيث: $(\beta . u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

وحسب تعريف Γ نجد أن:

$$\Gamma(\beta) = (\beta . u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I} = \Gamma(\alpha)$$

ومنه فإن $\alpha = \beta$.

ومنه فإن α مورفيزم وحيد.

مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{F}$.

إذا كان كل من:

$$(A, (u_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I})$$
$$(B, (v_i : A_i \longrightarrow B)_{i\in I})$$

مجموعين للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم $\alpha : A \longrightarrow B$.

البرهان:

بفرض أن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

عندئذٍ لأجل أسرة المورفيزمات $(v_i)_{i\in I}$ يوجد $\alpha : A \longrightarrow B$

بحيث: $(\alpha . u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

بفرض أن الثنائية $(B, (v_i)_{i\in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

عندئذٍ لأجل أسرة المورفيزمات $(u_i)_{i\in I}$

يوجد مورفيزم $\beta : B \longrightarrow A$ بحيث:

$$(\beta . v_i)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "\beta"'] \\ & A_i \arrow[ul, "u_i"] \arrow[u, "v_i"'] \end{tikzcd}$$

يكون α ايزومورفيزم إذا تحقق: $\alpha . \beta = I_B$

$\beta . \alpha = I_A$

لما كان A مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ يوجد تطبيق متباين وعامر

$\forall X \in ob(\mathcal{f})$ $\quad \Gamma : \mathcal{f}(A,X) \longrightarrow \prod \mathcal{f}(A_i,X)$

$\Gamma(f) = (f.u_i)_{i\in I}$

لأجل $X=A$ نجد أن: $I_A \in \mathcal{f}(A,A)$

$$\Gamma(I_A) = (I_A . u_i)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I} = (\beta . v_i)_{i\in I}$$
$$= (\beta . (\alpha . u_i))_{i\in I}$$
$$= ((\beta . \alpha) . u_i)_{i\in I}$$
$$= \Gamma(\beta . \alpha)$$

بما أن Γ متباين $\Leftarrow$ $\boxed{\beta . \alpha = I_A}$

لما كان B مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

يوجد تطبيق متباين وعامر $\forall X \in ob(\mathcal{f})$

$\Gamma : \mathcal{f}(B,X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{f}(A_i,X)$

$\Gamma(f) = (f.v_i)_{i\in I}$

لأجل $X=B$ نجد أن:

$I_B \in \mathcal{f}(B,B)$

$$\Gamma(I_B) = (I_B . v_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I} = (\alpha . u_i)_{i\in I}$$
$$= (\alpha . (\beta . v_i))_{i\in I}$$
$$= ((\alpha . \beta) . v_i)_{i\in I}$$
$$= \Gamma(\alpha . \beta)$$

Γ متباين $\Leftarrow$ $\boxed{\alpha . \beta = I_B}$

ومنه يكون α ايزومورفيزم. (ممكن أن يكون α أو β ايزومورفيزم حسب الطلب)

مبرهنة: لتكن $\mathcal{f}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{f}$.

إذا كانت الثنائية $(A, (\tau_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

عندئذ:

1- لأجل كل $i \in I$ يوجد مورفيزم $v_i : A \longrightarrow A_i$

لأجله: $v_i . \tau_i = I_{A_i}$

2- لأجل كل $i \in I$ المورفيزم τ_i مونومورفيزم.

(نميز رمز المجموع و Π_i رمز الجداء)

البرهان :

1. لما كانت الثنائية $(A,(\tau_i)_{i\in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

فإنه يوجد تطبيق : $\Gamma : \mathcal{f}(A,X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{f}(A_i,X)$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha . \tau_i)_{i\in I}$$

متباين وغامر .

أيضاً يوجد تطبيق غامر : $\Gamma_j : \prod \mathcal{f}(A_i,X) \longrightarrow \Gamma(A_j,X)$

ومنه نحصل على تطبيق :

$$\Gamma_j \Gamma : \mathcal{f}(A,X) \longrightarrow \Gamma(A_j,X)$$

غامر .

المطلوب إيجاد المورفيزم $\nu_i : A \longrightarrow A_i$

ولأجل $X = A_j$ نجد أن $I_{A_j} \in \mathcal{f}(A_j,A_j)$ ومنه يوجد :

$$\nu_j \in \mathcal{f}(A,A_j)$$

بحيث : $\Gamma_j \Gamma(\nu_j) = I_{A_j}$

$$\Gamma_j((\nu_j . \tau_i)_{i\in I}) = \nu_j . \tau_j = I_{A_j}$$ ν_j ثابت ليس له علاقة بـ $i\in I$

$\forall j \in I$

2. لدينا : $\tau_i : A_i \longrightarrow A$

لنأخذ التطبيق : $f : \mathcal{f}(X,A_i) \longrightarrow \mathcal{f}(X,A)$

$$f(\nu) = \tau_i . \nu$$

ليكن $\lambda, \mu \in \mathcal{f}(X,A_i)$ بحيث :

$$f(\lambda) = f(\mu)$$

$$\tau_i . \lambda = \tau_i . \mu \leftarrow \text{حسب تعريف } f$$

ومنه :

$$(\nu_i . \tau_i) . \lambda = (\nu_i . \tau_i) . \mu$$

$$\lambda = \mu$$

وبالتالي التطبيق f متباين .

ومنه فإن المورفيزم τ_i هو مونومورفيزم .

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "u"'] & A \arrow[r, "u_1"'] \arrow[d, "u_2"] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

النواة:

تعريف: لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$
مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$.

نقول أن الثنائية $(N, f: N \to A)$ هي نواة
للمورفيزمين u_1, u_2 إذا حققت:

1- أيا كان $X \in ob(\mathcal{C})$ ولأجل كل مورفيزم $u: X \to A$ يحقق:

$$u_1 . u = u_2 . u$$

يوجد مورفيزم وحيد $g: X \to N$

لأجله $f.g = u$

2- ليكن $u: X \to A$ مورفيزم

لأجل كل مورفيزم $g: X \to N$ يحقق:

$$f.g = u$$

فإن $u_1 . u = u_2 . u$.

انتهت المحاضرة العاشرة

هبة.