①

المحاضرة الأولى

7/3/2016 الاثنين

مقدمة في تحليل 5

① تعريف الدالة

مراجعتم من تحليل ①

② الدالة المطردة.

③ الدالة المحدودة

④ نهاية دالة عند نقطة

⑤ استمرار دالة عند نقطة

⑥ نقاط الانقطاع

⑦ القفزة عند نقطة

⑧ الاشتقاق ⑨ تمارين

تحليل 5

الفصل الأول: الدوال ذات التغير المحدود

الثاني: تكامل استيلجس

الثالث: مقدمة في نظرية القياس

الرابع: تكامل لوبيغ

المحاضرة الثانية : الاثنين 14/3/2016

الدوال ذات التغير المحدود.

تمهيد

تعريف الدالة ذات التغير المحدود.

خواص الدوال 〃 〃 〃

معايير 〃 〃 〃 〃

تطبيقات 〃 〃 〃 〃

تمهيد :

- لتكن لدينا الدالة f المعرفة على المجال $[a,b]$

نسمي كل مجموعة $P[a,b]$ لها الشكل

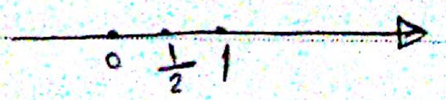
$$P[a,b] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$$

تجزئة للمجال $[a,b]$

$a < b$

مثال : $I = [0,1]$

$P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$



$[0, \frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}, 1[\cup [1,1]$ $\qquad P_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$

تجزئة ثانية $P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

يمكن تجزئة المجال بعدد لانهائي من التجزئات

نسمي : $\mathbb{P}[a,b]$ أسرة جميع التجزيئات للمجال $[a,b]$

$$p \in \mathbb{P}[a,b]$$

ملاحظات :

- p تجزئة أدق من التجزئة p' إذا كان $p' \subset p$ (أكثف - أخشن)
- نظيم التجزئة :

$$\lambda p = \Delta p = \max_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$$

$\Delta p_1 = \frac{1}{2}$ ، $\Delta p_2 = \frac{1}{4}$ ، $\Delta p_3 = \frac{1}{2}$

$\Delta p \leq \Delta p'$ $\Leftarrow$ $p' \subset p$ -

تعريف الدالة ذات التغير المحدود :

إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$

و لتكن P تجزئة للمجال $[a,b]$

و لنأخذ المجموع :

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P)$$

في الدالة الثابتة يكون $0 = \overset{b}{\underset{a}{V}} f$

إذا كان $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$ (محدود)

عندئذٍ نقول إن f د. ت. م على $[a,b]$

و إلا f دالة ليست ذات تغير محدود أي: $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = +\infty$

نسمي $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$ التغير الكلي للدالة f.

ملاحظة :

إذا كانت f دالة ثابتة $f(x) = c$

$[\forall x, y \in [a,b] \Rightarrow f(x) = f(y)]$

فإن $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = 0$ (التغير الكلي)

مثال (1) :

إذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + 1$ معرفة على $[1,5]$

أوجد التغير الكلي لهذه الدالة على ذلك المجال

وهل الدالة f د. ذ. ت. م. ؟

مثال (2):

إذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[0,1]$ كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & x \in]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- بين أن الدالة f مستمرة على المجال $[0,1]$

2- بين أن الدالة f محدودة

3- بين أن الدالة f ليست ذات تغير محدود

مثال (3)

أوجد التغير الكلي للدالة f المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 5 & : x = 1 \end{cases}$$

الحل:

$\boxed{1}$

$$\overset{5}{\underset{1}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[1,5]} V(f,P)$$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$P = \{x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 5\}$$

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})|$$

$$+ |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$V(f,P) = |x_1^2+1-2| + |x_2^2+1-x_1^2-1| + \cdots$$

$$+ |x_{n-1}^2+1-x_{n-2}^2-1| +$$

فكينا القيمة المطلقة حسب التجزئة التي لدينا $+ |26 - x_{n-1}^2 - 1|$

$$V(f,P) = \cancel{x_1^2}-1 + \cancel{x_2^2}-\cancel{x_1^2}+\cdots+\cancel{x_{n-1}^2}-\cancel{x_{n-2}^2}+25-\cancel{x_{n-1}^2}$$

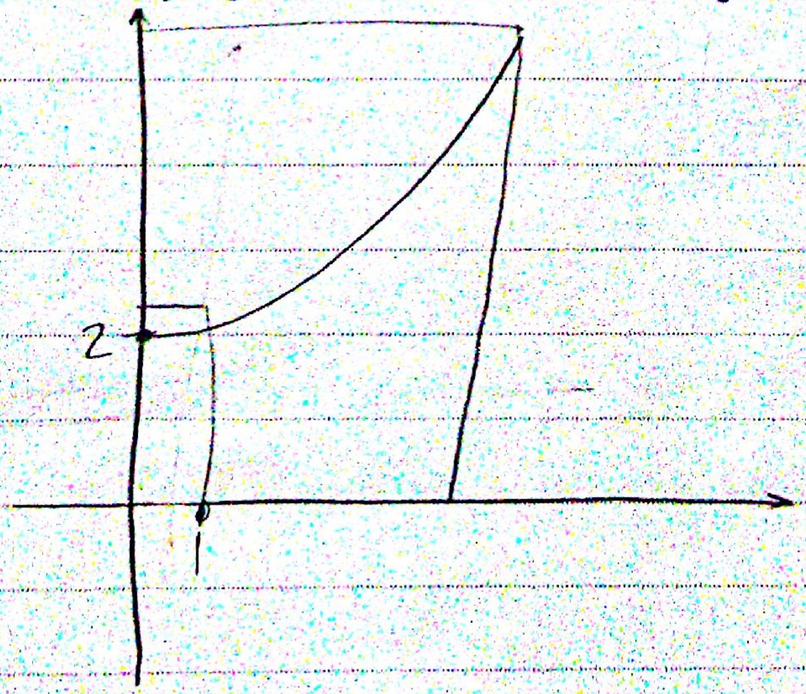
$V(f,P) = 24 \Rightarrow$ الدالة ذات تغير ثابت $< \infty$

فكرة المثال 3 : الدالة ليست ذات تغير محدود

هنا يكفي لي أن أختار تجزئة من أجلها أحصل على ∞ = $V(f,P)$

$$\overset{5}{\underset{1}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[1,5]} (24) = 24 < \infty$$

إذاً f د.ت.م على $[1,5]$



$\boxed{2}$

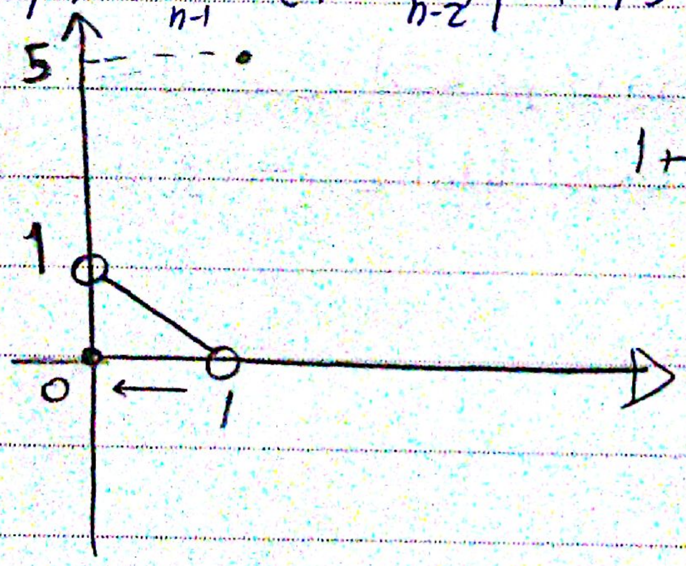
$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[0,1]} V(f,P)$$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots\ x_{n-1} < x_n = 1\}$$

$$V(f,P) = |1 - x_1 - 0| + |1 - x_2 - (1 - x_1)| + |1 - x_3 - (1 - x_2)| + \cdots$$

$$\cdots + |1 - x_{n-1} - (1 - x_{n-2})| + |5 - (1 - x_{n-1})|$$



$1 + 1 + 5 = 7$ التغير الكلي

هو كيف التابع يتحرك

يطلع - ينزل - يقفز

انتهى