25/4/2016   الاثنين   المحاضرة العاشرة

حساب تكامل استيلجس

الدالة الدرجية "$g(x)$"

برهنة (1): حساب تكامل استيلجس على الدالة الدرجية

برهنة (2): حساب تكامل استيلجس على الدالة $g(x)$

تعريف الدالة الدرجية:

إذا كانت $g(x)$ دالة معرفة على $[a,b]$

وتعاني انقطاعات من النوع الأول في عدد منتهٍ من النقاط الداخلية C_k حيث

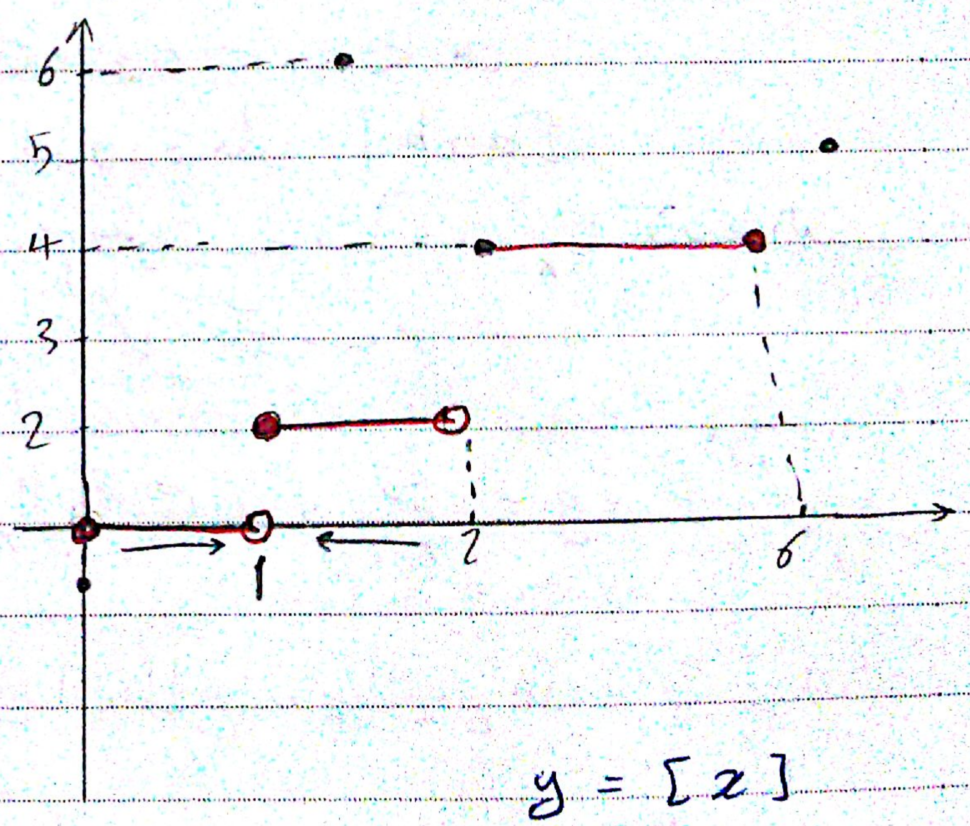
$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b$$

وإذا كانت $g(x)$ ثابتة في كل مجال مفتوح

$$]a, c_1[\ ,\ ]c_1, c_2[\ ,\ ]c_2, c_3[\ ,\ \cdots\ ,\ ]c_{n-1}, b[$$

عندئذٍ ندعو الدالة $g(x)$ أنها دالة درجية

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 2 & x \in [1,3[\\ 4 & x \in [3,6] \end{cases}$$



$y = [x]$

$$\underline{]0,1[}\ ,\ \underline{]1,3[}\ ,\ \underline{]3,6[} \qquad [0,6]$$

$$c_1 = 1\ ,\ c_2 = 3$$

ملاحظات:

القفزة عند نقطة انقطاع C_k (داخلية)

$g_k = g(c_k+0) - g(c_k-0)$

إذا كانت a نقطة انقطاع، القفزة عند a هي:

$g_a = g(a+0) - g(a)$

إذا كانت b نقطة انقطاع، القفزة عند b هي:

$g_b = g(b) - g(b-0)$

القفزات عند نقاط الانقطاع

النقطة الثابتة قفزتها صفر لأنها

لم تتحرك وبالتالي القفزات

فقط عند نقاط الانقطاع

$g_1 = g(1+0) - g(1-0)$

$= 2 - 0 = 2$

$g_3 = g(3+0) - g(3-0)$

$= 4 - 2$

مبرهنة (1)

إذا كانت $g(x)$ دالة درجية معرفة على $[a, b]$ مع قفزة

g_k عند C_k حيث $a < c_1 < c_2 \cdots c_n < b$

وإذا كانت f معرفة ومحدودة على $[a, b]$

حيث لا تكون g و f غير مستمرتين معاً عند C_k (من اليمين أو من اليسار)

فإن تكامل استيلجس $\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً

ويعطى بالشكل:

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\cdot g_k = f(c_1)\cdot g_1 + f(c_2)\cdot g_2$$

في هذه الحالة كل نقاط الانقطاع داخلية

وإذا كانت a و b نقطتي انقطاع من النوع الأول فإن:

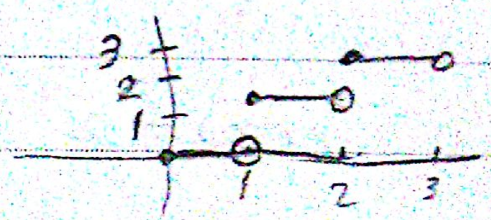
$$(S) \int_a^b f\,dg = f(a)\,g_k + \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\cdot g_k + f(b)\,g_b$$

مثال:

احسب تكامل استيلجس المعرف بالشكل:

$$I = \int_0^3 x^2 \, d\underbrace{[x]}_{\text{دالة درجية}}$$

إما نعود للشكل الرسم لرسمها



$f(x) = x^2 \quad : x \in [0, 3]$

$g(x) = [x] \quad : x \in [0, 3]$

عند 3 نقطة انقطاع فنطبق القسم الثاني من المبرهنة (1)

$g_1 = 1$

$g_2 = 1$

$g_3 = 1$

$$I = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1$$
$$= 1 + 4 + 9 = 14$$

مبرهنة (2)

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a, b]$
وكانت $g(x)$ دالة قفزات من نقاط انقطاع (من النوع الأول) في عدد منتهٍ من النقاط c_k
حيث $a < c_1 < \dots < c_n < b$
ولنفرض أن $g'(x)$ $\underbrace{\text{موجود}}_{\text{أي له قيمة واحدة فقط}}$ ومحدود على المجال $[a, b]$ باستثناء نقاط الانقطاع
حيث:

$$\int_a^b |g'(x)| \, dx < \infty$$

عندئذٍ تكامل استيلجس يكون موجوداً ويُعطى بالعلاقة:

$$(S) \int_a^b f \, dg = \int_a^b f \, g' \, dx + \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \, g_k$$

وإذا كانت a و b نقطتي انقطاع من النوع الأول عندئذٍ العلاقة تكتب بالشكل:

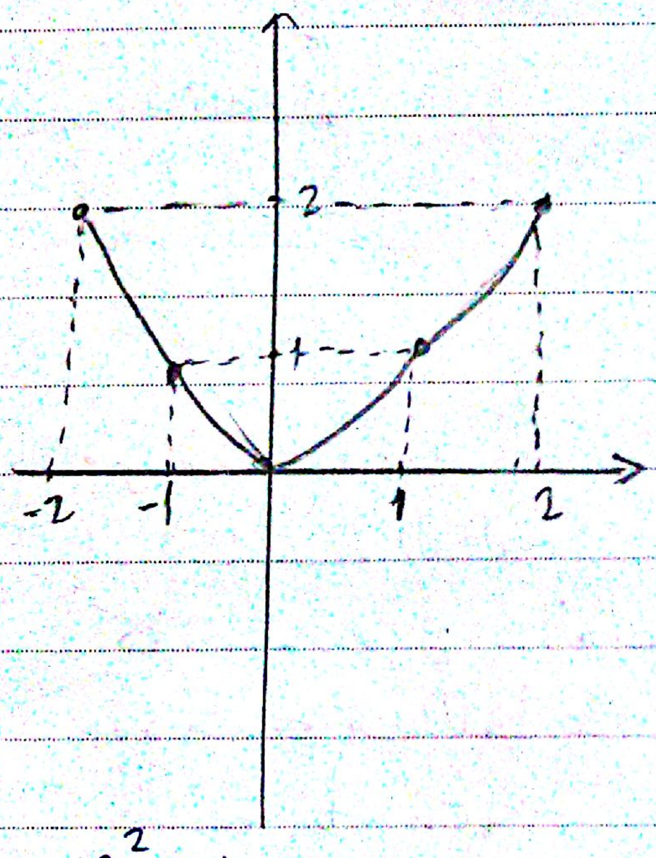
$$(S) \int_a^b f \, dg = \int_a^b f \, g' \, dx + f(a) \, g_a + \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \, g_k + f(b) \, g_b$$

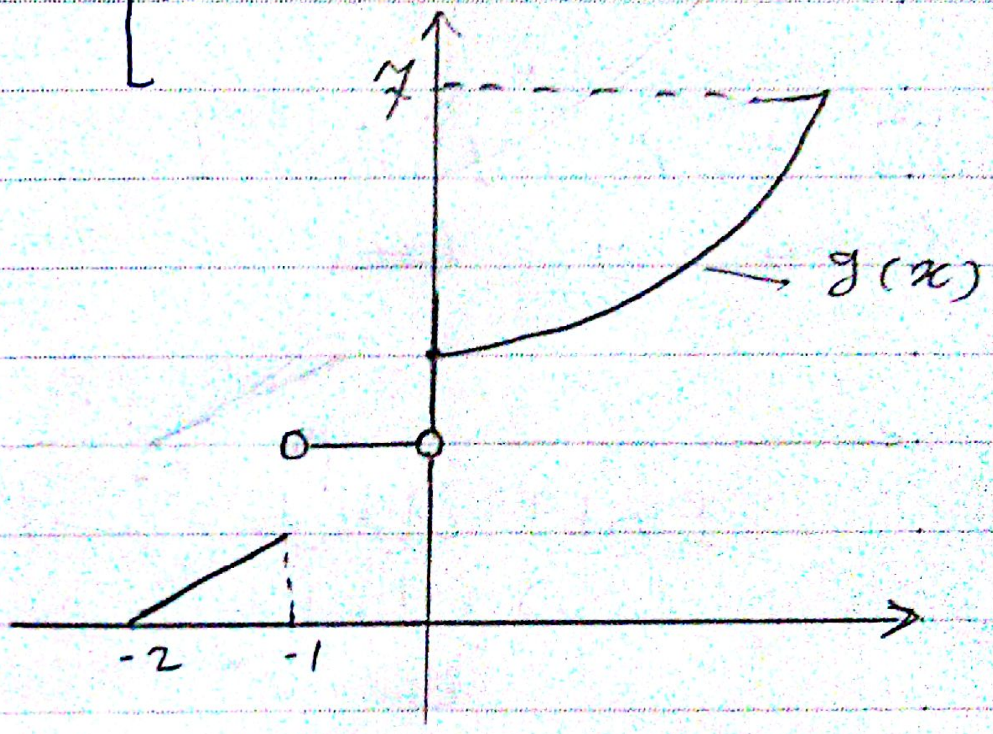
مثال:

احسب قيمة تكامل استيلجس المعطى بالشكل:

حيث: $I = \int_{-2}^{2} f \, dg$

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x \le -1 \\ 2 & -1 < x < 0 \\ x^2+3 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$





$c_1 = -1 \qquad c_2 = 0$

$$I = \int_{-2}^{2} f \, dg$$

$$= \underbrace{\underset{(R)}{\int_{-2}^{-1} x^2 (1)\, dx} + \int_{-1}^{0} \cancel{x^2 (0)}\, dx + \underset{(R)}{\int_{0}^{2} x^2 (2x)\, dx}}_{\int_a^b f g' \, dx}$$

تكامل ريمان

$$+ f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right] + f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$$

$$(1)\left[2-1\right] + (0)\left[3-2\right]$$

$$I = \int_{-2}^{2} f \, dg = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}\left[x^4\right]_{0}^{2} + 1$$

$$= \frac{1}{3}\left[-1+8\right] + \frac{1}{2}\left[16\right] + 1 = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3}$$

انتهى