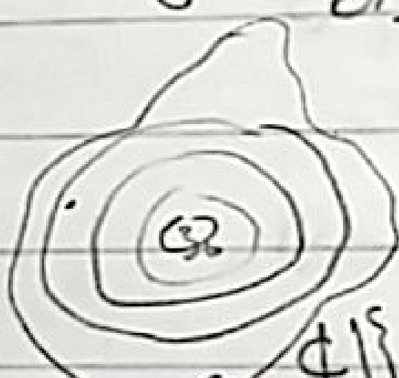
مبرهنة تايلور: f تحليلي على $D(z_0,R)$ فإن f قابل للنشر وفق تايلور في $D(z_0,R)$ أي أن:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z\in D(z_0,R)$$

وحيث $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ، $0!=1,\ f^{(0)}=f$

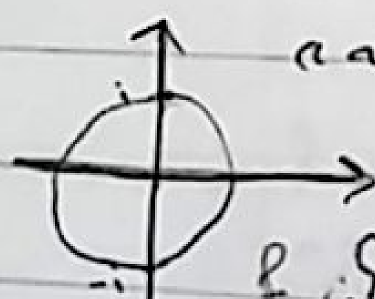
نتائج: (1) إن نصف قطر تقارب $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ أكبر أو يساوي R.

وإذا كان f تحليلية على مجموعة G وكانت z_0 نقطة من G فإن f قابل للنشر وفق تايلور في أوسع قرص مركزه z_0 ومحتوى في G.



تمرين: $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$

إذن f قابل للنشر وفق ماكلوران (تايلور في جوار صفر) في أوسع قرص مركزه 0 ومحتوى في $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ وهو $D(0,1)$ «القرص مفتوح محيطه ليس منه»



ولا يوجد قرص أوسع منه لأنه بتكبير القرص بمقدار $\varepsilon>0$ فإن i و $-i$ يحتويهما لكن f غير تحليلي عند $\{\pm i\}$.

تحليلي على مجموعة وتحليلي على كل نقطة من مجموعة وأي تابع تحليلي على أي نقطة z_0 قابل للاشتقاق وتحليلي في جوار z_0. كل الأقراص مشتركة بالمركز وبالتالي a_n لا تتغير بتغير قرص التقارب.

2) إذا كان f تحليلياً عند z_0 فإن f قابل للنشر وفق تايلور بجوار لـ z_0 في أوسع قرص محتوى في مجموعة تحليلية f والذي مركزه (z_0).

حسب المثال السابق. هل تابع قابل للنشر عند $z=2$ وفق تايلور
f تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ وأوسع قرص يكون
تابع قابل للنشر فيه هو $D(2,\sqrt{5})$

بعد 2 عن i أو $-i$.

(مفتوحة ومترابطة)

3) إذا كان f تحليلياً على منطقة G فإن f قابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات على G

تابع تحليلي قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة يكون قابل للاشتقاق عدد غير منته من المرات

الإثبات:

لنأخذ $z_0 \in G$ ولدينا فرضاً f تحليلي على G حسب نتيجة
f قابل للنشر في جوار لـ z_0.

$$\Leftarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\forall z \in D(z_0,R) : R>0 \text{ ذلك}$$

$\Leftarrow$ f هو مقصور التابع المحمل لمتسلسلة القوى.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

وحسب مبرهنة يكون قابلة للاشتقاق عدد غير منته من المرات على قرص تقاربها وبشكل خاص يكون قابل للاشتقاق عند مركز القرص.

[illegible] قرص تقارب متسلسلة وهذا القرص سيكون $D(z_0,R)$

ولدينا من كيفية وعليه فإن التابع الممثل بمتسلسلة قوى قابل للاشتقاق كل كامل في G.

4) خلال إثبات مبرهنة تايلور وجدنا $a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \quad ★$$

حيث $z_0 \in D(z_0,R)$ ، f تحليلي على $D(z_0,R)$ ،

$r < R$

صيغة كوشي المبسطة

$$\boxed{\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(x)}{(z-z_0)}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \text{حيث } n \geq 0}$$

[illegible]

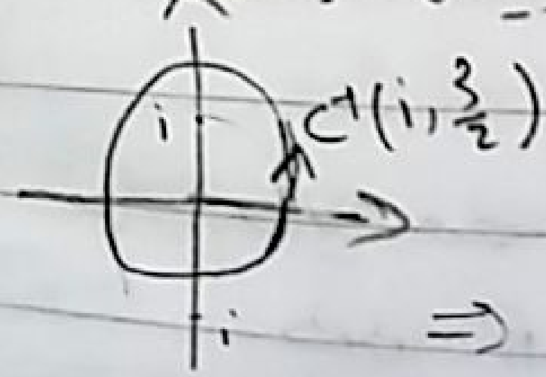
تمرين: احسب التكامل $\int_{C^+(i,\frac{3}{2})} \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}\, dz$

لنستطيع تطبيق النتيجة ★ وعليه فإن:

$$\int_{C^+(i,\frac{3}{2})} \frac{\frac{\sin z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z+i)^2}, \quad n=1$$

ولدينا f تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$



$\Leftarrow$ f تحليلي على:

$$\overline{D}(i,\tfrac{3}{2}) \subseteq D(i,2)$$

$$\Rightarrow \int_{C^+(i,\frac{3}{2})} \frac{\sin z}{(z^2+1)}\, dz = 2\pi i \cdot f'(i)$$

$C^+(i, \frac{3}{2})$ تحليلي على محيط وداخل

$$\Rightarrow \quad = 2\pi i \left[\frac{\cos z}{(z+i)^2} - \frac{2(z+i)\sin z}{(z+i)^4} \right]$$

يمكن هنا أن يطلب كتابته بأبسط صورة

$$= 2\pi i \left[\frac{\cos i}{-4} - \frac{2\sin i}{-8i} \right]$$

تمرين وظيفة: احسب $\displaystyle\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{(z^2+1)^2} \cdot dz$ حله يوصل

5) إذا كان f تحليلياً ومحدوداً على $D(z_0, R)$ فإن:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n} \quad \forall n \geq 0$$

f محدود $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M, \forall z \in D(z_0, R)$

الإثبات:

باستخدام مساواة (4) نجد:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot dz \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{M}{r^{(n+1)}} \cdot (2\pi r)$$

راجع متباينة على الطريق — طول طريق

الطريق دائرة طولها محيط

$$\leq \frac{Mn!}{r^n}$$

وهي صحيحة $\forall r < R$

نجعل $r \to R$

$$\Rightarrow \boxed{|f^{n}(z_0)| \le \frac{M n!}{R^{n}}} \Leftarrow |a_n| \le \frac{M}{R^{n}}$$

لأنه ليس متعلق بـ R

مبرهنة: إذا كان f تحليلياً ومحدوداً على $\mathbb{C}$ فإنّ f ثابتاً على $\mathbb{C}$

البرهان:

$z_0 \in \mathbb{C}$ ، f تحليلي على $\mathbb{C} \Leftarrow f$ تحليلي على $D(z_0, R)$

وذلك أيّاً كان R من $\mathbb{C}$

حسب نتيجة (5)

$$|a_n| \le \frac{M}{R^{n}}$$

حد أعلى f على كامل $\mathbb{C}$ وبالتالي راجع على $D(z_0, R)$

وذلك $\forall R > 0$ و $\forall n \ge 1$

نجعل $R \to \infty \Leftarrow R^{n} \to \infty$

و $\frac{M}{R^{n}} \to 0$ ومنه

ولكن $|a_n| \not< 0$

ومنه $a_n = 0 \quad \forall n \ge 1$

ومنه $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n} = a_0$

وذلك $\forall z \in \mathbb{C}$.

تمرين: هل للتابع $f(z) = \sin z$ تابع محدود على $\mathbb{C}$ ؟ (e^{z}) ($\cos z$)

الجواب: لا: نفرض جدلاً أنه محدود على $\mathbb{C}$ فإنه يكون حسب مبرهنة سابقة سيكون ثابتاً على $\mathbb{C}$.

ولكن $\sin z$ تابع غير ثابت وهذا تناقض وبالتالي $\sin z$ غير محدود.

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ، $\sin \pi = 0$

أي كثير حدود من درجة أكبر أو يساوي الواحد لا يمكن أن يكون محدوداً على $\mathbb{C}$.

والإثبات نفس حل تمرين سابق.

2016/5/5   م ١٦٠

مبرهنة: إذا كان f تحليلياً على قرص $D(z_0, R)$ فإن $\int_\Gamma f = 0$ أياً كان الطريق المغلق Γ في القرص $D(z_0, R)$.

الإثبات: f تحليلي على $D(z_0, R)$ فإن:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, R)$$

إن التابع

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

← إيجاد قرص تقارب وظيفة

محدد بسلسلة قوى قابل للاشتقاق على قرص تقاربها وإن:

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (n+1) (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D(z_0, R)$$

ومنه F تابع أصلي لـ f على $D(z_0, R)$ أصبح لدينا f مستمر على المنطقة $D(z_0, R)$ وله تابع أصلي على هذه

لأن متسلسلة قوى تكون متقاربة بانتظام على قرص محتوى في قرص تقاربها

وإذا كانت متسلسلة متقاربة بانتظام يمكن باشتقاقها حداً حداً

المنطقة وحسب نتيجة سابقة فإن $\int_{\gamma} F = 0$

أياً كان الطريق المغلق γ في $D(z_0,R)$

"يكتب مجموع المتسلسلة"

6) إن نشر تايلور لتابع تحليلي في جوار نقطة z_0 وحيد.

فقد بينا أثناء إثبات مبرهنة تايلور أنه إذا كان $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ وذلك $\forall z \in D(z_0,R)$ فإن $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

وبذلك لو وصلنا إلى متسلسلة قوى مساوية لتابع في جوار نقطة فإن هذه المتسلسلة هي نشر تايلور لذلك التابع في جوار تلك نقطة.

إذا كان لدينا تكامل لتابع على طريق مغلق وإذا كان هذا الطريق محتوى في قرص لكون التابع تحليلي عليه عندها يكون تكامل مساوياً

أمثلة: هل النشر لـ $f(z)=\frac{1}{1-z}$ وفق ماكلوران ممكن وإذا كان ممكن أين يكون صحيحاً وانشر هذا التابع وفق ماكلوران؟

بما أن f تحليلي عند $z_0=0$ فهو تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ وعليه فإن f قابل للنشر وفق ماكلوران.

وهذا النشر سيكون صحيحاً في $D(0,1)$ لأنه أوسع قرص مركزه $z_0=0$ ومحتوى في $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ وهي منطقة تحليلية تابع f.

طريقة النشر: $\frac{1}{1-z}$ هو مجموع المتسلسلة هندسية أساسها z شريطة أن يكون $|z|<1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \; ; \; |z|<1 \iff z \in D(0,1)$$

قرص الواحدة

نشر مشهور.

بما أن النشر الوحيد فهو نشر ماكلوران (نشر تايلور في جوار ٠)

ط تمرين بالتعريف:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(z) = (-1)(-1)(1-z)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(z) = (-2)(-1)(1-z)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(0) = (-3)(2)(-1)(1-z)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 3!$$

$$f^{(n)}(0) = n!$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

تمرين ١) انشر $\frac{1}{1+z}$ في جوار $z_0 = 0$.

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . z^n$$

$$\forall z \in D(0,1) \Leftrightarrow |z| < 1$$

تمرين: انشر $\frac{1}{(1-z)^2}$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad \forall z \in D(0,1)$$

تمرين: $f(z) = (1+z)^m$ ،

حيث m عدد صحيح. $m=n$ حيث $n\in N$ فنشر نشراً عادياً

ولكن m عدد صحيح أي المقدار $(1+z)$ في المقام.

$$(1+z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} z^n$$

في حال $m=-1$ نعود لتمرين 2 ولو $m=-2$ لعدنا تمرين 3

إن التابع $\frac{1}{z}$ غير قابل للنشر وفق ماكلوران لأنه غير تحليلي عند $z_0=0$.

تمرين: انشر $\frac{1}{z}$ في جوار $z_0=2i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2i)+2i} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-2i}{2i}\right)}$$

حسب تمرين 2

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2i}{2i}\right)^n$$

وهو صحيح في $\left|\frac{z-2i}{2i}\right|<1 \Leftrightarrow |z-2i|<2$

$\Leftrightarrow z\in D(2i,2)$

تمرين: انشر التابع

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)}$$

وفق ماكلوران

إذا كان z_0 صفر يجب تحليل أولاً

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)} = \frac{A}{(z-i)} + \frac{B}{(z+1)}$$

حساب A نضرب بـ $(z-i)$ ونجعل $z \to i$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1+i}$$

حساب B نضرب بـ $(z+1)$ ونجعل $z \to 1$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{-1-i}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{-i}\,\frac{1}{1-\frac{z}{i}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)$$

$$= \frac{1}{1+i}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)$$

$$= -\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i^{n+1}} + (-1)^n\right)z^n$$

$$\forall z \in D(0,1)$$

إذا كان تابع له أكثر من نقطة انقطاع نأخذ بعد نقطة التي نريد نشر حولها عن باقي نقاط ومن ثم نأخذ أصغر بعد عندها يكون نشر صحيح في قرص مركزه نقطة ونصف قطره لبعد صغير

تمرين النشر التابع :

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2 (z+1)}$$

خطأ

$$= \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{(z-i)^2}$$

لحساب C نضرب طرفين ب $(z-i)^2$ ونجعل $z \to i$

$\Rightarrow C =$

لحساب A نضرب طرفين ب $(z+1)$ ونجعل $z \to -1$

$\Rightarrow A =$

لحساب B نضرب طرفين ب z ونجعل $z \to \infty$

$$0 = A + B + 0$$

$$\frac{1}{(z-i)^2} = -\left(\frac{1}{z-i}\right)'$$

$$= -\left(-\sum \frac{z^n}{i^{n+1}}\right)'$$

$$= \sum \frac{z^n}{i^{n+1}}$$

تمرين: ليكن f يساوي:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^3+z^2+z+1}$$

والمطلوب:

$$\begin{array}{r} z^2+1 \\ z+1 \overline{\smash{)}\, z^3+z^2+z+1} \\ z^3+z^2 \\ \hline 0\;0 \end{array}$$

$\mathbb{C} \setminus \{-1, i, -i\}$

1) ما هي مجموعة تحليلية f .

2) انشر f في جوار $z_0 = 0$.

3) احسب تكامل $\int_\Gamma f$ في الحالتين:

أ) $\Gamma = C^+(0, \frac{1}{2})$ و $\Gamma = C^+(0,2)$

نفرق إذا في جوار صفر بالشكل

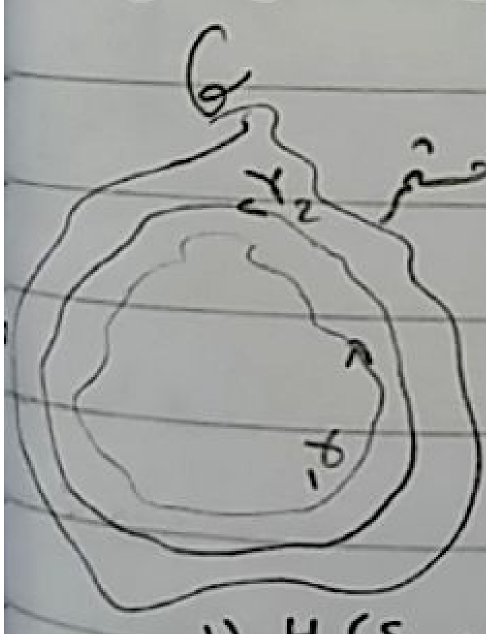
$$\frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2+1}$$

أو في جوار نقاط أخرى

$$\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}$$

نفرق عكس الا عند تأكد أن مقام أكبر من بسط وإذا كان بسط أكبر أو يساوي درجة مقام نقسم بسط على مقام

تشوه المنحنيات: ليكن γ_1 و γ_2 منحنيين مغلقين في منطقة G معرفين على المجال $I = [0,1]$



نقول أن γ_2 مشوه مستمر أو تشوية مستمر لـ γ_1 في G ونرمز لذلك بـ $\gamma_2 \sim \gamma_1$ (عن طريق) في G إذا وفقط إذا وجد تابع مستمر

$$H : I^2 \longrightarrow G \qquad (s,t) \longmapsto H(s,t)$$

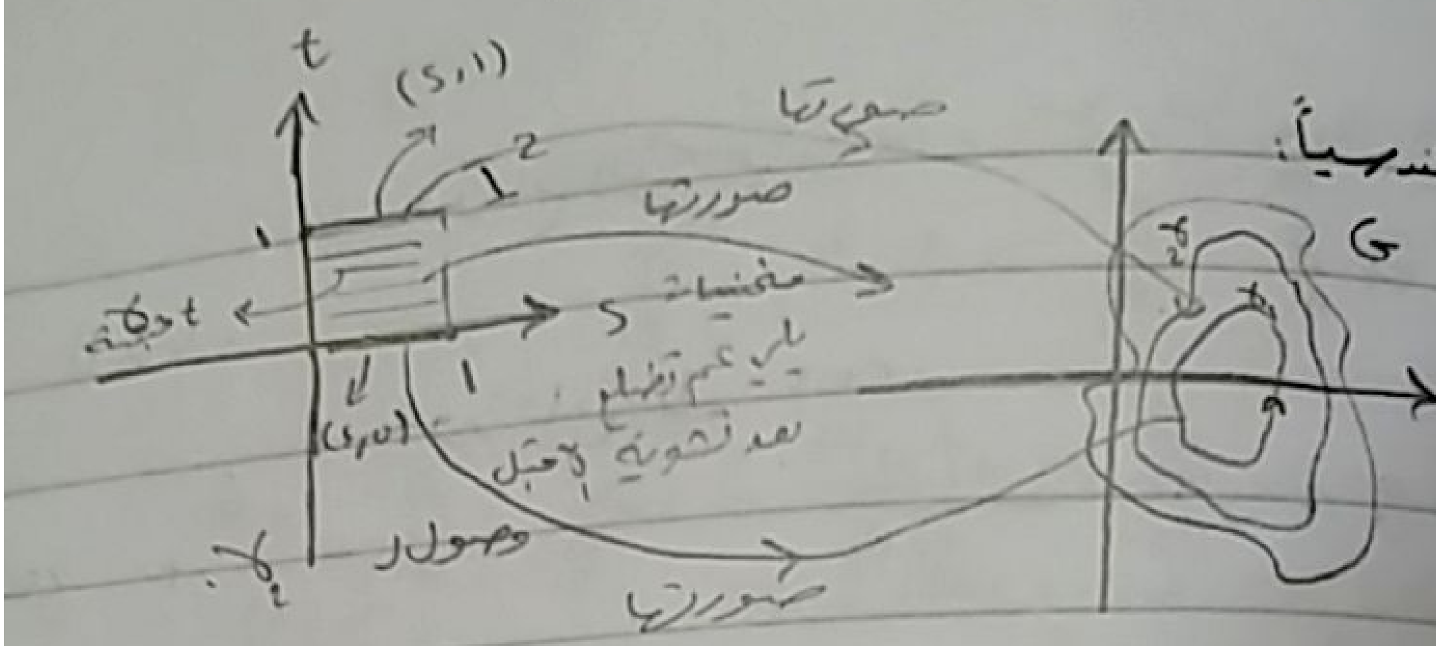
يحقق الشروط:

1) $H(s,0) = \gamma_1(s)$

2) $H(s,1) = \gamma_2(s)$

3) $H(0,t) = H(1,t) \quad , \forall s \in I \;\&\; t \in I$

هندسياً :



م-17 2016/5/11

نشور شهيرة :

-1- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\cdots \quad : |z|<1$

-2- $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1-z+z^2-\cdots \quad : |z|<1$

بالمكاملة

-3- فرع رئيسي $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{(n+1)} \quad : |z|<1$

$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$

D معرف على

ثابت تكامل في الفرع رئيسي يساوي صفر

$\mathbb{C}\setminus\{]-1,-\infty[\}$ ومتقارب في قرص وهو قرص واحد

-4- $(1+z)^m$ عدد صحيح $= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} z^n \quad : |z|<1$

$= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \cdots$

نشر ولكن غير مطلوب :

عدد عقدي أو عدد كسري

$(1+z)^r = 1\left(1 + rz + \frac{r(r-1)}{2!} z^2 + \cdots\right) \quad : |z|<1$

منشور تابع الأسي:

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad ; z \in \mathbb{C}$$

منشور تابع ال cos:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad z \in \mathbb{C}$$

منشور تابع ال sin:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad ; z \in \mathbb{C}$$

تمرين: انشر $\sin z$ جوار $i = z$:

$$\sin(z) = \sin(z - i + i)$$

$$= \sin(\underbrace{z-i}_{u})\cos(i) + \cos(\underbrace{z-i}_{u}) \cdot \sin(i)$$

$$= \cos i \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (u)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin(i) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (u)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \cos i \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin(i) \sum \frac{(-1)^n (z-i)^{2n}}{(2n)!}$$

تشوية المنحنيات: γ_2 مشوه لـ γ_1 ونرمز لذلك $\gamma_1 \sim \gamma_2$

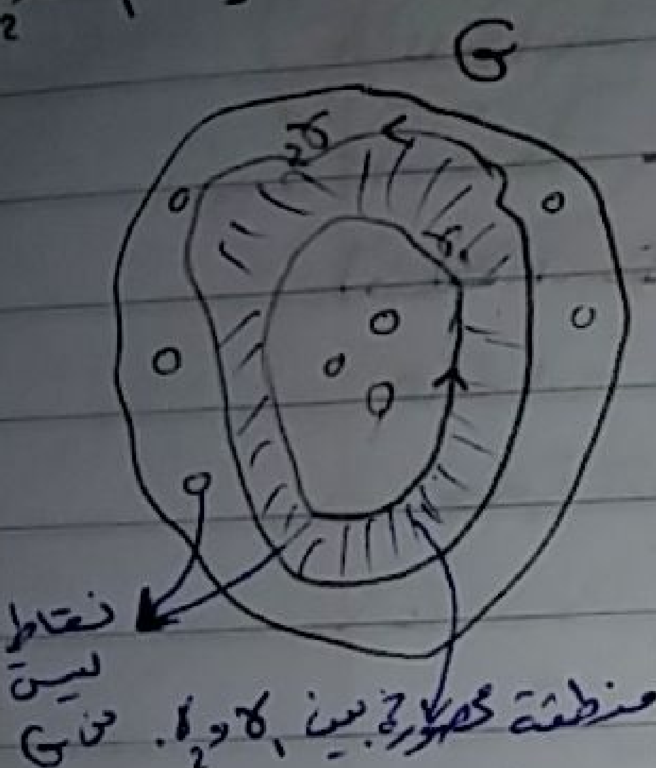
تمثل (~) علاقة تكافؤ — انعكاسية

تناظرية.

تعدية.

* برهن على أنه إذا كان γ_1، γ_2 منحنيين مغلقين بسيطين ولهما الاتجاه ذاته وأحدهما داخل الآخر وكانت G منطقة

تحوي كل من γ_1 و γ_2 والمنطقة المحصورة بينهما فإن $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في G.



* إذا كان $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في منطقة G وكان γ_1 نقطة فإننا نقول γ_2 مشوه لصفر ونرمز لذلك $0 \sim \gamma_2$ في G.

* يبرهن أنه إذا كان γ منحنياً مغلقاً بسيطاً وكانت G تحوي γ وداخله فإن $0 \sim \gamma$ في G.

مثال: كل المنحنيات المغلقة في $\mathbb{C}$ هي منحنيات مشوهة لصفر في $\mathbb{C}$ لأن $\mathbb{C}$ لا تحوي نقاط معزولة.

كل المنحنيات المغلقة في $\mathbb{C}^*$ ولا تحيط بالصفر (صفر ليس بالداخل) هي منحنيات مشوهة لصفر في $\mathbb{C}^*$.

تعريف: نقول عن المنطقة G أنها منطقة بسيطة ترابط إذا كان كل منحني مغلق بسيط فيها مشوه لصفر فيها.
"محيط وداخل أي منحنى مغلق بسيط فيها يكون محتوى فيها"
وهي ما سنطبقه في مقررنا

مبرهنة: G منطقة في $\mathbb{C}$ فإن G منطقة بسيطة الترابط إذا وإذا كان $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ مترابطة.

أمثلة: 1- $\mathbb{C}$ منطقة بسيطة مترابطة.

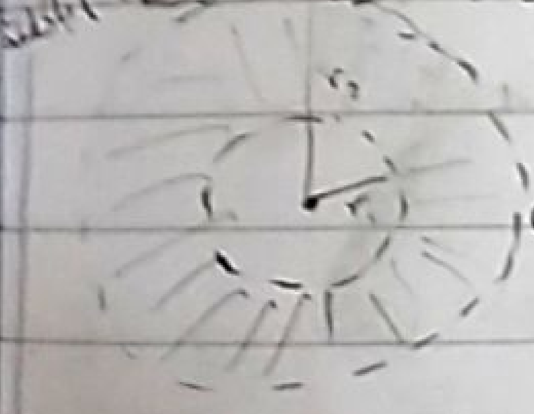
الإثبات: حسب تعريف

أن $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{C} = \{\infty\}$ نقطة وبالتالي $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{C}$ مترابطة

2- أي قرص مفتوح في $\mathbb{C}$ هي منطقة بسيطة ترابط وذلك حسب تعريف أو مبرهنة.

لو أخذنا أي نقطتين يمكن وصلهما بخط مضلع ... [illegible]

3- أي حلقة دائرية مفتوحة هي منطقة (مفتوحة ومترابطة)



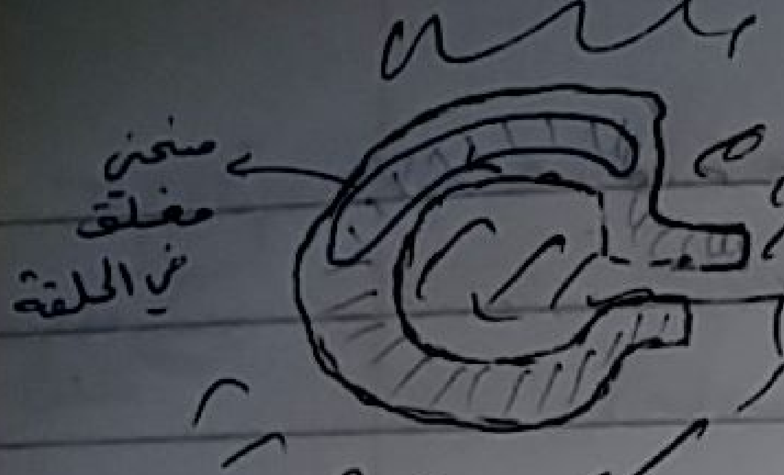
$Ann(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$

هي المنطقة الواقعة بين دائرتين متحدتين في المركز دون دائرتين.

ولكنها ليست بسيطة ترابط: لأن ∞

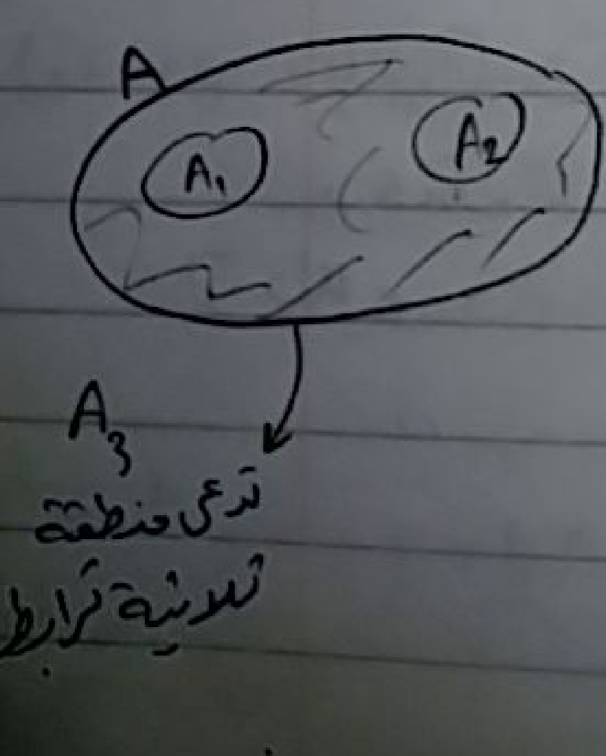
حسب المبرهنة لأن متممتها هي اجتماع للقرص المغلق الداخلي مع خارج القرص الخارجي مع محيطه وهي مجموعة غير مترابطة في $\mathbb{C}_\infty$.

تعليل آخر: أي منحنى مغلق في حلقة ومحيط بالدائرة الداخلية لن يكون ما حوله لصفر

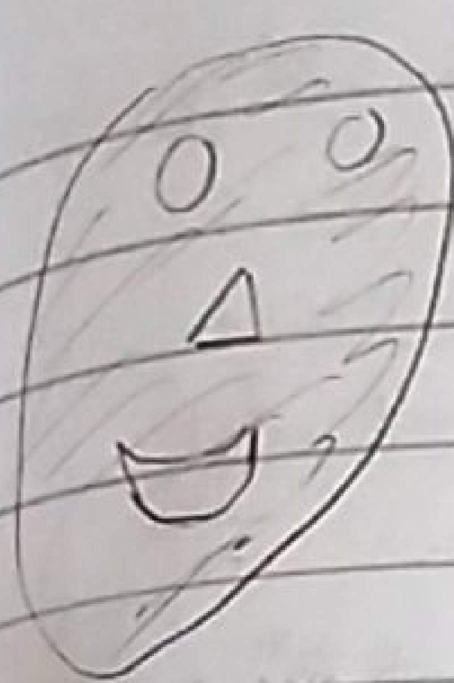


٤- هي منطقة بسيطة ترابط، و
وذلك حسب تعريف
وحسب المبرهنة
المتمم للمجموعة هي كل ما علونا بالأسود

٥- $\mathbb{C}^*$ هي منطقة ليست بسيطة ترابط.
الإثبات: حسب مبرهنة:
$\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{C}^* = \{0,\infty\}$
كون عرفنا على $\mathbb{C}_\infty$ مسافة الوترية أصبحت مفاهيم
طبولوجيا منطبقة كليا وبالتالي كل عنصر وحيد هو مجموعة
مغلقة ومنه
$\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{C}^* = \{0,\infty\} = \{0\} \cup \{\infty\}$
مغلقتان في $\mathbb{C}_\infty$
وحسب تعريف ترابط $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{C}^*$ ليست مترابطة



٦- $\mathbb{C}_\infty \setminus A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$
وهي غير مترابطة
ومنه A ليست منطقة
بسيطة ترابط.
أو حسب تعريف



٧- منطقة ليست بسيطة الترابط. ذات خاصية تعريف ذو موهنة.

تشوية بأطراف ثابتة:

تعريف: ليكن γ_0 , γ_1 منحنيين داخليين في منطقة G وكل منهما معرف على مجال $I = [0,1]$ ولهما البداية ذاتها ولتكن α والنهاية ذاتها ولتكن β نقول γ_0 مشوه لـ γ_1 في G بأطراف ثابتة ونرمز لذلك بـ $\gamma_0 \sim \gamma_1$ في G بأطراف ثابتة.

$\boxed{\text{يمكن الاستغناء عن الكلمة الأخيرة إذا تأكدنا أن المنحني ليس مغلقاً}}$

إذا وجد تابع مستمر:

$$H : I^2 \longrightarrow G$$
$$(s,t) \longmapsto H(s,t)$$

يحقق:

1. $H(s,0) = \gamma_0(s)$
2. $H(s,1) = \gamma_1(s)$
3. $H(0,t) = \alpha \quad , \quad H(1,t) = \beta$

مبرهنة: لأي γ_1, γ_2 في G بأطراف ثابتة فإن $\gamma_1 \oplus \gamma_2^{-}$ في G

يصبح منحني مغلق

١٢/٥/٢٠١٦   ١٤.٠ م

مبرهنة: كل مجموعة نجمية مفتوحة تكون منطقة بسيطة ترابط «منطقة لأنها مفتوحة فرضياً وكونها نجمية فإنها مترابطة»

وبشكل خاص تكون المجموعة المفتوحة المحدبة منطقة بسيطة ترابط «لأن كل محدبة نجمية».

مثال: القرص المفتوح هو مجموعة محدبة مفتوحة.

تمهيد لمبرهنة كوشي التكاملية:

- أثبتنا سابقاً $\int_{C^+(0,r)} \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i$

سؤال: هل يوجد شروط على طرق متكاملة تجعل تكاملات توابع على هذه طرق متساوية؟

ستجيب مبرهنة كوشي على ذلك

- رأينا أيضاً: إذا كان f تحليلي على قرص $D(z_0,R)$ فإن $\int_\Gamma f = 0$ أياً كان الطريق المغلق Γ على $D(z_0,R)$.

هل توجد مناطق أخرى غير قرص تحقق ذلك؟

وأيضاً مبرهنة كوشي ستجيب.

- لاحظنا أن تابع تحليلي على قرص له تابع أصلي على هذا القرص

هل يوجد مناطق أخرى غير قرص يجب أن يكون تابع تحليلي عليها له تابع أصلي؟

نتيجة من نتائج كوشي ستجيب

مبرهنة كوشي:

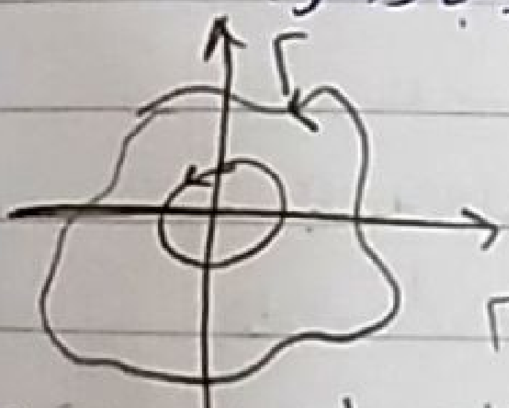
الشكل الأول: إذا كانت f تحليلية على منطقة G وكان $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في G "أي أن طريقين مغلقين" فإن $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

عرض بشكل مبسط:

إذا كان f تحليلياً على محيطي منحنيين مغلقين بسيطين أحدهما داخل الآخر γ_1, γ_2 وعلى منطقة محصورة بينهما ولهما اتجاه ذاته فإن

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

تمرين: احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{1}{z} \, dz$ حيث Γ منحنٍ مغلق بسيط موجه بالاتجاه الموجب يحيط بالصفر.



بما أن المبدأ $\notin \Gamma$ فإن بعده عن Γ موجب تماماً ومنه يوجد $r>0$ $C^+(0, r)$ محتواة داخل Γ

(أصغر المسافات من 0 عن نقطة على محيط Γ مقسوم على 2)

بعد نقطة عن مجموعة مغلقة يساوي صفر عندها نقطة من المجموعة

$f(z)=\frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$ فهو تحليلي على Γ و $C^+(0,r)$ وعلى المنطقة المحصورة بينهما وهما منحنيان مغلقان بسيطان ولهما الاتجاه ذاته و $C^+(0,r)$ محتواة داخل Γ

وحسب الشكل الأول لمبرهنة كوشي:

$$\int_\Gamma \frac{1}{z} \, dz = \int_{C^+(0,r)} \frac{1}{z} = 2\pi i$$

لو المنحني Γ بالاتجاه سالب حنزها نأخذ $C^-(0,r)$
ويصبح التكامل

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = -2\pi i$$

لو كان ممسوح عدة مرات عددها كنسبة من أصل مرة واحدة
نم نضربه بعدد مرات المسح.

* سؤال: هل الدائرة $C^+(0,r)$ مشوهه لـ $C^-(0,r)$
في $\mathbb{C}^*$ ؟

الجواب: $f = \frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$ والتي تحوي $C^+(0,r)$ و
$C^-(0,r)$ فلو كان C^- مشوه لـ C^+ في $\mathbb{C}^*$ فبالتالي حسب كوشي

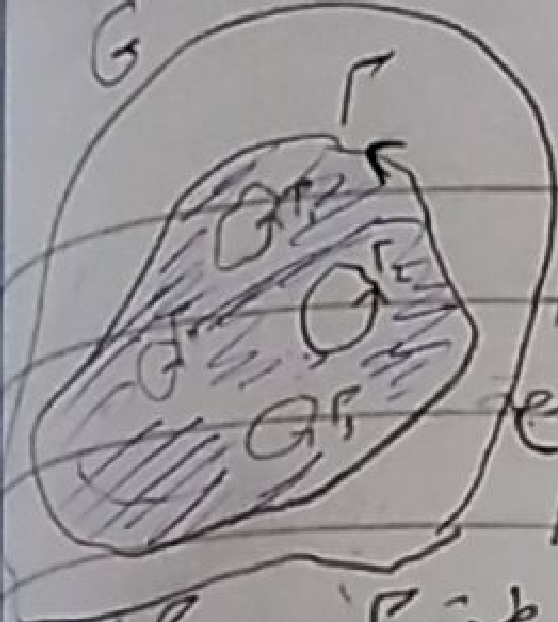
$$\int_{C^+(0,r)} \frac{1}{z}\,dz = \int_{C^-(0,r)} \frac{1}{z}\,dz$$

أي يكون $2\pi i = -2\pi i$ وهذا مستحيل وعليه فإنّ
$C^+(0,r)$ ليس مشوها لـ $C^-(0,r)$.

«هذه طريقة لإثبات أن منطقة ما غير مشوهة لأخرى»
يمكن إيجاد تابع تحليلي على منطقة يحوي طريقين حيث
تكامله على طريق أول $\neq$ تكامله على طريق ثاني»

تعميم لشكل كوشي الأول:

ليكن Γ طريقاً مغلقاً بسيطاً و $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ طرق
مغلقة وبسيطة ولكل منها اتجاه Γ ذاته ومنفصلة
مثنى مثنى وتقع في المنطقة داخلية لـ Γ



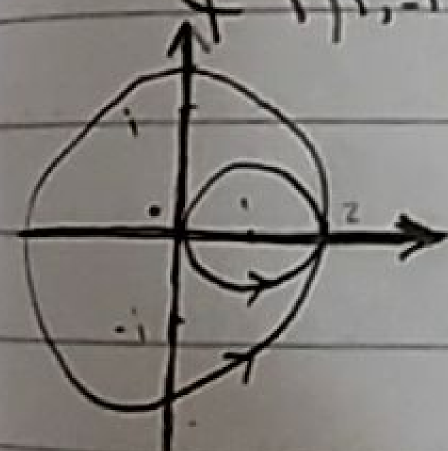
إذا كان f تحليلياً على منطقة G
تحوي الطرق $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$
وتحوي المنطقة الواقعة خارج
الطرق $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ وداخل Γ
(وليس من ضروري أن تحوي داخل طرق $\Gamma_1 \ldots \Gamma_n$)

عندئذ:

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f + \ldots + \int_{\Gamma_n} f$$

تمرين: احسب التكامل $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)} \cdot dz$ حيث
$\Gamma_1 = C^+(0,2)$; $\Gamma_2 = C^+(1,1)$

الحل: التابع المكامل تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{1, -i, +i\}$



$$\int_{C^+(0,1)} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)} = \int \frac{\frac{e^z}{(z^2+1)}}{z-1}$$

$$f_1(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)}$$

تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

فهو تحليلي على محيط وداخل $C^+(1,1)$ حسب صيغة كوشي.

$$\int_{C^+(1,1)} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)} \cdot dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \cdot \frac{e}{2}$$

$$= \pi e i$$

لكن طريقة سابقة لا ننفع في حساب تكامل تابع عند

$\mathbb{C}^+(0,2)$ ولكن سوف نعتمد كوشي معممة.

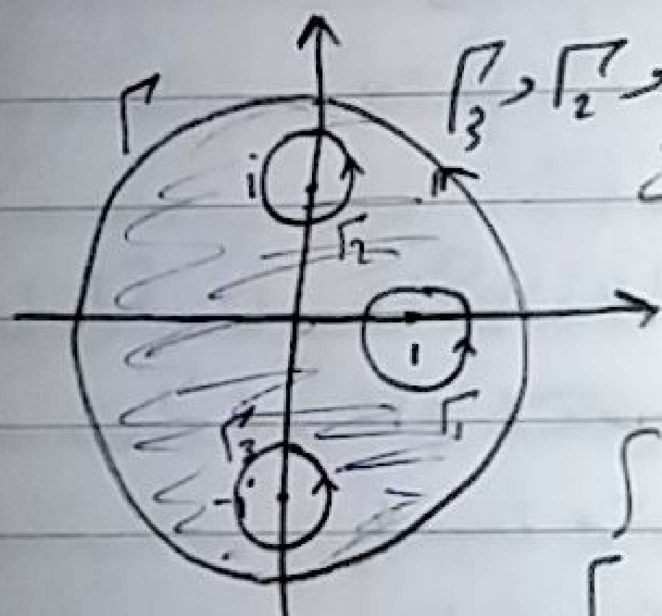
لنكن Γ_1 دائرة مركزها 1 ممسوحة مرة واحدة باتجاه موجب

و Γ_2 〃 〃 i 〃 〃 〃 〃 〃

Γ_3 〃 〃 $-i$ 〃 〃 〃 〃 〃

حيث تكون هذه دوائر غير متقاطعة "أي نختار أقطار

حيث دوائر لا تتقاطع".



عندئذ المكامل تحليلي على Γ و Γ_1 و Γ_2 و Γ_3

وعلى منطقة الواقعة خارج طرق

Γ_1 و Γ_2 و Γ_3 وداخل Γ

وحسب كوشي (1) معممة.

$$\int_{\Gamma} f\,dz = \int_{\Gamma_1} \frac{\frac{e^z}{(z^2+1)}}{(z-1)}\,dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{e^z}{(z+i)(z-1)}}{z-i}\,dz$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \frac{\frac{e^z}{(z-i)(z-1)}}{z+i}\,dz$$

$f_1(z) = \dfrac{e^z}{(z^2+1)}$ هي تحليلية على محيط وداخل Γ_1

$f_2(z) = \dfrac{e^z}{(z+i)(z-1)}$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 Γ_2

$f_3(z) = \dfrac{e^z}{(z-i)(z-1)}$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 Γ_3

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} f\,dz = 2\pi i\, f_1(1) + 2\pi i\, f_2(i) + 2\pi i\, f_3(-i)$$

لو كان تمرين بشكل:

$$\int_{C^+(1,1)} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^3}$$

فالحل يبقى كالسابق لكن نستخدم

$$\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0) \longrightarrow \circledast$$

تمرين: احسب تكامل:

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)^3} \cdot dz$$

المكامل تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ هنا لدينا $(z-z_0)^3 \neq 1$

أي لا تنفع صيغة عندما $|1| = |n+1|$ وأيضاً $z_0 = 1$

ليست مركزاً للدائرة وهنا لا تنفع صيغة $\circledast$ وعليه

سنطبق الآتي:

كون المكامل تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ فهو تحليلي على $C^+(1,\frac{1}{2})$

و $C^+(0,2)$ وعلى المنطقة المحصورة بينهما

$$\xRightarrow{\text{حسب كوشي (1)}} \int_{C^+(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)^3} \cdot dz = \int_{C^+(1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)^3} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(e^z\right)''_{z=1}$$

مبرهنة:

شكل كوشي الثاني: إذا كان f تحليلياً على منطقة G و

كان Γ موحد لا في G فإن التكامل f على Γ يساوي ٠

$$\int_{\Gamma} f = 0$$

شكل مبسط: إذا كان f تحليلي على محيط وداخل منحنٍ مغلق بسيط γ فإن $\int_{\gamma} f = 0$

مثال: احسب تكامل: $\int_{c^+(0,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^3} \, dz$

المكامل تحليلي على منطقة $\mathbb{C} \setminus \{1, i, -i\}$ فهو تحليلي على محيط وداخل $c^+(0,\frac{1}{2})$ فإن

$$\int_{c^+(0,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^3} \, dz = 0$$

نتيجة مباشرة لكوشي (٢):

مبرهنة: إذا كان f تحليلياً على منطقة بسيطة ترابط فإن التكامل لـ f على أي طريق مغلق في هذه المنطقة سيكون معدوماً.

١٩ م   ٢٠١٦/٥/١٢

تمرين: إذا كان f تحليلياً على منطقة G وكان $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ فهل $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في G علل أجابتك؟

الجواب لا: يجب أن نأتي بمثال.

* سؤال: تمرين: إذا كان f معرف على منطقة G وكان $\int_\gamma f=0$
فهل لكل γ و f تحليلي على G ؟ علل أجابتك
جواب لا "يحتاج مثال"

ملاحظة: f معرف على منطقة G فإن $\int_\gamma f \neq 0$ حيث γ مغلق في G ⇐ إما $\gamma \not\sim 0$ في G.
أو f غير تحليلي في G.

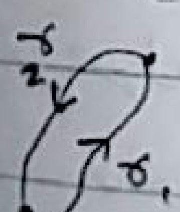
لو كان f تحليلي على G وكان $\int_\gamma f\neq 0$ حيث γ مغلق ⇐ $\gamma\not\sim 0$ في G

تمرين: أثبت أن $C^+(0,1)$ غير مشوه لصفر في $\mathbb{C}^*$.
"أي $\mathbb{C}^*$ ليست منطقة بسيطة ترابط"
إن $f(z)=\frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$

$$\int_{C^+(0,1)} f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$$

ومنه حسب ملاحظة ذات
$C^+(0,1)\not\sim 0$ في $\mathbb{C}^*$ ⇐ $\mathbb{C}^*$ ليست منطقة بسيطة ترابط

الشكل الثالث لمبرهنة كوشي:
إذا كان f تحليلياً على منطقة G وكان $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في G
بأطراف ثابتة عندئذ:



$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

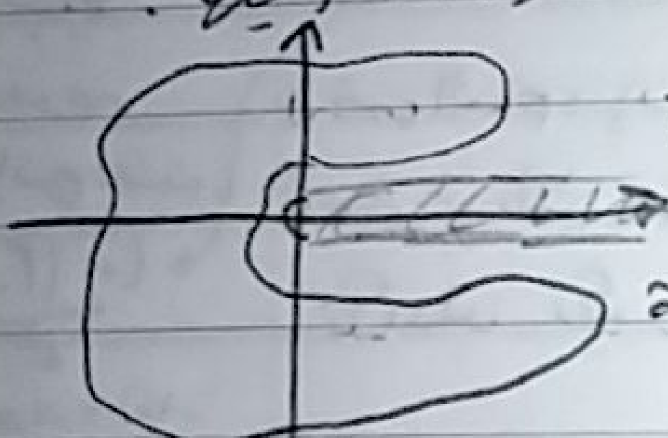
مبرهنة: f تحليلي على منطقة بسيطة ترابط عندئذ f
تابع أصلي على تلك المنطقة.

مناقشة: $f(z)=\frac{1}{z}$ هو تحليلي على $\mathbb{C}^*$ ووجدنا سابقاً أنه ليس له تابع أصلي.

ومجموعة $\mathbb{C}^*$ ليست بسيطة الترابط.

تمرين: هل للتابع $f(z)=\frac{1}{z}$ تابع أصلي على $\mathbb{C}\setminus\{ox^+\}$

التابع $f(z)=\frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{ox^+\}$ و $\mathbb{C}\setminus\{ox^+\}$ منطقة بسيطة الترابط لأن أي منحني مغلق فيها وداخله سيكون محتوى فيها أي سيكون قابل للصغر فيها.



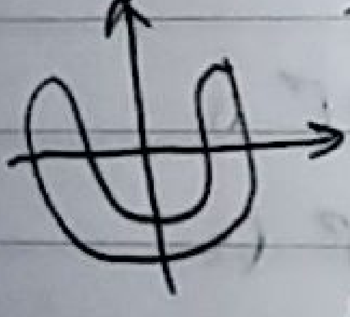
عندها حسب المبرهنة فإن لـ $f(z)=\frac{1}{z}$ تابع أصلي عليها.

إيجاد تابع أصلي في هذه الحالة

$$F(z)=\ln|z|+i\underset{\sim}{\theta}$$

حيث لو كان تابع متكامل على طريق من شكل $0<\theta<0+2\pi$

$\frac{1}{z}\in\mathbb{C}\setminus\{oy^+\}$



و ~~[illegible]~~

تابعه أصلي

$$h(z)=\ln|z|+i\underset{\sim}{\theta}$$

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}+2\pi$$

$\frac{\pi}{2}$ هي أحد قياسات اتجاه oy^+

صيغ التكاملية كوشي المعممة:

ليكن Γ طريقاً مغلقاً بسيطاً موجهاً بالاتجاه موجب و z_0 نقطة داخل Γ.

إذا كان f تحليلياً على Γ و داخله فإن:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)}\, dz = 2\pi i . f(z_0)$$

صيغة الثانية. نفس صيغة سابق فإن:

$$\Rightarrow \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} . dz = \frac{2\pi i}{n!} . f^{(n)}(z_0)$$

لو لم يكن Γ بسيط أو موجه فإننا نضيف $n(\Gamma, z_0)$ هو عدد لفات Γ حول z_0

النص العام: إذا كان f تحليلياً على منطقة وكان Γ مشوهاً لصفر في تلك منطقة وكان موجهاً بالاتجاه الموجب فإن: تكاملين يكونا صحيحين.

تمرين: احسب: $\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2(z-i)} . dz$ في حالات:

1) Γ طريق مغلق لا يحوي بداخله الصفر ولا i.

2) Γ " " بسيط موجه بالاتجاه الموجب يحوي بداخله i ولا يحوي الصفر.

3) Γ طريق " " " " " " " " " " " 0 ولا يحوي i

4) Γ طريق " " " " " " " " " " " " ويحوي بداخله i.