متتاليات ومتسلسلات التوابع العقدي

لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع العقدية المعرفة على مجموعة غير خالية A جزئية من $\mathbb{C}$

✓ **تعريف (1):**

نقول عن المتتالية $\{f_n\}$ إنها متقاربة نقطياً أو متقاربة ببساطة إلى تابع f على A ونكتب $\lim f_n = f$ على A أو $f_n \to f$ على A إذا وفقط إذا $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ حيث أن $\forall z \in A$

نسمي f بالنهاية النقطية أو البسيطة ل $\{f_n\}$ على A

✓ **تعريف(2):**

نقول عن $\{f_n\}$ إنها متقاربة بانتظام إلى تابع f على A ونكتب: $f = u - \lim f_n$ على A أو $f_n \xrightarrow{u} f$

(وضعنا u للتفريق بين التقارب بانتظام والنقطي

إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية μ_n إلى الصفر.

حيث $z \in A$ $\mu_n = \sup|f_n(z) - f(z)|$

وإذا كانت $f = u - \lim f_n$ فنسمي f النهاية المنتظمة ل $\{f_n\}$ على A

ملاحظة: $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام إلى f على A ومنه $\{f_n\}$ متقاربة ببساطة إلى f على A والعكس غير صحيح في الحالة العامة.

ننتقل الآن إلى المتسلسلات:

✓ **تعريف(3):**

نقول عن المتسلسلة $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_n$ من التوابع العقدية على مجموعة $A \neq \emptyset$ إنها متقاربة نقطياً(ببساطة).

ومجموعها البسيط هو S

$$S_n = \sum_{n=n_0}^{n} f_n \qquad (n \geq n_0)$$

حيث أن S_n (متتالية المجاميع الجزئية ل $\sum f_n$)

وهي متتالية توابع عقدية معرفة على A إذا وفقط إذا كانت S_n متقاربة نقطياً إلى التابع S على A ونكتب في حالة التقارب:

$$S = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$$

✓ **تعريف (4):**

نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ إنها متقاربة بانتظام ومجموعها المنتظم هو S إذا وفقط إذا كانت

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_n$$

متقاربة بانتظام إلى S على A ونكتب في حالة التقارب المنتظم:

$$S \overset{u}{=} \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$$

حيث u هو اختصار $uniforme$

ملاحظة (1): $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ متقاربة بانتظام على A ومجموعها المنتظم S يؤدي إلى أن $\sum f_n$ متقارب ببساطة على A ومجموعها البسيط هو S والعكس غير صحيح في الحالة العامة.

ملاحظة (2): إن النهاية البسيطة لمتتالية من التوابع العقدية المستمرة على مجموعة A ليست بالضرورة مستمرة على تلك المجموعة.

مبرهنة:

إذا كانت $f = u - \lim f_n$ على A وكانت $\{f_n\}$ متتالية من التوابع العقدية المستمرة على A فإن f مستمرة على A أما بالنسبة للمتسلسلات فالمبرهنة تقول:

إذا كانت $f \overset{u}{=} \sum f_n$ على A وكانت جميع التوابع f_n مستمرة على A فان تابع المجموع f مستمرة على A

(نعود الآن إلى التكاملات)

مبرهنة:

ليكن لدينا $\{f_n\}$ متتالية من التوابع العقدية المستمرة على طريق Γ ولنفرض ان $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام إلى

على Γ عندئذٍ:

$$\int_\Gamma f = \lim \int_\Gamma f_n$$

(تكامل النهاية = نهاية التكامل)

الإثبات: نعلم أن من خواص التكامل $|\int_\Gamma (f_n - f)| = |\int_\Gamma f_n - \int_\Gamma f|$

و f_n, f محدود على Γ وذلك لأن $f_n - f$ تابع مستمر على Γ التي هي متراصة (وال Γ متراصة كون

صورة لمجال مغلق وفق مستمر)

وبالتالي التابع المستمر على متراص هو محدود

وأيضاً من خواص التكامل:

إذا كان f محدود على طريق Γ بمعنى:

$$\forall z \in \Gamma \quad : |f(z)| \leq M.l(\Gamma)$$

حيث M هو راجح لطويلة التابع و $l(\Gamma)$ طول الطريق وبتطبيق هذه الخاصة يصبح:

$$|\int_\Gamma f_n - \int_\Gamma f| = |\int_\Gamma (f_n - f)| \leq \sup_{w\in\Gamma} |f_n(w) - f(w)|.\, l(\Gamma)$$

حيث أن $w \in \Gamma$

ملاحظة: قمنا بوضع ال $\sup|f_n(w) - f(w)|$ وذلك لأن $f = u - \lim f_n$ على Γ أي حسب

التعريف 2 وبالتالي:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \sup_{w\in\Gamma} |f_n(w) - f(w)| \xrightarrow[\forall z\in\Gamma]{} 0$$

كما أن $l(\Gamma)$ محدود لأن Γ طريق أي له تغير محدود وبأخذ الطول فهو محدود.

ومنه نعلم أن جداء متتالية محدودة بمتتالية لا متناهية في الصغر هي متتالية تسعى إلى الصفر.

وبالتالي:

$$\sup_{w\in\Gamma} |f_n(w) - f(w)|.\, l(\Gamma) \to 0$$

كما أن $0 \le |\int_\Gamma f_n - \int_\Gamma f|$

ومنه

$$0 \le \left|\int_\Gamma f_n - \int_\Gamma f\right| = \left|\int_\Gamma (f_n - f)\right| \le \sup|f_n(w) - f(w)|.\,l(\Gamma)| \to 0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\left|\int_\Gamma f_n - \int_\Gamma f\right| \to 0$$

يؤدي إلى أن:

$$\int_\Gamma f_n \to \int_\Gamma f$$

وذلك حسب الخاصة التي تقول:

$$|z_n - a| \to 0 \leftrightarrow z_n \to a$$

انتهى البرهان.

نتيجة: (**)

لتكن $\sum f_n$ متسلسلة من التوابع العقدية المستمرة على طريق Γ ولتكن $f \overset{u}{=} \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ أي

$(f =$ مجموع f_n على $\Gamma)$ عندئذٍ: $\int_\Gamma f = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_\Gamma f_n$

الإثبات وظيفة

في الامتحان لا يطلب منا إثبات إذا كانت المتسلسلة أو المتتالية متقاربة بانتظام.

لنذكر الآن اختبار فايرشتراس يقوم بمعرفة إذا كانت المتسلسلة من التوابع العقدية متقاربة بانتظام أم لا.

مبرهنة فايرشتراس:

لتكن $\sum f_n$ متسلسلة من التوابع العقدية المعرفة على مجموعة A ولتكن $\{M_n\}$ متتالية ذات حدود حقيقية غير سالبة تحقق الشرط:

$$\forall n \quad |f_n(z)| \le M_n \quad \forall z \in A$$

عندئذٍ: تقارب $\sum M_n$ يقتضي التقارب بانتظام لـ $\sum f_n$

مبرهنة تايلور (مهمة جداً):

إذا كان f تحليلياً على القرص $D(z_0,R)$ عندئذٍ f قابل للنشر وفق تايلور في $D(z_0,R)$ أي أن:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} an(z-z_0)^n \quad \forall z\in D(z_0,R)$$

وحيث $\frac{f^n(z_0)}{n!}$ $\forall n\geq 0 \ \ , an=$

قبل الإثبات نعرض الملاحظتين التاليتين:

ملاحظة (1): نسمي المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

بمتسلسلة تايلور لـ f فمثلاً بمتسلسلة تايلور لـ f واذا كان f ممثلا بمتسلسلة تايلور له في جوار لـ z_0 (في قرص مركزه z_0) فنقول أن f قابل للنشر وفق تايلور في ذلك القرص (أو في جوار z_0) ونسمي المتسلسلة أيضاً بنشر تايلور لـ f في القرص.

ملاحظة (2): إذا كانت $z_0=0$ فإننا نسمي نشر تايلور لـ f في جوارها أي $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(z_0)}{n!}(z)^n$ بنشر ماكلوران للتابع f

الاثبات: ليكن r عدداً حقيقياً موجباً وكيفياً يحقق $0<r<R$ وبالتالي $\overline{D}(z_0,r)\subseteq D(z_0,R)$

بما أن f تحليلي على $D(z_0,R)$ وهو منطقة ((القرص هو مجموعة مفتوحة ومحدبة وبالتالي هي مترابطة فهو منطقة)) ولدينا $\overline{D}(z_0,r)$ محتوى في هذه المنطقة ومنه حسب المبرهنة في المحاضرة 12:

$$* \ f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad \forall z\in D(z_0,r)$$

سأخذ:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{w-z_0}.\frac{1}{1-(\frac{z-z_0}{w-z_0})}$$

أن $\frac{1}{1-(\frac{z-z_0}{w-z_0})}$ نريد ان اجعلها على شكل متسلسلة هندسية لكن قبل أن أجعلها متسلسلة **يجب أن أتأكد هل هي متقاربة أي هل طويلة أساس المتسلسلة التي سآخذها أصغر من الواحد؟**

حيث ((نعلم أن مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة هي $\frac{\text{الحد الأول}=1}{1-\text{الأساس}}$)

ومنه لو أخذنا $w \in C^+(z_0,r); \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|w-z_0|}$

إن $Z \in D(z_0,r)$ فهي تحقق أن $|z-z_0| < r$

$w \in C^+(z_0,r)$ وبالتالي $|w-z_0| = r$ ومنه $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < \frac{r}{r} = 1$

وبالتالي شرط التقارب محقق ومنه يكون $\frac{1}{1-(\frac{z-z_0}{w-z_0})}$ مجموع لمتسلسلة هندسية وبالتالي:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_o)^n}{(w-z_0)^n}$$

نعوض في * :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)} (f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_o)^n}{(w-z_0)^{n+1}})dw$$

$$I)\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)} (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-z_o)^n}{(w-z_0)^{n+1}})dw$$

لنأخذ $f_n(w) = \frac{f(w)(z-z_o)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ أريد ان أخرج المجموع وأدخل التكامل (أي أبادل بين رمز التكامل والمجموع)

لذا يجب أن أثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(w)$ متقاربة بانتظام على $C^+(z_0,r)$ يجب أن أطبق النتيجة **

لنثبت ذلك: ان f تحليلي على $D(z_0,R)$ فهو مستمر على هذا القرص وبالتالي مستمر على الطريق $C^+(z_0,r)$ المتراص (حيث الطريق هو مجموعة جزئية من القرص).

وكما نعلم أن مستمر على متراص فهو محدود ومنه f محدود على $C^+(z_0,r)$ أي يوجد عدد حقيقي M بحيث يكون:

$$|f(w)| \le M \quad \forall w \in C^+(z_0, r)$$

إن $w \in C^+(z_0, r)$ نأخذ الطويلة ل $f_n(w)$

$$|f_n(w)| = |\frac{f(w)(|z-z_0|)^n}{(|w-z_0|)^{n+1}} \le \frac{M(|z-z_0|)^n}{r^{n+1}} - \frac{M}{r}\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^n$$

نرمز $M_n = \frac{M}{r}\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^n \quad \forall n \ge 0$

 # إن $(z-z_0)^n$ اعتبرناه هنا ثابت وذلك لأن متحول التكامل هو w أطبق مبرهنة فايرشتراس الت
تنص أن طويلة الحد العام لمتسلسلة أصغر أو يساوي الحد العام لمتسلسلة حقيقة فإن تقارب f_n
سيقتضي تقارب بانتظام ل $\sum f_n(w)$ على $C^+(z_0, r)$

الآن سنتحقق من تقارب المتسلسلة الحقيقة $\sum M_n$

إن $\sum \frac{M}{r}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n$ متسلسلة هندسية حدها الأول $\frac{M}{r}$ أساسها $\frac{|z-z_0|}{r}$

و $\left|\frac{|z-z_0|}{r}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < \frac{r}{r} = 1$ وبالنتيجة $\sum M_n$ متقاربة وحسب مبرهنة فايرشتراس فإن $\sum f_n(w)$ متقاربة بانتظام على $C^+(z_0, r)$ ومنه:

$$\int_{C^+(z_0,r)} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w)dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C^+(z_0,r)} f_n(w)dw$$

وتصبح المساواة مع $(I$ بالشكل التالي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(w)(z-z_o)^n}{(w-z_0)^{n-1}} dw$$

نخرج $(z-z_o)^n$ خارج التكامل لأنه ثابت بالنسبة ل w

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw\right)(z-z_0)^n$$

لنأخذ:

$$an = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

ويكون $II) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} an(z-z_0)^n$

$\forall r < R \ , \forall z \in D(z_0, r)$ بقي علينا أن نثبت شيئين أولاً إثبات أن $an = \frac{f^n(z_0)}{n!}$

ثانياً: إن المساواة(II) صحيحة على القرص الاوسعR أي أن $z \in D(z_0, R)$

لذا سنتذكر مبرهنة ونتيجة لها اخذناه سابقاً تفيدنا في البرهان:

- إذا كان f تابعاً عقدياً ممثلاً بمتسلسلة القوى فإن f يكون قابلاً للاشتقاق على قرص تقاربها ومشتقه ممثل بالمتسلسلة المشتقة ونتيجة لها: إذا كان f تابعاً ممثلاً بمتسلسلة القوى فإنه يكون قابلاً للاشتقاق عدد غير منته من المرات على قرص تقاربها وإن الأمثال an تساوي $\frac{f^n(\text{مركز القرص})}{n!}$

- إذاً f ممثلاً بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} an(z - z_0)^n$ على القرص $D(z_0, r)$ ومنه حسب المبرهنة والنتيجة لها التي ذكرناها قبل قليل يكون f قابلاً للاشتقاق عدد غير منته من المرات على$D(z_0, r)$ و $an = \frac{f^n(z_0)}{n!}$ $\forall n \geq 0$

لنثبت ثانياً لتكن$z \in D(z_0, R)$ عندئذٍ$|z - z_0| < R$ ويوجدr يحقق: $|z - z_0| < r < R$
$\Leftarrow z \in D(z_0, R)$

ومنه$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} an(z - z_0)^n$ $\forall z \in D(z_0, R)$ وبذلك يتم المطلوب.

 # يمكن ان تأتي بالفحص أثبت جزء من هذه المبرهنة (لكن لن يأتي البرهان كامل بالفحص)

انتهت المحاضرة