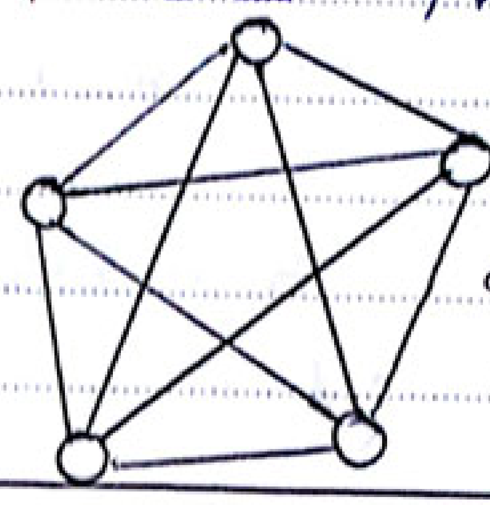
✱ إثبات المبرهنة من المحاضرة السابقة سيكون في محاضرة لاحقة.

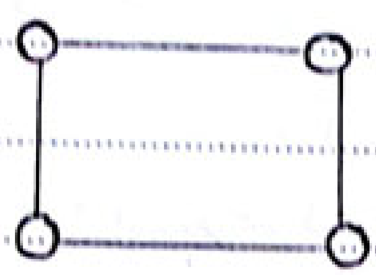
- البيانات المنتظمة :

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ ، بحيث يكون $|V|=n$ و $E\neq\phi$ عندئذ : نقول عن البيان G إنه منتظم من الدرجة r ، حيث $r\geq 1$ ، $r\in\mathbb{Z}^{*+}$ إذا تحقق : $deg(x)=r$ ، $\forall x\in V$

مثال :



منتظم من الدرجة الرابعة



منتظم من الدرجة الثانية

مبرهنة : ليكن $G=(V;E)$ بيان بسيط منتظم من الدرجة r حيث $r\geq 1$; $r\in\mathbb{Z}^{*+}$ فإن

$$|E|=\frac{n.r}{2}$$

سؤال دورة

الإثبات : نعلم أن عدد أضلاع البيان يعطى بالعلاقة التالية

$$\sum_{x\in V} deg(x)=2|E| \Rightarrow$$

$$\sum_{x\in V} r = n*r \Rightarrow 2|E|=n*r$$
$$\Rightarrow |E|=\frac{n*r}{2}$$

تعريف : ليكن لدينا البيان $K_n=(V;E)$ بيان بسيط تام فإن $deg(x)=n-1$ ، $\forall x\in V$

مبرهنة : إذا كان لدينا $G=(V;E)$; $|V|=n$, $|E|\neq\phi$ بيان بسيط ، تام فإن

سؤال دورة

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

الإثبات :

لدينا G بيان منتظم من الدرجة $(n-1)$

نعلم أن

$$\sum_{x \in V} deg(x) = 2|E| \Rightarrow$$

$$\sum_{x \in V} (n-1) = 2|E| \Rightarrow n(n-1) = 2|E|$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

تعريف البيان المتعدد الأجزاء: هو بيان عليه تجزئة مجموعة عقده إلى عدة مجموعات ، أي : $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$

حيث :

① $\forall x \in V_i \;;\; x \notin V_j \;;\; j \neq i$

$V_i \cap V_j = \phi \;;\; i \neq j$

② $\forall e \in E \;;\; e = (x, y) \;;\; x \in V_i \wedge y \in V_j \;;\; i \neq j$

البيان الزوجي (الثنائي) : Bigraph "ثنائي التجزئة"

$G = (V_1, V_2 ; E)$ حيث: $V_1 \cap V_2 = \phi$,

$\forall e = (x, y) \in E \;;\; x \in V_1 \wedge y \in V_2$

مبرهنة: ليكن لدينا البيان الزوجي (البسيط والمترابط) $G = (V_1, V_2 ; E)$ التام سؤال دورة

حيث , $|V_1| = n \;,\; |V_2| = m \;,\; E \neq \phi$

عندئذ : $|E| = m * n$

الإثبات : لدينا البيان G بيان تام ولنثبت أنه $|E| = m * n$

$\Rightarrow$ في G : $\forall x \in V_1 \;;\; deg(x) = m$

$\forall y \in V_2 \;;\; deg(y) = n$

نعلم أنّ

$$\sum_{x\in V_1} deg(x) + \sum_{y\in V_2} deg(y) = 2|E|$$

$$(n*m) + (n*m) = 2|E|$$

$$2(n*m) = 2|E|$$

$$|E| = (n*m)$$

- لنثبت ذلك في حالة أنّ البيان G لدينا غير تام أي لنثبت أنّه

$$|E| \leq n*m$$

نفرض أنّ G ليس تاماً لكنّه بسيط ومترابط ، فإنّه:

$$\forall x \in V_1 \quad ; \quad deg(x) \leq m$$

$$\forall y \in V_2 \quad ; \quad deg(y) \leq n$$

ومنه

$$\sum_{x\in V_1} deg(x) + \sum_{y\in V_2} deg(y) \geqslant 2|E|$$

$$(n*m) + (n*m) \geqslant 2|E|$$

$$2(n*m) \geqslant 2|E|$$

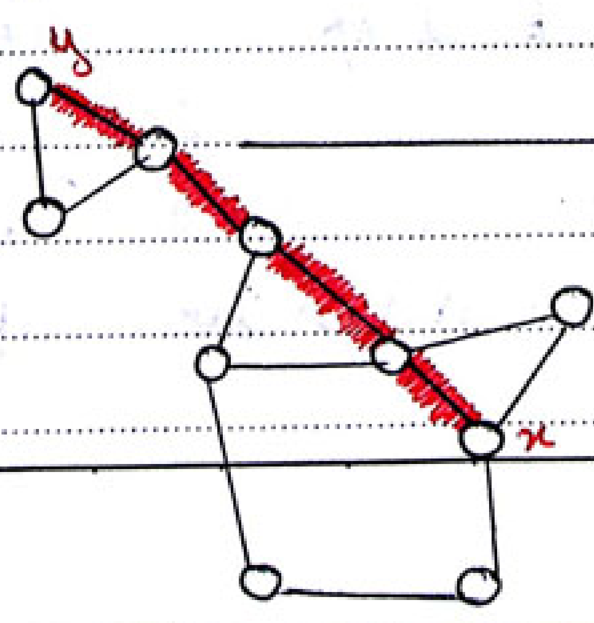
$$\Rightarrow \quad |E| \leq (n*m)$$

تعريف المسافة بين عقدتين: ليكن لدينا البيان $G=(V,E)$ بيان بسيط ومترابط (ليس بالضرورة أن يكون تاماً) عندئذٍ:

$\forall x,y \in V \quad ; \quad x \neq y \quad : \quad d(x,y)$ هي أقصر مسار من x إلى y

---

مثال: ليكن لدينا البيان التالي



- طول المسافة بين عقدتين هي عدد الأضلاع في أقصر ممر.
- أو مجموعة أوزان أضلاع أقصر ممر.

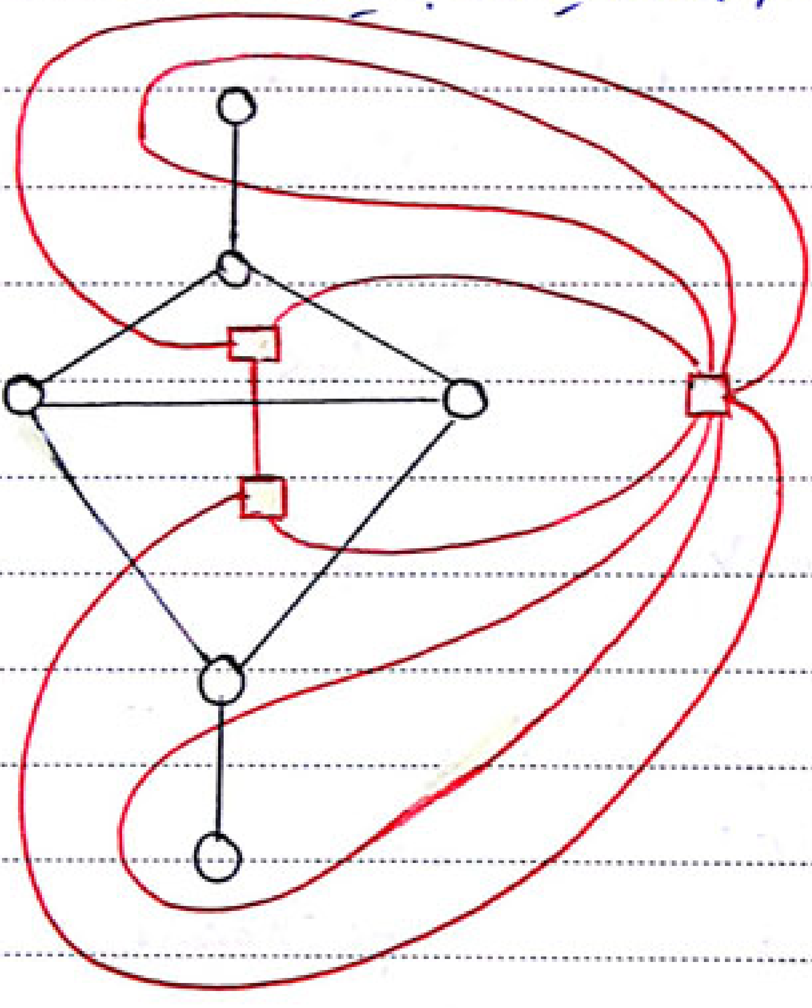
البيان المرافق

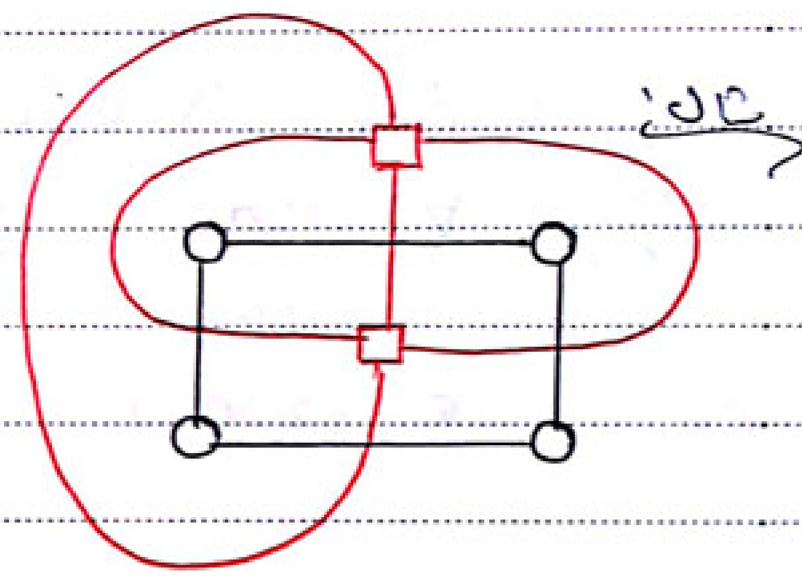
مهم

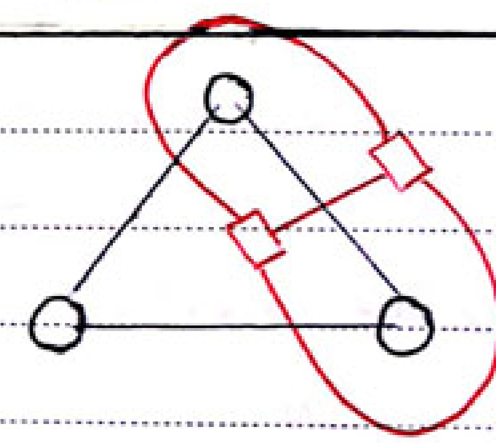
لتكن لدينا البيان البسيط و المترابط $G=(V;E)$ ، البيان المرافق لهذا البيان هو بيان ينتج عن البيان الأصلي بحيث تقابل كل وجه عقدة و الأضلاع هي الوجوه المتجاورة.

ملاحظة: البيان المرافق ليس بالشرط أن يكون بسيط.

مثال:







مهم

مبرهنة / لتكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بحيث $|V|\neq\phi$ ، $|E|\neq\phi$ حيث G بيان بسيط و مترابط عندئذٍ:

G بيان زوجي $\Longleftrightarrow$ G لا يحوي دارة فردية.

سؤال دورة

الإثبات:

الحالة الأولى: G بيان زوجي $\Longleftarrow$

$G = (V_1, V_2 ; E) \quad ; V_1 \cap V_2 = \phi$

$\forall e \in E \quad , e = (x, y) \quad ; \quad x \in V_1 \quad , \quad y \in V_2$

لتكن لدينا الدائرة التالية

$C = \langle v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots \ldots e_{n-1}, v_n \rangle \subseteq G$

لنثبت الآن أنّ هذه الدائرة زوجية "عدد أضلاعها زوجي"

لدينا

$v_1 = v_n \Longleftarrow$ دائرة C

C دائرة بسيطة (لا يوجد تكرار عقد)

نفرض $v_1 \in V_1$

وهكذا ... $\Rightarrow v_1 \notin V_2 \wedge v_2 \in V_2$

$\Rightarrow \forall i = 1 : n$ فردي

عندئذٍ يكون $v_i \in V_1$

$\wedge \quad \forall j = 2 : n-1$ زوجي

يكون $v_j \in V_2$

$\Rightarrow$ n عدد فردي $\Rightarrow$ $(n-1)$ زوجي

$\Rightarrow |C|$ زوجي

الآن التالي: $\forall C \subseteq G$ دائرة بسيطة زوجية

عندئذٍ يكون G بيان زوجي, لنثبت ذلك

حتى يكون G بيان زوجي (ثنائي) يجب أن يتحقق

$V_1 \cap V_2 = \phi \quad \wedge \quad V_1 \cup V_2 = V$

نعرف $V_1 \; , \; V_2$ كما يلي:

$V_1 = \{ x : x \in V \; , \; d(x, y)$ فردي $\}$

$V_2 = \{ l : l \in V \; , \; d(l, z)$ زوجي $\} = V - V_1$

$\forall x, y \in V_1 \quad , x \neq y$

ولنثبت أنّ $(x,y) \notin E$ يتم الاثبات بنقض الفرض

لنفرض جدلاً أنّ $e = (x,y) \in E$

$\exists z \in V_2$;

فردي $d(x,z)$ } حسب تعريف

فردي $d(z,y)$ } المجموعات

وبالتالي سيكون لدينا الممرين

أزواج

زوجية $L_1 = \langle x, e_1, x_2, \ldots\ldots, z \rangle$

$L_2 = \langle z, \ldots\ldots, y \rangle$

$$C = L_1 \cup L_2 \cup e = (x,y)$$

$$\Rightarrow |C| = \text{فردي} + \text{فردي} + 1 = \text{فردي}$$

$\{z\} = L_1 \cap L_2$ وهذا تناقض وذلك كدائرة

$$\Rightarrow e = (x,y) \notin E$$

الإثبات العكسي تابع بالمحاضرة القادمة ...

انتهت.

- تتمة إثبات المبرهنة من المحاضرة السابقة

الحالة الثانية :

G بيان زوجي $\Rightarrow$ دائرة زوجية $\forall C \subseteq G$

تم إثبات أنه في حالة $e=(x,y) \notin E$ في حالة عدم وجود أي عقدة مشتركة بين الممرين

الآن في حالة أن الدائرة C ليست دائرة بسيطة ومنه على الأقل سيكون لدينا عقدة مكررة تختلف عن عقدة البداية والنهاية ومنه

$\exists i = 1:n-1 \quad , \quad 1 \leq i < n \quad \wedge$

$\exists j = 1:m-1 \quad , \quad 1 \leq j < m$

ومنه $\exists \; x_i = y_j$

لدينا عدة حالات ($i=j$ أو $i<j$ أو $i>j$)

لنثبت أن $i=j$

من أجل $i<j$ فإن $L = L_1 \cup L_2 =$

$< x, \ldots\ldots, x_i = y_j, \ldots\ldots y >$

$\Rightarrow$ لدينا ممر من x إلى z ، أصغر من الممر الذي تم اختياره وهذا تناقض

من أجل $i>j$ بنفس الطريقة نحصل على تناقض ومنه نستنتج أنه $i=j$ هي فقط الحالة الممكنة لدينا .

- الأشجار :

مفهوم الأشجار له تطبيقات متعددة في بناء الشبكات الالكترونية وعبر الالكترونية وبناء شجرة العائلة على المستوى الاجتماعي وعليه استخدامها أيضاً لحساب الكلفة الأصغرية لتنفيذ نشاط معين

مفاهيم الأشجار :

الشجرة هي عبارة عن بيان مترابط تحقق الخواص التالية :

- إذا كان لدينا البيان $G=(V;E)$ بيان مترابط وبسيط بحيث

$|V|=n$, $E \neq \phi$

وإذا حقق البيان G مايلي :

① حذف أي ضلع من البيان نحصل على بيان غير مترابط , أي أن أي ضلع في البيان هو عبارة عن جسر , ونرمز له عندئذ بالرمز :

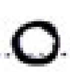
$T=(V;E)$

ملاحظة: عدد أضلاع بيان الشجرة يساوي $(n-1)$

$|E|=n-1$

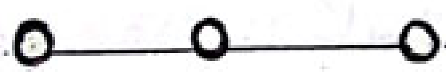
أمثلة على الحالات الممكنة : "لجميع الحالات $|E|=(n-1)$"

$n=1$ عقدة واحدة .



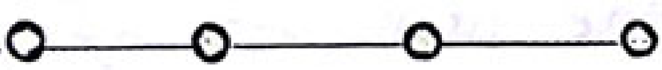
$n=2$ عقدتين

$n=3$ ثلاث عقد .



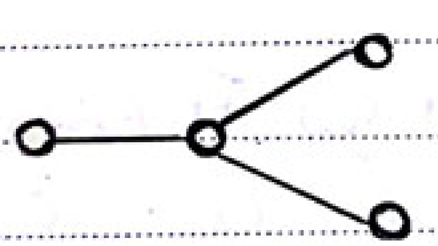
$n=4$

حالة أولى

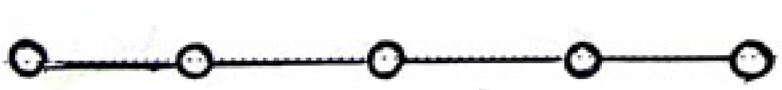


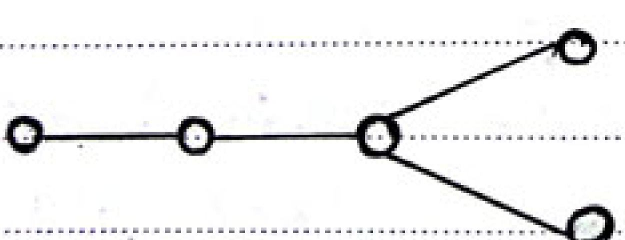
فقط حالتان .

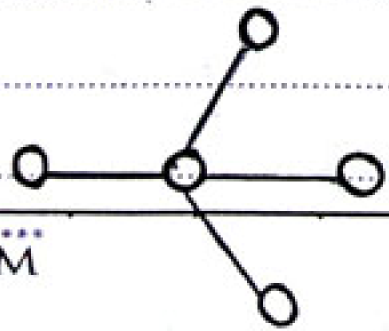
حالة ثانية



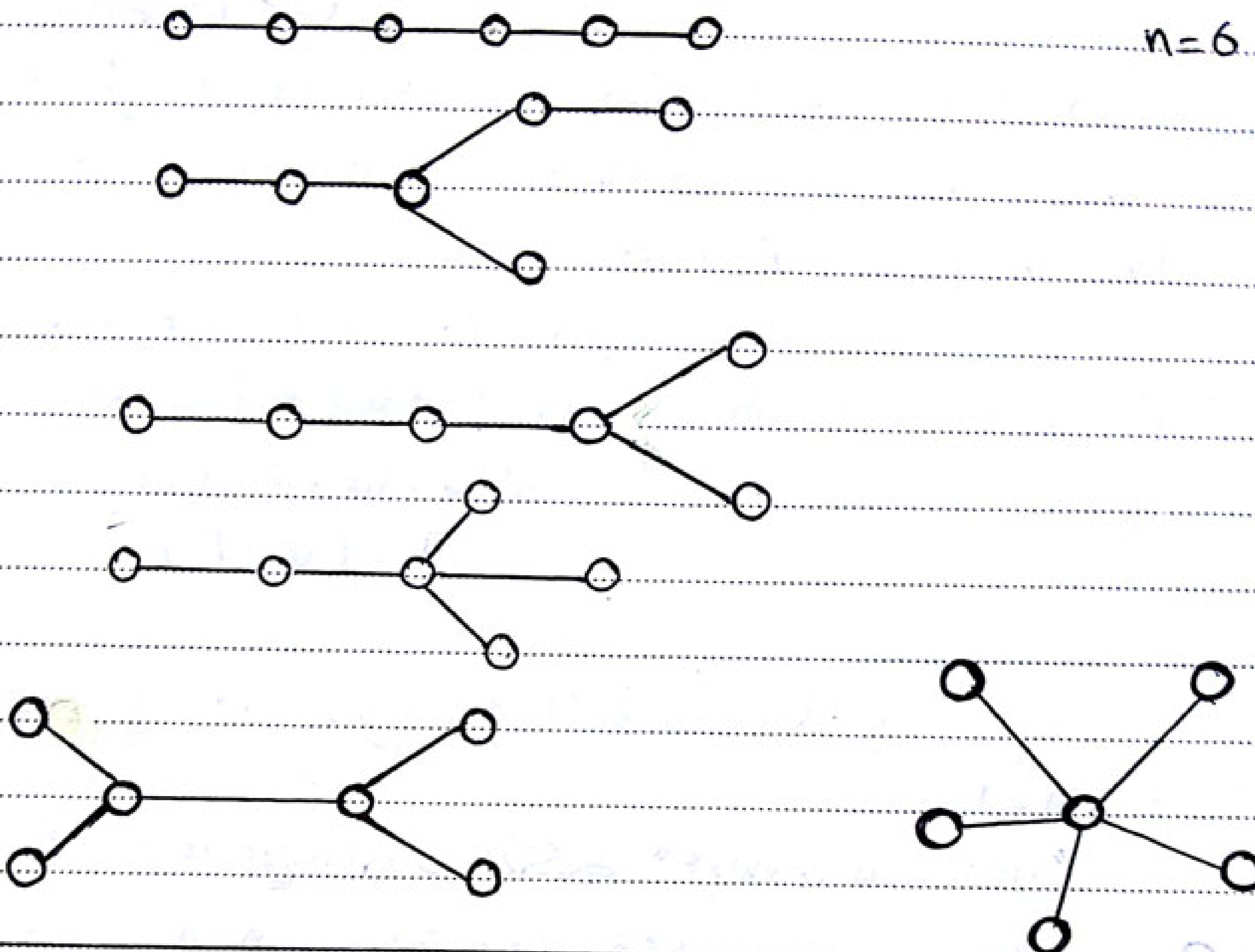
$n=5$







$n=6$



تعريف: نقول عن البيان انه شجرة إذا كان لا يحوي أي دائرة

ملاحظة: إذا كان البيان مكون من عدة مركبات و كان هذا البيان شجرة نسمي البيان "غابة".

مبرهنة: لتكن لدينا الشجرة $T=(V;E)$ عندئذٍ $|E|=n-1$

الإثبات: يتم الإثبات بالاستقراء الرياضي

من أجل $|E|=0 \Leftarrow n=1$

$|E|=1 \Leftarrow n=2$

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $|E|=K-1 \Leftarrow n=K$

و لنثبت صحتها من أجل $n=K+1$

من أجل $|V'|=K+1 \Leftarrow n=K+1$

و لتكن الشجرة $T'=(V';E')$

وبالتالي $\exists x \in V' \quad , deg(x) = 1$

$\Rightarrow \exists e' = (x, y) \in E'$

الآن نحذف x

$T'' = (V' - \{x\} \; ; E'' = E' - \{e\})$

$|V' - \{x\}| = K$

$\Rightarrow E'' = |E' - \{e\}| = K - 1$

وذلك حسب الفرض ، بإضافة الضلع الذي حذفناه نجد مايلي

$T' = (V' \; ; E')$

$|E'| = K \quad ,$

$|V'| = K + 1$

ومنه المبرهنة صحيحة دوماً .

مبرهنة : ليكن لدينا البيان الشجرة $T = (V ; E)$ عندئذٍ

$\exists x, y \in V \; : deg(x) = deg(y) = 1$

الإثبات : ليكن $x, y \in T$

ونبحث عن جميع الممرات في البيان

$L_1, L_2, \dots, L_n$

سيكون لدينا على الأكثر L_n ممر

وليكن المجموعة A هي أطوال الممرات

$A = \{ |L_1|, |L_2|, \dots, |L_n| \}$

وهي مجموعة أعداد صحيحة ، A مجموعة مرتبة

$\Leftarrow$ الممر L ينتمي لمجموعة الممرات بحيث

$L \in \{L_1, \dots, L_n\} : |L| = \max\{|L_1|, \dots, |L_n|\}$

أي L هو أطول ممر في البيان

بحيث $L = \langle x_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n \rangle$

لتكن $x = x_1$

$x_n = y$

ولنثبت أنّ $\deg(x_1) = 1 = \deg(x)$

$\deg(x_n) = \deg(y) = 1$

لنفترض أن $\deg(x) > 1$

$\Rightarrow \exists z \in V : e = (x, z) \in E \Rightarrow$

$z \neq x_n = y$

(وذلك لأن البيان شجرة فهو لا يحوي دائرة)

وبالتالي وجدنا مجرى L' بحيث

$L' = \langle z, x = x_1, \ldots, x_n = y \rangle$

$|L'| > |L|$

وهذا تناقض $\Leftarrow$ $\deg(x) = 1$

وبنفس الطريقة نثبت أن $\deg(y) = 1$

ملاحظة: إذا كان البيان لا يحوي دائرة فإن البيان شجرة وعدد أضلاعه يساوي $(n-1)$

الإثبات: إذا كان البيان شجرة حسب المبرهنة السابقة $|E| = n-1$ حيث $|V| = n$

إذا كان البيان لا يحوي دائرة لنثبت أن البيان شجرة ولدينا البيان عدد أضلاعه يساوي $(n-1)$.

- إذا لم يكن البيان شجرة فيوجد ضلع واحد على الأقل ليس جسر، لتكن $G = (V; E)$ بيان لا يحوي دائرة،

$|E| = n-1$, $|V| = n$

لنفرض أن G ليس شجرة

$\Rightarrow e \in E$

حيث يكون e ليس جسر $\Leftarrow$ $G-\{e\}$ بيان مترابط

وبالتالي $G' = (V ; E' = E - \{e\})$ ومنه

$|V| = n \quad , \quad |E'| = (n-1) - 1 = n-2$

وهذا تناقض $\Leftarrow$ البيان لا يحوي دارة $\Leftarrow$ البيان شجرة

نتيجة (I) يكون البيان شجرة إذا وفقط إذا كان كل ضلع في البيان هو جسراً.

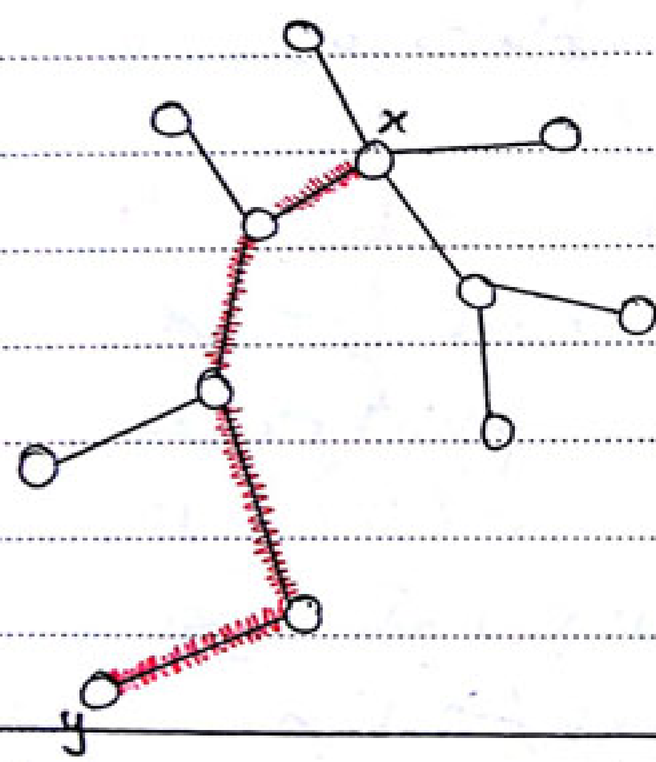
الإثبات: البيان شجرة $\Leftarrow$ كل ضلع هو جسر، حسب الملاحظة السابقة

- إذا كان كل ضلع هو جسر لنثبت أن البيان شجرة، لدينا البيان مترابط وكل ضلع هو جسر فكل ضلع في البيان لا ينتمي لدارة.

(II) إذا كان البيان $T = (V ; E)$ شجرة (بسيط ومترابط) عندئذٍ:

$\forall x, y \in V \quad : \quad x \neq y$

يوجد ممر وحيد بينهما



الإثبات: لو كان الممر

$L = \langle x, \ldots\ldots, y \rangle$

ليس وحيداً $\Leftarrow$ يوجد ممر ثاني

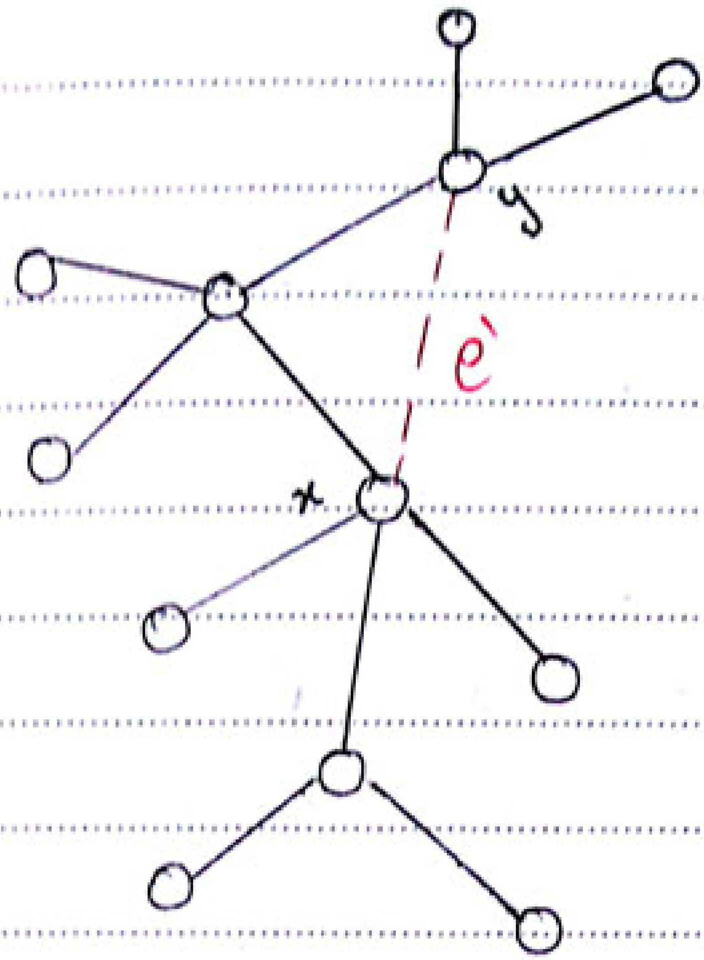
$\Leftarrow$ البيان يحوي دارة

وهذا تناقض كون T شجرة

$\Leftarrow$ الممر وحيد.

(III) لتكن الشجرة $T = (V ; E)$ إضافة أي ضلع يصل بين عقدتين غير متجاورتين فإننا نحصل على دارة واحدة.

الإثبات:



x,y

عقدتان مختلفتان وحسب النظرية السابقة

يوجد ممر أي:

$x,y\in V \quad , \quad x\neq y$

$\Rightarrow \exists\ w=\langle x,\ldots,y\rangle$

إنّ

$w\cup\{e'\}=C$

لنثبت أن الدائرة C وحيدة

نفرض وجود دائرة C'

$e'\in C \wedge e'\in C'$

حيث $C\neq C'$

ومنه $w\subseteq C \ : \ w=\langle x,\ldots,y\rangle$

$w'\subseteq C' \ : \ w'=\langle x,\ldots,y\rangle$

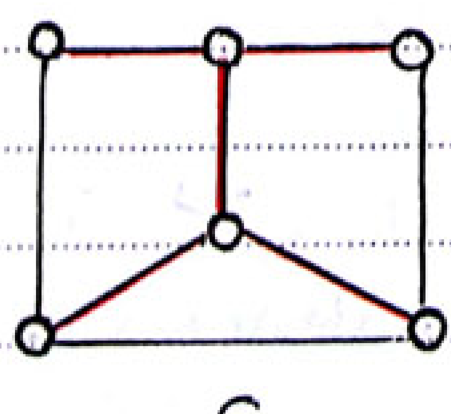
- وجدنا ممران بين x و y ⇐ تناقض

إذاً - وجدت دائرة والبيان الشجرة لا يحوي دائرة، وهذا تناقض

الشجرة المشدودة على البيان:

هي شجرة عقدها جميع عقد البيان و أضلاعها مجموعة جزئية من مجموعة أضلاع البيان وبالتالي هي بيان جزئي وبيان مولّد للبيان الأصلي.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي



G

- وجدنا شجرة مشدودة.
- يمكن أن يوجد أكثر من شجرة مشدودة على البيان.
- هي بيان جزئي من البيان الأصلي

$T\subseteq G$

هي بيان جزئي مولّد للبيان الأصلي.

- الشجرة المولّدة هي أصغر بيان جزئي يولّد البيان. أي: الشجرة المشدودة هي أصغر بيان جزئي يولد البيان.

- أي بيان يحوي عدّة أشجار لكن ليست كل شجرة تكون مولّدة.

- أي شجرة غير مشدودة على البيان لا عكن أن تكون مولّدة للبيان (لا تولد البيان).

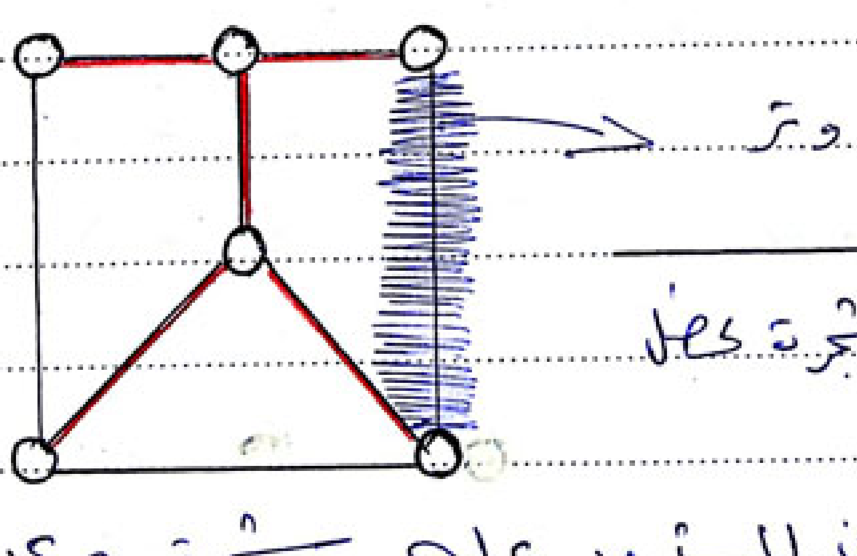
- إذا كان البيان موزون فإن أصغر شجرة مشدودة على البيان (يكون مجموع أوزانها أصغري) نسميها السقالة. إذاً: الشجرة المشدودة على البيان الأصغري تسمى السقالة "البيان موزون".

ملاحظة: يكون البيان مترابط إذا فقط إذا وجدت شجرة مشدودة على هذا البيان.

تعريف: ليكن لدينا بيان $G=(V;E)$ ولتكن $T=(V;E')$ شجرة مشدودة على البيان حيث $E'\subseteq E$ إذا وجد

$e\in E$: $e\notin E'$

نسميه وتر.



ملاحظة: إضافة أي وتر للشجرة يحصل على دائرة

⟸ عدد الدوائر في البيان المشدود عليه شجرة = عدد الأوتار.

* في البيان السابق لدينا ثلاث أوتار

⟸ لدينا 3 دوائر بسيطة.

/ مبرهنة: / إذا كان البيان $G=(V;E)$ ، $|V|=n, |E|=m$ سؤال دورة

و لتكن $T=(V;E')$ شجرة مشدودة على البيان G

فإن عدد الأوتار r

$$r=m-n+1$$

الإثبات: لدينا T شجرة

$|E'|=n-1$,

$|V|=n$,

$|E|=m$

$\Rightarrow$ (عدد الأوتار) $r=m-(n-1)=m-n+1$

تعريف الدائرة الأساسية في البيان: هي دائرة تحوي وتر واحد.

★ ماهي مصفوفات الدوائر في البيان،

ماهي مصفوفات الدوائر الأساسية في البيان، ماهي مجموعات القطع في البيان، ماهي مجموعات القطع الأساسية في البيان.؟

انتهت

مراجعة من المحاضرة السابقة:

نظرية: $G=(V;E)$ بيان مترابط $\Longleftrightarrow$ وجدت شجرة مشدودة على البيان.

ملاحظة: الشجرة المشدودة على البيان هي بيان جزئي مولد للبيان الأصلي.

ملاحظة: السقالة، هي شجرة مشدودة على البيان أصغرية.

تعريف الوتر: هو ضلع لا ينتمي إلى الشجرة المشدودة على البيان، وينتمي إلى البيان الأصلي.

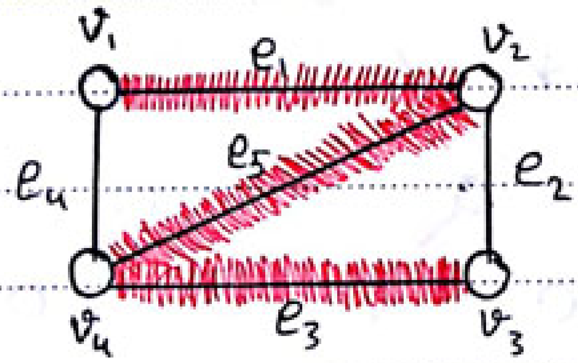
مبرهنة "عدم إثباتها": إذا كان لدينا البيان $G=(V;E)$ بحيث $|E|=m$ ، $|V|=n$ فإن عدد الأوتار يساوي $(m-n+1)$

تعريف الدائرة الأساسية: هي دائرة تحوي وتر واحد فقط.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي

- أخذنا منه شجرة

- لدينا



$c_1=\langle e_2, e_3, e_5\rangle$

هي دائرة أساسية فيها وتر واحد

أيضاً هي دائرة أساسية $C_2=\langle e_1, e_5, e_4\rangle$

هي دائرة عادية ليست أساسية $C_3=\langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$

لأنها تحوي وترين.

ملاحظة: اختلاف الشجرة المشدودة على البيان لا يغير من عدد الدوائر الأساسية في البيان.

ملاحظة: عدد الأوتار يساوي عدد الدوائر الأساسية.

ترقيم العقد: يمكن ترقيم عقد أي بيان بعدة طرق.

مبرهنة/ "بدون برهان" ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بيان بسيط و مترابط بحيث $|V|=n$, $|E|=m$ يمكن أن نرقم عقد هذا البيان بـ

$2\binom{n}{2}$ طريقة

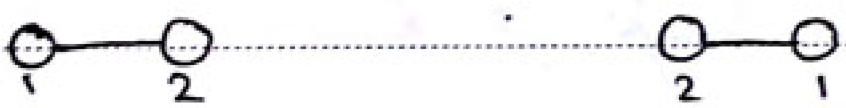
توافيق

حيث

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}$$

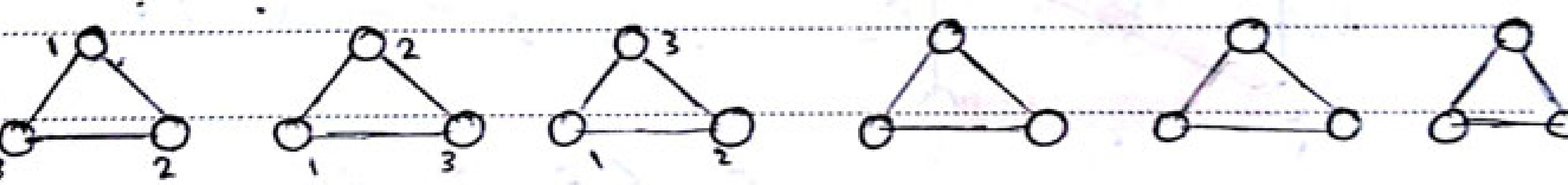
مثال: من أجل $n=2$ لدينا

$$\binom{2}{2}=\frac{2!}{2!\,0!}=1 \Rightarrow 2*1=2$$



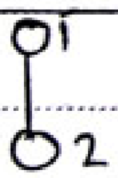
من أجل $n=3$

$$\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\,(1)!}=6/2=3 \Rightarrow 2*3=6$$

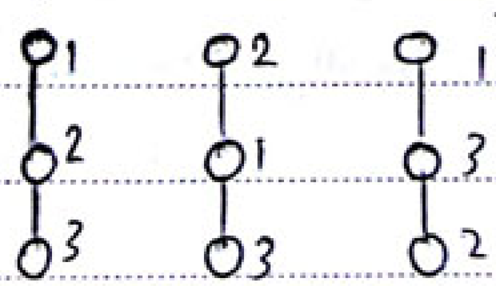


- إذا كانت لدينا $T=(V;E)$ شجرة بحيث $|V|=n$ عندئذ يمكن ترقيم عقد هذه الشجرة بـ n^{n-2} طريقة

مثال: $n=2$ $\quad 2^{2-2}=2^0=1$ طريقة



$n=3$ $\quad 3^{3-2}=3^1=3$ طريقة

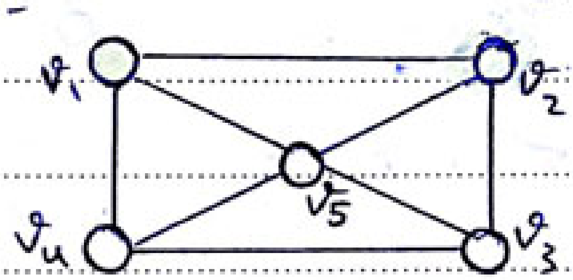


مبرهنة كيرشوف :/ لتكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بيان بسيط وَمترابط
حيث $|V|=n,\ |E|=m$ ،
ومصفوفة التجاور A_G ، ومصفوفة القدرة D_G ،
ومصفوفة الإدخال Q_G .

$$Q_G=D_G-A_G$$

إذا حذفنا سطر وَعمود يقابل هذا السطر ، أي لو حذفنا السطر (i)
وَالعمود (i) من المصفوفة Q_G ، يكون لدينا المصفوفة Q_{Gi}
عندئذٍ يكون : عدد الشجرات في البيان G $=\det(Q_{Gi})$

ملاحظة: إن قيمة المحدد للمصفوفة Q_{Gi} مستقلة عن الدليل (i)
طبق ذلك على البيان التالي :



الآن / مبرهنة كيرشوف / لتكن لدينا البيان الموزون $G=(V;E)$
بيان بسيط وَمترابط ، حيث $|V|=n,\ |E|=m$
أطوال أوزانه مختلفة مثنى مثنى . عندئذٍ توجد شجرة أصغرية
وحيدة H

"الإثبات سيكون بالمحاضرة القادمة"

الأشجار المرتبة :

الأشجار المرتبة هي أشجار نرتب عقدها وفق مستويات مختلفة بعد
أن نختار إحدى عقد هذه الشجرة وَنعتبرها جذر ، تقابل Root
المستوى الصفري ،

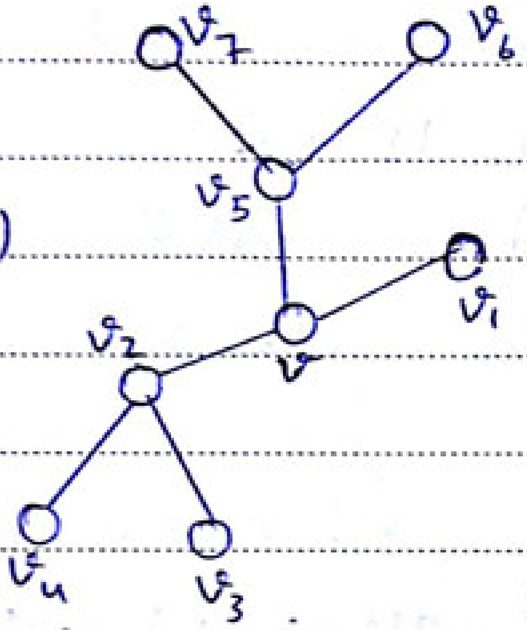
مثال على ذلك : لتكن لدينا الشجرة التالية : $T=(V;E)$ حيث
$|V|=n,\ \ |E|=n-1$

سنرتبها ضمن مستويات :

$T=(V;E)$

$|V|=8$

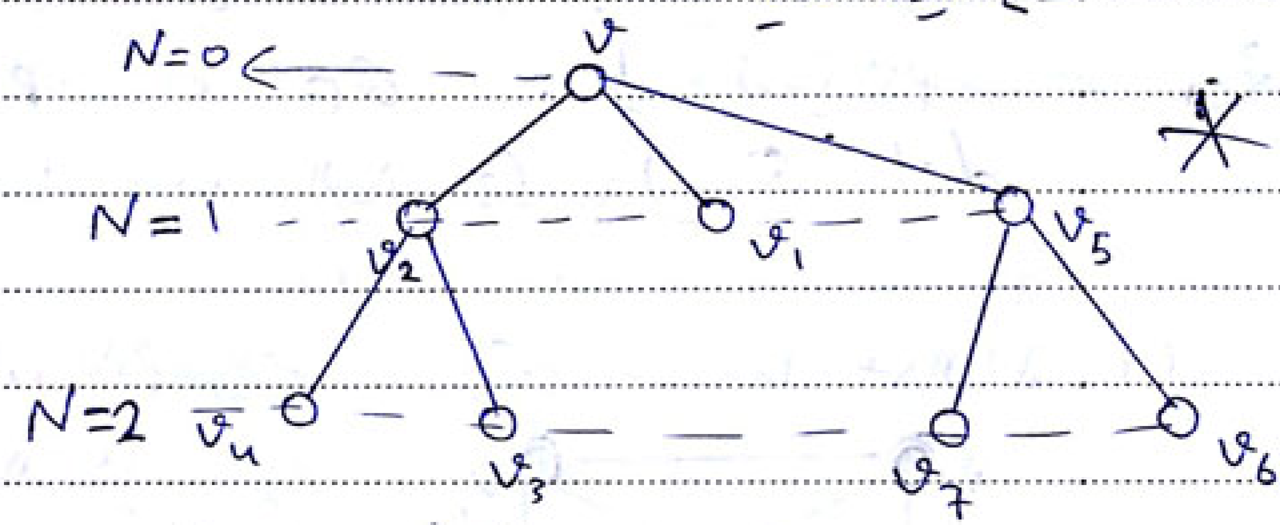
$|E|=7$



T شجرة لنجعلها شجرة مرتبة

نختار مثلاً عقدة v نعتبرها جذر Root

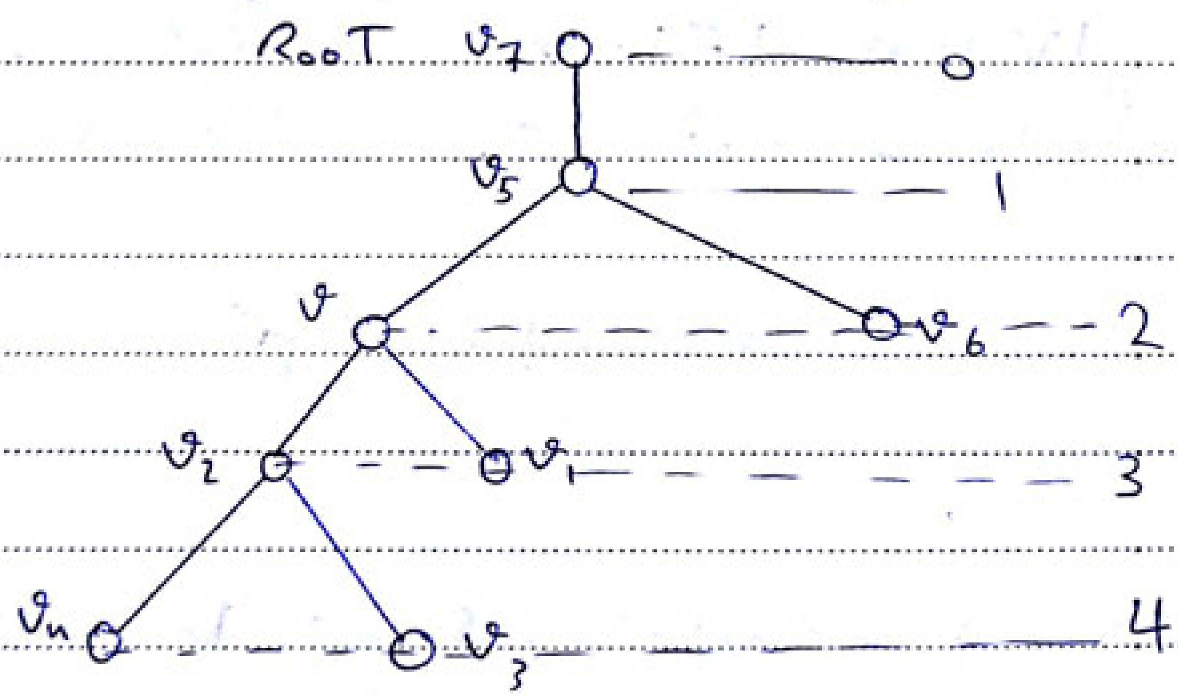
⟸ يكون لدينا



⟸ هذه الشجرة ارتفاعها = عدد مستوياتها = 2

مثلاً ، عند اختيار v_7 هي الجذر ، تعطينا شجرة أخرى :

ارتفاعها = 4 :



العقدة الداخلية Internal vertex

$x \in V$; x عقدة داخلية $\Longleftrightarrow$ $\deg(x) \geq 2$

العقد المعلقة / ورقة /: Pendent vertex $y \in V$

y عقدة معلقة $\iff deg(y) = 1$

ملاحظة: إذا وجد حد يربط بين عقدة داخلية وعقدة معلقة سمي هذا الحد فرع.

تعريف: لتكن لدينا الشجرة $T = (V; E)$ ، حيث

$|V| = n \quad , \quad |E| = n-1$

ولتكن $x \in V$ ، إذا كانت العقدة x واقعة في المستوى (i) سمي مجموعة العقد

$M = \{y : e = (x,y) \in E$ ، y في المستوى $(i-1)$ $\}$

سمي المجموعة M مجموعة السلف "مجموعة عقد السلف".

ولتكن $N = \{z : e = (x,z) \in E$ ، z في المستوى $(i+1)$ $\}$

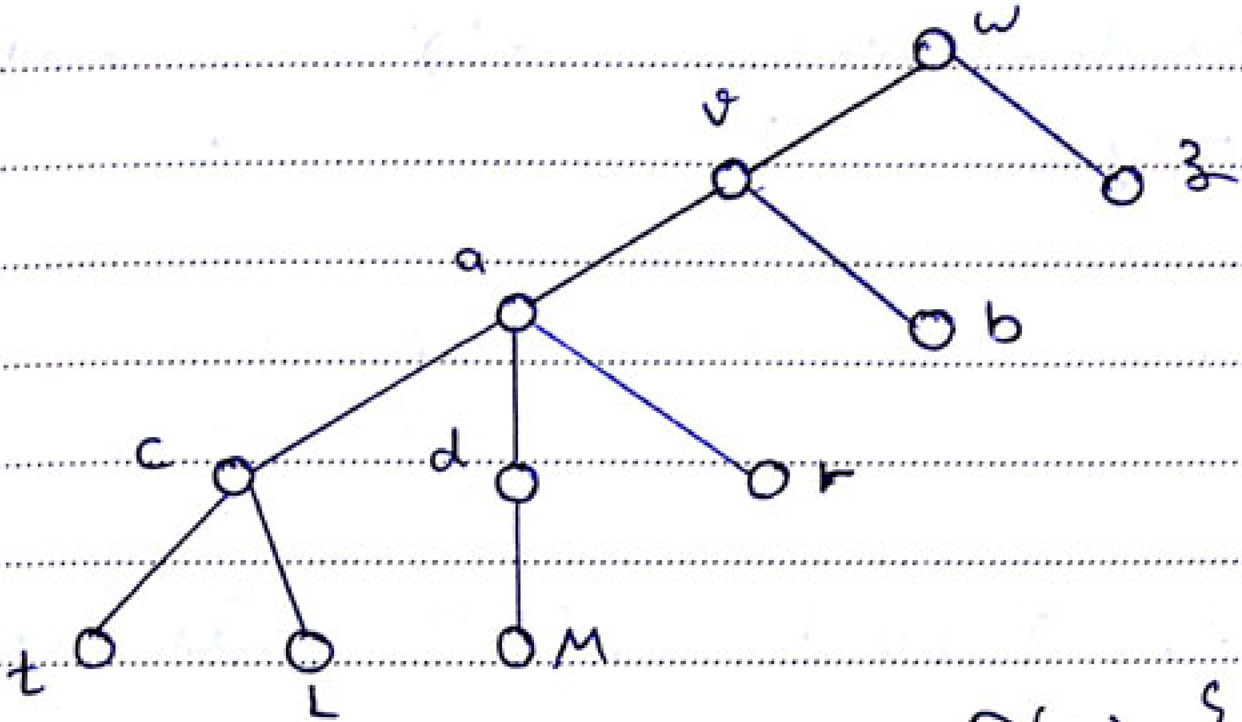
سمي المجموعة N مجموعة الخلف

- تطبيق على * $N(v_2) = \{v_4, v_3\}$ ، $M(v_2) = \{v\}$

- لهذا المفهوم تطبيق في مجال العلوم الإنسانية (بناء شجرة العائلة) حيث تقسم المجتمع وفق هذه الأشجار، ووفق هذا المفهوم إلى أفخاذ وبطون (انظر الأنساب عند قبائل الكلبي)

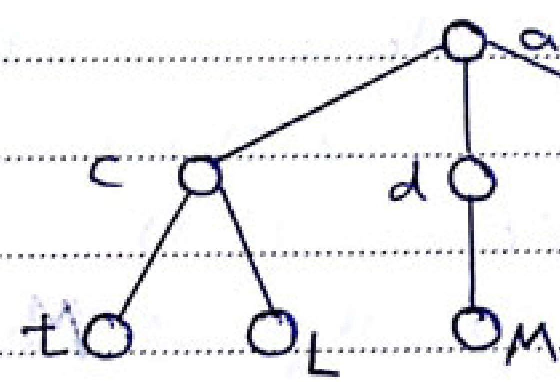
الفرع المولد لشجرة جزئية انطلاقاً من مفهوم الخلف لعقدة:

- إذا كان لدينا شجرة كالآتي:



$D(a)=\{x : $ a لِ خلف $x\}$

عبارة عن الشجرة التالية



بيان جزئي حوله لفروع.

تعريف: لتكن $T=(V;E)$ شجرة ، $|V|=n, |E|=n-1$

إذا تحقق ما يلي: $\forall x\in V$

① إذا كان $deg(x)\leq 2$ في هذا البيان ، عندئذٍ نحصل على شجرة ثنائية $\Leftarrow$ T شجرة ثنائية.

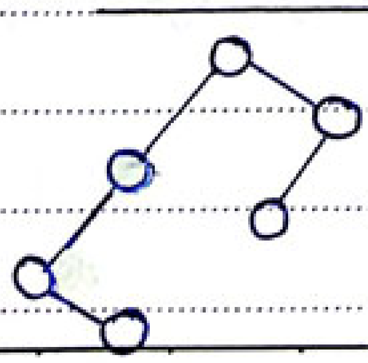
② إذا كان $deg(x)=2$ من أجل أي x جذر ،

$deg(x)=3$ من أجل x عقدة داخلية

$deg(x)=1$ من أجل x عقدة معلقة

نحصل على ما يسمى شجرة ثنائية منتظمة $\Leftarrow$ T شجرة ثنائية منتظمة.

مثال على ذلك:

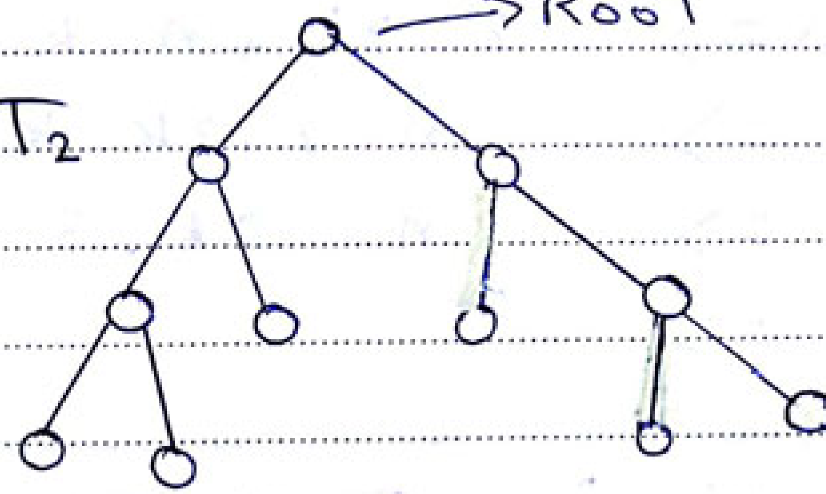


T_1

شجرة ثنائية ليست منتظمة

شجرة ثنائية منتظمة

T_2



ملاحظة: للشجرة الثنائية المنتظمة تطبيقات هامة في مجال علوم الحاسوب وخاصة في بناء خوارزميات البحث الثنائي في قواعد البيانات.

مبرهنة: لتكن لدينا الشجرة $T=(V;E)$ حيث $|V|=n, |E|=n-1$

إذا كانت T شجرة ثنائية منتظمة فإن n عدد فردي.

سؤال دورة

الإثبات: ① من أجل بيان عدد العقد الفردية (التي قدرتها فردي) هو عدد زوجي، إذاً جميع العقد الداخلية والعقد المعلقة هي عقد فردية والجذر قدرته $= 2$ $\Longleftarrow$

الجذر + (العقد الفردية = عدد زوجي) = عدد فردي n

طريقة ثانية للإثبات: لنفرض ما يلي:

علماً $|V|=n$, $|E|=n-1$

لنفرض أن K عدد العقد الداخلية

$$\Rightarrow \sum_{x\in V} \deg(x) = 3K$$

x عقدة داخلية

عدد العقد المعلقة $n-K-1$

(الجذر - الداخلية - المعلقة)

$$\Rightarrow \sum_{y\in V} \deg(y) = (n-K-1)$$

y عقدة معلقة

$$\Rightarrow 2+3K+(n-K-1)=2(n-1)$$

بالجمع $\Rightarrow \quad 2 + 3k + n - k - 1 = 2n - 2$

$\Rightarrow \quad n = 2 + 3k - k - 1 + 2$

$\Rightarrow \quad n = 2k + 3$

$\Rightarrow$ n فردي

مبرهنة: / لتكن لدينا الشجرة $T = (V; E)$ شجرة ثنائية تامة حيث $|V| = n$ ، فإن عدد العقد المعلقة في هذه الشجرة هو $\frac{1}{2}(n+1)$

سؤال دورة

الإثبات: لنفرض أنّ m هو عدد العقد المعلقة

ولدينا $|E| = n - 1$

$\Rightarrow$ عدد العقد الداخلية هو

$n - m - 1$

$\Rightarrow \quad m + 3(n - m - 1) + 2 = 2(n - 1)$

$\Rightarrow \quad m + 3n - 3m - 3 + 2 = 2n - 2$

$\Rightarrow \quad -2m + 3n - 1 = 2n - 2$

$\Rightarrow \quad 2m - 3n + 1 = -2n + 2$

$\Rightarrow \quad 2m = 3n - 2n + 2 - 1 = n + 1$

$\Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}(n+1)$

نطبق المبرهنة على T_2 (شجرة ثنائية تامة)

$|V| = 11$

لدينا 6 عقد معلقة

$\Leftrightarrow \quad \frac{11+1}{2} = 6$

انتهت.