* المحاضرة الخامسة *

حدوديات تشبيشيف:

وتعطى بالشكل:

$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$

$n = 0 \Longrightarrow T_0(x) = 1$

$n = 1 \Longrightarrow T_1(x) = x$

العلاقة التكرارية:

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{(n-1)}(x)$

أكبر معامل

$T_n \longrightarrow 2^{n-1}$

$T_2(x) = 2x T_1 - T_0 = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$\tilde{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$

تابع الوزن يعطى:

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

نقسم على 2

حدوديات تشبيشيف وحيدة المعامل الرئيسي:

$\tilde{T}_2(x) = (x^2 - \frac{1}{2})$, $\tilde{T}_3(x) = (x^3 - \frac{3}{4}x)$

* صفر الدالة هو جذرها (الذي يجعلها تساوي الصفر).

. أصفار T_n و $\tilde{T}_n$ نفسها.

. الأصفار مرتبتها واحد (بسيطة) لا يوجد جذور مضاعفة.

أصفار تشبيشيف:

$T_2(x) = 0 \quad (x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$x_1 = 0$

$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$n=2$
$x=1,2$
$n=3$
$x=1,2,3$

(2)

$T_n(x)$ لها (n) صفراً بسيطاً $[-1,1]$

T_n هي جذورها ل $\Leftrightarrow x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$; $k=1,\dots,n$

$k=1$ $x_1=0$ و x_2

وتطلع قيمه العظمى

$\tilde{T}_n$ هي ذاتها ل $\Leftrightarrow \tilde{x}_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$ $k=1,\dots,n-1$

$T_n(\tilde{x}_k) = (-1)^k$

$\tilde{T}_n(\tilde{x}_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$

(شرح):

أولاً نثبت الـ n ثم نأخذ عددات الـ k .

مثلاً $n=2 \Leftarrow k=1,2$ جذرين (صفرين)

$n=3 \Leftarrow k=1,2,3$ - - وهكذا...

(شرح بالنسبة للقيم العظمى):

القيم العظمى {سنشتق ونخرج الجذر وعند الاشتقاق سوف ننزل درجة لذلك العداد لدينا من $k=1,\dots,n-1$

مثلاً $n=3 \Leftarrow k=1,2$ (تبلغ قيمتها العظمى)

"الأصفار مختلفة عن القيم العظمى"

مبرهنة

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max|\tilde{T}_n(x)| \leqslant \max|P_n(x)|$$

«أي حدودية من الدرجة n أكبر من حدودية تشبيشيف من الدرجة n نفسها»

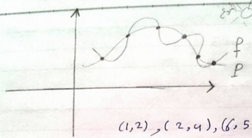
ملاحظة: أكثر تقريبات مثل السابقة.

$c_0t_0 + c_1t_1$

تذكرة تحليل عددي (1)

* الاستيفاء

(نقطة خلية رسم)



(مراجعة)

ليكن لدينا مجموعة النقاط $(1,2)$, $(2,4)$, $(6,5)$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$max\,Error = |T - Q| = |f(x) - P_n(x)| = \frac{P^*_{n+1} f^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

متباينة

$$\max|f^{(n+1)}| \qquad \max(n+1)! \qquad \max|P^*_{n+1}(x)|$$

$$P^*_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)$$

ليكن لدينا الحدودية التالية

$g(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)(x+5)$ ادرس صفاتها وجوارها

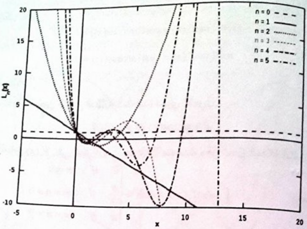
- هذه الحدودية من الدرجة الخامسة

حدودية الدرجة الرابعة لا نستطيع إخراج القيمة العظمى لها وبعدها لا نستطيع على شيء

((غالباً الاستيفاء يكون بنقاط أكثر لكون الشكل الحقيقي لا يمكن معرفة الـ max لحدودية من درجة عالية))

* - نلاحظ أنه لا يمكن إيجاد $\max|P^*_{n+1}(x)|$ حالياً، لكن إذا أخذنا $x_0, x_1, \ldots, x_n$ هي أصفار تشيبيشف عندئذٍ سيكون P^*_{n+1} هو $\tilde{T}_{n+1}$ و $\frac{1}{2^n} = \max|\tilde{T}_{n+1}|$

* مثال !! ص 56 مكرر دورات



الشكل 14

حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة n تأخذ الشكل:

$$\phi(x)=c_0^{(0)}L_0(x)+c_1^{(0)}L_1(x)+\ldots+c_n^{(0)}L_n(x)$$

حيث $c_0^{(0)},c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$ من العلاقة (42).

4-2-2-1-3 التقريب باستخدام حدوديات تشبتشيف:

تعريف حدوديات تشبتشيف (8): وهي حدوديات متعامدة على المجال $]-1,1[$

بالنسبة لتابع الوزن:

$$\boxed{w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad (63)$$

وتُعطى كما يلي:

(64) $$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad ; n \geq 0$$

بشكل خاص:

$$n = 0 \Rightarrow T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$$

ملاحظة:

لاستخدام خواص التوابع المثلثية المتعامدة نجري التحويل :

$$\theta = \arccos(x) \Rightarrow x = \cos\theta$$

إن التوابع $T_n(x)$ في الحقيقة هي حدوديات متعامدة، وهي تحقق العلاقة التالية:

(65) $$\int_{-1}^{1} w(x) T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0 & if \quad m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & if \quad m = n \neq 0 \\ \pi & if \quad m = n = 0 \end{cases}$$

بالاضافة لذلك العلاقة تكرارية تربط بين حدوديات تشيبتشيف هي:

(66) $$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \; ; \; n \geq 1$$

يمكن الحصول على توابع تشيبتشيف على شكل حدوديات بطريقة مبسطة باستخدام العلاقة التكرارية الأساسية :

$$T_0(x) = \cos(\arccos(x)) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$$

$$T_2(x) = 2x T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x T_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2x T_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^4 + 1$$

$$\leq \max_{-1\leq x\leq 1}\left|(x-x_0)\ldots(x-x_n)\right|$$

وبالتالي يكون :

$$\max_{-1\leq x\leq 1}\left|f(x)-p_n(x)\right| \leq \frac{1}{2^n(n-1)!}\max_{-1<x<1}\left|f^{(n+1)}(\xi(x))\right| \qquad (78)$$

مثال(11):

(أول مرة يبدأ 1 ولا يأخذ الحد الأقصى الإمكان)

5 ← 10 علامات

أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الثانية للتابع $f(x)=\sin \pi x$ على المجال $[-1,1]$ و باستخدام أصفار تشبتشيف ثم قدر قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

حدودية استيفاء درجة ثانية نحتاج إلى 3 نقاط

خطأها من الدرجة الثالثة

بما أن $n=2$ فالحدودية المطلوبة من الشكل:

$$p_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

لنوجد النقاط x_k حيث $k=0,1,2$.

$$x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)\ ;\ k=0,1,2$$

$$k=0\Rightarrow x_0=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=1\Rightarrow x_1=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)=0$$

$$k=2\Rightarrow x_2=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$E\max = \frac{f^{(3)}}{3!}\cdot\frac{1}{2^n}$

$\boxed{E\max = \frac{\pi^3}{3!}\cdot\frac{1}{2^n}}$

$f(x)=\sin\pi x$

$f'(x)=\pi\cos\pi x$

$f''(x)=-\pi^2\sin\pi x$

$f'''(x)=-\pi^3\cos\pi x$

وبالتالي:

$$x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ x_1=0\ ,\ x_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$\max|f^{(3)}|=\pi^3$

كما أن:

نلاحظ أن الخطأ الأعظمي أكبر لذلك ينصح الباحث بتزيد عدد النقاط

$$f(x_0)=\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)=0.4086$$

$$f(x_1)=\sin(0)=0$$

$$f(x_2)=\sin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\pi\right)=-0.4086$$

كما أن:

$$L_i(x)=\prod\nolimits_{i\neq j}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\ ;\ i,j=0,1,\dots,n$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{2}{3}x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{-4}{3}x^2+1$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{2}{3}x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

ومنه:

$$p_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

$$p_2(x)=\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)(0.4086)+\left(\frac{-4}{3}x^2+1\right)(0)$$

$$+\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)(-0.4086)$$

$$p_2(x)=\frac{681\sqrt{3}x}{2500}=0.4718106x$$

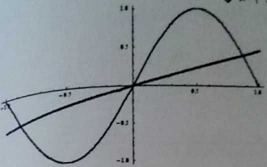
والخطأ المرتكب:

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-p_2(x)\right| \le \frac{1}{2^2(3)!}\max_{-1\le x\le 1}\left|f^{(3)}(\xi(x))\right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin(x)-p_2(x)\right| \le \frac{1}{24}\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin^{(3)}(\xi(x))\right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin(x)-p_2(x)\right| \le \frac{1}{24}(8)=\frac{1}{3}$$

ويكون الرسم البياني:



الشكل 17

يمكن تحويل النقاط x_k من المجال $[-1,1]$ إلى المجال $[a,b]$ كما يبين لنا المثال التالي:

مهم

٤ أصفار

$\boxed{\text{مثال(12):}}$

أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الثالثة للتابع $\boxed{f(x)=xe^x}$ على المجال $\boxed{[0,1.5]}$ و باستخدام أصفار تشبتشيف. ثم قدر عتبة الخطأ؟

الحل:

بما أن $n=3$ فالحدودية المطلوبة من الشكل:

$$p_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+L_3(x)f(x_3)$$

$$p_2(x) = L_0(x)0 + L_1(x)\left(0.5e^{0.5}\right) + L_2(x)(e) + L_3(x)\left(1.5e^{1.5}\right)$$

باجراء الحسابات نجد:

$L_0(x) = 1.3333x^3 + 4.0000x^2 - 3.6667x + 1,$

$L_1(x) = 4.0000x^3 + 10.000x^2 + 6.0000x,$

$L_2(x) = 4.0000x^3 + 8.000x^2 - 3.0000x\,,$

$L_3(x) = 1.3333x^3 - 2.000x^2 + 0.66667x\,,$

وبالتالي:

$$p_3(x) = 1.3875x^3 + 0.057570x^2 + 1.2730\,.$$

نوجد النقاط x_k حيث $k = 0,1,2,3$.

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{8}\pi\right) \;;\; k = 0,1,2,3$$ *

$k = 0 \Rightarrow x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.92388,$

$k = 1 \Rightarrow x_1 = 0.38268,$

$k = 2 \Rightarrow x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -0.3826,$

$k = 3 \Rightarrow x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -0.92388,$

هام جداً

هذه الأصفار لأجل المجال $[-1,1]$، و من أجل المجال $[0\,,1.5]$ نقوم بالتحويل التالي:

من اجل الطريقة العامة

يوجد بعض الحالات يمكن تحويلها من الغير خطي إلى خطي

لا يوجد تعميم في إيجاد م

نأخذ حالات خاصة

2-3 التقريب غير الخطي:

بفرض $f \in C[a,b]$، و $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C[a,b]$ توابع مرتبطة خطياً بالثوابت، والتقريب غير الخطي هو البحث عن تابع $\phi(x)$ بدلالة التوابع $\varphi_n(x) \in [a,b]$ كما يلي:

$$\phi(x,c) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{82}$$

مثال الثوابت موجودة ضمن الدوال المختارة

$$\phi(x, c_0, c_1, c_2, c_3) = c_0 + c_1 e^{2c_4 x} + c_2 \ln(c_5 x) + c_3(x^2+1)$$

و بشكل مشابه للتقريب الخطي نبحث عن تابع $\phi(x,c)$ يُحقق:

$$\begin{aligned} \|f - \phi^{(0)}\|_2^2 &= \min_{\phi \in S} \|f - \phi\|_2^2 = \min_{\phi \in S} \sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \phi(x_i, c)\right) \\ &= \min_{\phi \in S} D^2(c_0, c_1, \ldots, c_n) \end{aligned} \tag{83}$$

بتطبيق الشروط $\frac{\partial (D^2)}{\partial c_j} = 0,\ j = 0, \ldots, n$، نحصل على $(n+1)$ جملة معادلات غير خطية بالنسبة للمجاهيل c_j^0 للتقريب الأمثل. وعندئذٍ تُدعى المسألة بمسألة التقريب غير الخطي.

إن حل جملة معادلات غير خطية هو بحث الأمثليات (الفصل الخامس)

سنقوم الآن بدراسة بعض التوابع التي يمكن أن تؤول بإجراء تحويل مناسب من جملة المعادلات غير الخطية إلى جملة معادلات خطية.

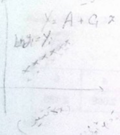
1-2-3 التقريب بتابع أسي من الشكل $\left(be^{ax}\right)$:

لتكن لدينا البيانات المعطاة $\{(x_1, y_1),(x_2, y_2),........,(x_n, y_n)\}$، نريد تقريب هذه البيانات بتابع أسي من الشكل:

$$y = be^{ax} \qquad (84)$$

$$y = be^{ax} \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(b) + ax$$

وباستخدام الرموز التالية:



$$Y = \ln(y)$$

$$B = \ln(b)$$

$$A = a$$

$$X = x$$

نحصل على المعادلة:

$$Y = AX + B$$

وهو تابع خطي نحسب فيه الثوابت بالطريقة المعتادة.

ملاحظة:

وبالشكل نفسه نتعامل من أجل التقريب إلى تابع لوغاريتمي أو كسري أو مثلثي.

مثال(14)

قرب البيانات التالية إلى تابع أسي ثم احسب قيمة الخطأ المرتكب:

x_i	1	1.25	1.50	1.75	2
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

* دالة التقريب ليست لاتقة بعدد النقاط

الحل:

عدد البيانات المعطاة $n=5$. التابع المطلوبة من الشكل: $y=be^{ax}$.

نجري التحويل التالي:

$$Y=\ln(y)$$

$$B=\ln(b)$$

$$A=a$$

$$X=x$$

فنحصل على المعادلة:

$$Y=AX+B$$

منوشئ جدول جديد

i	1	2	3	4	5
$Y_i=\ln(y_i)$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

ويكون:

$$c_0^{(0)}=\frac{(N+1)S_{xy}-S_xS_y}{(N+1)S_{xx}-S_xS_x}$$

$$c_1^{(0)}=\frac{S_{xx}S_y-S_{xy}S_x}{(N+1)S_{xx}-S_xS_x}$$

حيث

$$S_x=\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\ S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ ,\ S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\ ,\ S_y=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

وبالتالي:

$$S_x=\sum_{i=1}^{5}x_i=1+1.25+1.5+1.75+2=7.5$$

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{5}x_i^2=1+1.5625+2.25+3.625+4=11.87$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=1.629+2.195+2.814+3.514+4.27=14.422$$

$$S_y=\sum_{i=1}^{5}y_i=1.629+1.756+1.876+2.008+2.135=9.404$$

$$c_0^{(0)}=\frac{5(14.422)-(7.5)(9.404)}{5(11.875)-(7.5)(2)}=0.5056$$

$$c_1^{(0)}=\frac{(9.404)(11.875)-(7.5)(14.422)}{5(11.875)-(7.5)(2)}=1.122$$

ومنه:

$$A=a=0.5056$$

$$B=\ln(b)=1.122\Rightarrow b=e^{1.122}=3.071$$

ومنه التابع المطلوب:

$$y=f(x)=3.071e^{0.5056x}$$

والخطأ المرتكب:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-be^{ax_i}\right]^2$$

$$E=\sum_{i=1}^{5}\left[y_i-3.071e^{0.5056x_i}\right]^2=\sum_{i=1}^{5}d_i^2$$

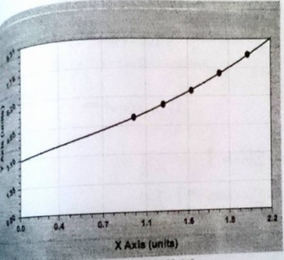
حيث:

i	x_i	y_i	$f(x_i)$	d_i^2
1	1	5.10	5.09475	0.00003
2	1.25	5.79	5.78136	0.00008
3	1.5	6.53	6.56041	0.00092
4	1.75	7.45	7.44464	0.00003
5	2	8.46	8.44793	0.00015

ومنه:

$$E = 0.00121$$

والرسم البياني:

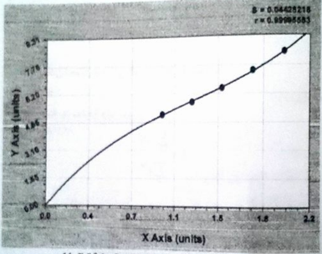


الشكل 20: البيانات والتابع التقريب للمثال 14

ونجد أيضاً التقريب بتابع كثير حدود من الدرجة الثالثة (بطريقة المربعات الصغرى) لنفس البيانات المعطاة سابقاً يأخذ الشكل:

$$y = 0.21333x^{3} - 0.02286x^{2} + 1.93524x + 2.97743$$

ويكون الرسم البياني:



الشكل 21: البيانات و تابع التقريب الحدودية من الدرجة 3 للمثال 14

نلاحظ أن التقريب بالتابع الأسي أفضل من التقريب بتابع كثير حدود من الدرجة الثالثة.

3-2-2 التقريب بتابع قوة من الشكل (bx^{a}):

لتكن لدينا البيانات المعطاة $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots\ldots, (x_n, y_n)\}$، نريد تقريب هذه البيانات بتابع قوة من الشكل:

$$f(x) = bx^{a} \qquad (85)$$

$y = bx^a$

$(\ln y) = (\ln b) + a(\ln x)$

$Y = B + AX$

نقوم بالتحويل التالي:

$$y = bx^a \qquad \Rightarrow \qquad \ln(y) = \ln(b) + a\ln(x)$$

وبوضع:

$$Y = \ln(y) \qquad B = \ln(b) \qquad A = a \qquad X = x$$

نجد:

$$Y = AX + B$$

وهو تابع خطي نحصل فيه على الثوابت بالطريقة المعتادة.

حالة خاصة:

إذا كانت قيمة a معلومة فإننا نجد أن :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2a}}$$

مثال(15):

قرب البيانات التالية إلى التابع: $f(x) = bx^{3/2}$.

i	x_i	y_i
1	58	88
2	108	225
3	150	365
4	228	687

الحل:

وجدنا أن:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i x_i^{3/2}}{\sum_{i=1}^{4} x_i^3}$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i^{3/2} = (88)(58^{3/2}) + (225)(108^{3/2}) + (365)(150^{3/2}) + (687)(228^{3/2})$$

$$= 3327103.4640$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = (58^3) + (108^3) + (150^3) + (228^3) = 16682176$$

وبالتالي نجد:

$$b = \frac{3327105.4640}{16682176} = 0.19944062$$

مثال(16):

قرب البيانات التالية إلى التابع: $f(x) = \frac{1}{2} b x^2$.

i	x_i	y_i
1	0.2	0.1960
2	0.4	0.7850
3	0.6	1.7665
4	0.8	3.1405
5	1.0	4.9075

الحل:

وجدنا أن:

$$\frac{1}{2} b = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{5} x_i^4}$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2 = (0.1960)(0.2^2) + (0.7850)(0.4^2) + (1.7665)(0.6^2)$$
$$+ (3.1405)(0.8^2) + (4.9075)$$
$$= 7.6868$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = (0.2^4) + (0.4^4) + (0.6^4) + (0.8^4) + (1^4) = 1.5664$$

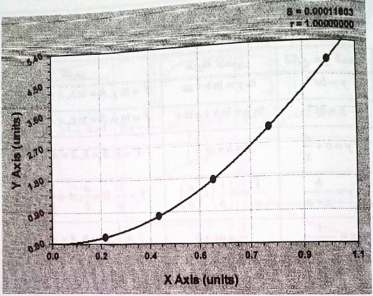
ومنه:

$$\frac{1}{2}b = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{5} x_i^4} = \frac{7.6868}{1.5664} = 4.9073$$

وبالتالي:

$$b = (4.9073)(2) = 9.8164$$

$$f(x) = 4.9073x^2$$



الشكل 22: البيانات و تابع التقريب للمثال 16

3-2-3 التقريب إلى توابع من أشكال أخرى:

يمكن تحويل بعض التوابع غير الخطية إلى تابع خطي من الشكل:

$$\boxed{Y = AX + B}$$

نهاية المحاضرة
الخامسة