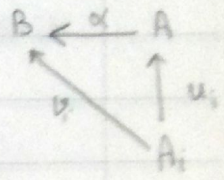


المجموع :

تعريف: لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{F} وليكن $A \in \text{ob}(\mathcal{F})$ و $(u_i : A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة \mathcal{F} نقول أن الثنائية $(A, (u_i)_{i \in I})$ تشكل مجموعاً للأشياء $(A_i)_{i \in I}$ إذا تحققت:



لنظ كل $B \in \text{ob}(\mathcal{F})$ ولاصل كل أسرة $(v_i : A_i \rightarrow B)_{i \in I}$

يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : A \rightarrow B$

لأنه: $\alpha \cdot u_i = v_i \quad \forall i \in I$

$(\alpha \cdot u_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$

مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{F}

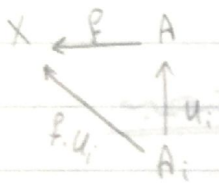
الشروط الآتية متكافئة:

1- الثنائية $(A, (u_i : A_i \rightarrow A)_{i \in I})$ تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

2- التطبيق $\Gamma : \mathcal{F}(A, X) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(A_i, X)$

المعرف بالشكل: $\Gamma(f) = (f \cdot u_i)_{i \in I}$

متباين وغامر



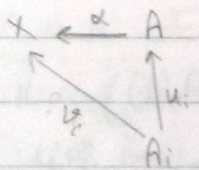
البرهان:

(1) \leftarrow 2) واضح أن Γ تطبيق

لنعرف علاقة أفضى $\Gamma^{-1} : \prod_{i \in I} \mathcal{F}(A_i, X) \rightarrow \mathcal{F}(A, X)$

حيث: $\Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I}) = \alpha$

α مورفيزم يجعل المخطط تبديلياً



حيث $\alpha \cdot u_i = v_i \quad \forall i \in I$

إن Γ^{-1} تطبيق

$\Gamma \cdot \Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I}) = \Gamma(\alpha) = (\alpha \cdot u_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$

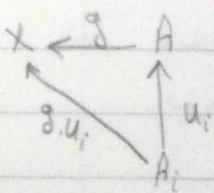
$\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} \mathcal{F}(A_i, X)}$

ليكن $g \in \mathcal{F}(A, X)$

$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma(g) = \Gamma^{-1}((g \cdot u_i)_{i \in I}) = g$

$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{\mathcal{F}(A, X)}$

ومنه Γ متباين وغامر



(2 ← 1) ليكن $B \in \text{ob}(f)$ و $(V_i: A_i \rightarrow B)_{i \in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة f
 $\Gamma: f(A, X) \rightarrow \prod f(A_i, X)$

لدينا Γ متباين وغامر، ومن أجل $X = B$ نجد أن:

$$(V_i)_{i \in I} \in \prod f(A_i, B)$$

ومنه يوجد $\alpha \in f(A, B)$ بحيث:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha \cdot U_i)_{i \in I}$$

$$\Rightarrow (V_i)_{i \in I} = (\alpha \cdot U_i)_{i \in I}$$

بقية علينا اثبات الوحدانية. ((وحدانية المورفيزم α)).

ليكن $\beta \in f(A, B)$ بحيث:

$$(B \cdot U_i)_{i \in I} = (V_i)_{i \in I}$$

وصح تعريف Γ نجد أن:

$$\Gamma(\beta) = (B \cdot U_i)_{i \in I} = (V_i)_{i \in I} = \Gamma(\alpha)$$

ومنه فإن $\alpha = \beta$

ومنه فإن α مورفيزم ووحيد.

مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة f

إذا كان كل من:

$$(A, (U_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I})$$

$$(B, (V_i: A_i \rightarrow B)_{i \in I})$$

مجموعتين للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

$$\alpha: A \rightarrow B$$

عندئذ يوجد إيزومورفيزم

البرهان:

يفرض أن الفاشية $(A, (U_i)_{i \in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

عندئذ لأجل أسرة المورفيزمات $(V_i)_{i \in I}$ يوجد $\alpha: A \rightarrow B$

$$(\alpha \cdot U_i)_{i \in I} = (V_i)_{i \in I}$$

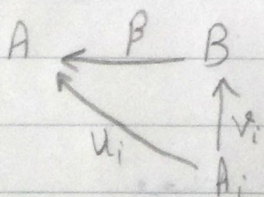
بحيث:

يفرض أن الفاشية $(B, (V_i)_{i \in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

عندئذ لأجل أسرة المورفيزمات $(U_i)_{i \in I}$

يوجد مورفيزم $\beta: B \rightarrow A$ بحيث:

$$(B \cdot V_i)_{i \in I} = (U_i)_{i \in I}$$



يكون α ايزومورفيزم إذا تحققت:
 $\alpha \cdot \beta = I_B$
 $\beta \cdot \alpha = I_A$

لما كان A مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ يوجد تطبيق متباين وعاصر
 $\Gamma: f(A, X) \rightarrow \prod_{i \in I} f(A_i, X) \quad \forall X \in \text{ob}(f)$
 $\Gamma(P) = (P \cdot u_i)_{i \in I}$

لاحظ $X=A$ نجد أن: $I_A \in f(A, A)$
 $\Gamma(I_A) = (I_A \cdot u_i)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I} = (\beta \cdot v_i)_{i \in I}$
 $= (\beta \cdot (\alpha \cdot u_i))_{i \in I}$
 $= ((\beta \cdot \alpha) \cdot u_i)_{i \in I}$
 $= \Gamma(\beta \cdot \alpha)$

بما أن Γ متباين \Leftarrow
 $\beta \cdot \alpha = I_A$

لما كان B مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ يوجد تطبيق متباين وعاصر
 $\Gamma: f(B, X) \rightarrow \prod_{i \in I} f(A_i, X) \quad \forall X \in \text{ob}(f)$
 $\Gamma(P) = (P \cdot v_i)_{i \in I}$

لاحظ $X=B$ نجد أن: $I_B \in f(B, B)$

$\Gamma(I_B) = (I_B \cdot v_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I} = (\alpha \cdot u_i)_{i \in I}$
 $= (\alpha \cdot (\beta \cdot v_i))_{i \in I}$
 $= ((\alpha \cdot \beta) \cdot v_i)_{i \in I}$
 $= \Gamma(\alpha \cdot \beta)$

بما أن Γ متباين \Leftarrow
 $\alpha \cdot \beta = I_B$

ومنه يكون α ايزومورفيزم .

مبرهنة لتكن f فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة f .

إذا كانت القائمية $(A, (\chi_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

عندئذ:

1- لأجل كل $i \in I$ يوجد مورفيزم $v_i: A \rightarrow A_i$

لأجله: $v_i \cdot \chi_i = I_{A_i}$

2- لأجل كل $i \in I$ المورفيزم χ_i مورفيزم

χ_i رمز المجموع و \prod_i رمز الجداء

البرهان:

1. لما كانت التناظير (A, γ_i) مجموعاً للأشياء $(A_i)_{i \in I}$ فإنه يوجد تطبيق $\Gamma: \prod_{i \in I} f(A_i, x) \rightarrow f(A, x)$
 $\Gamma(\alpha) = (\alpha, \gamma_i)_{i \in I}$

متباينة وغامر. أيضاً يوجد تطبيق غامر $\Gamma_j: \prod_{i \in I} f(A_i, x) \rightarrow f(A_j, x)$

ومنه حصل على تطبيق $\Gamma_j \Gamma: f(A, x) \rightarrow f(A_j, x)$

غامر

المطلوب إيجاد المورفيزم $v_j: A \rightarrow A_j$

ولذلك $x = A_j$ نجد أن $I_{A_j} \in f(A_j, A_j)$ ومنه يوجد:

$$v_j \in f(A, A_j)$$

$$\Gamma_j \Gamma(v_j) = I_{A_j} \quad \text{حيث:}$$

$$\Gamma_j \Gamma((v_j, \gamma_i)_{i \in I}) = v_j \cdot \gamma_j = I_{A_j} \quad \text{حيث ثابت ليس له علاقة بـ } i$$

$$\gamma_i: A_i \rightarrow A$$

2. لدينا: لتأخذ التطبيق $F: f(x, A_i) \rightarrow f(x, A)$

$$F(v) = \gamma_i \cdot v$$

ليكن $\lambda, \mu \in f(x, A_i)$ حيث:

$$F(\lambda) = F(\mu)$$

$$\gamma_i \cdot \lambda = \gamma_i \cdot \mu$$

$$(v_i, \gamma_i) \cdot \lambda = (v_i, \gamma_i) \cdot \mu$$

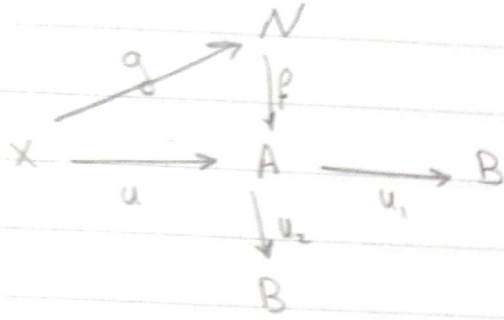
$$\lambda = \mu$$

وبالتالي التطبيق F متباين

ومنه فإن المورفيزم γ هو مورفيزم



النواة:



تعريف: لتكن f فئة و $u_1, u_2: A \rightarrow B$ مورفزمين للفئة f .

نقول أن الثنائية $(N, f: N \rightarrow A)$ هي نواة للمورفزمين u_1, u_2 إذا حققت:

1. أيًا كان $x \in \text{ob}(f)$ ولأي كل مورفزم $u: X \rightarrow A$ يحقق:

$$u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$$

يوجد مورفزم وصيد $g: X \rightarrow N$

$$f \cdot g = u$$

2. ليكن $u: X \rightarrow A$ مورفزم

لأي كل مورفزم $g: X \rightarrow N$ يحقق:

$$f \cdot g = u$$

$$u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$$

فإن

انتهت المحاضرة العاشرة
حسب