الاثنين 28/3/2016 المحاضرة الرابعة

حل تمارين ذ.ت.م

مثال (1)

أوجد التغير الكلي للدالة $f$ مع الرسم

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

ثم بين هل هي ذ.ت.م

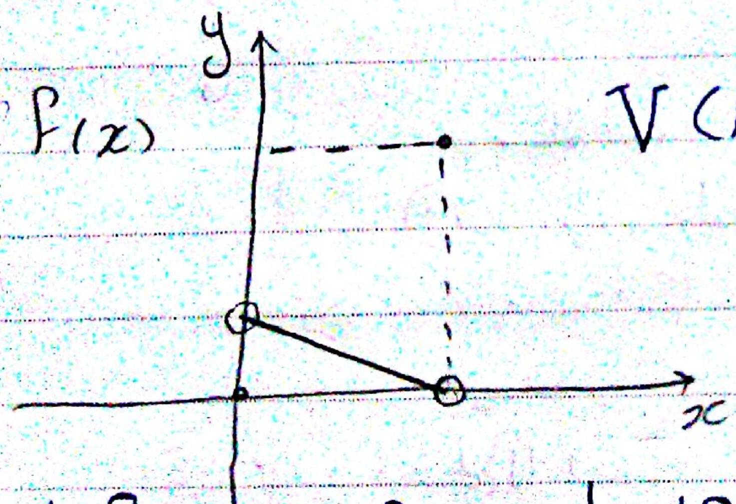
$$V(f,p) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k - x_{k-1})|$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$p \in \mathbb{P}[0,1]$$

$$p = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 \; --- \; x_{n-1} < x_n = 1\}$$

$$x_{n-3} < x_{n-2} < x_{n-1}$$



$$V(f,p) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)|$$

$$+ |f(x_3) - f(x_2)| + --$$

$$|f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})| + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + --|f(x_n) - f(x_{n+1})|$$

$$-x_2 + x_1 \qquad \boxed{x_1 - x_2}$$

$$V(f,p) = |1 - x_1 - 0| + |1 - x_2 - (1 - x_1)| + |1 - x_3 - (1 - x_2)| \; ---$$

$$---- + --- + |(1 - x_{n-2}) - (1 - x_{n-3})|$$

$$+$$

$V(f,p) = 1 - \cancel{x_1} + \cancel{x_2} - x_1 + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} \cdots$

$\cancel{x_4} - \cancel{x_3} + x_5 - \cancel{x_4} \cdots$

$+ \cdots \cancel{x_{n-2}} - x_{n-3} + x_{n-1} - \cancel{x_{n-2}} + 4 + x_{n-1}$

$= 5 - 2x_1 + 2x_{n-1}$

$V(f,p) = 5 + 2(x_{n-1} - x_1)$

$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_p V(f,p) = 7$

مثال ②

الدالة ذات تغير محدود فهي محدودة ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة

$\boxed{\text{مثال على ذلك}}$

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & x \in ]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

① مستمرة على $[0,1]$

مستمرة على مغلق إذا كانت مستمرة على المفتوح ومستمرة من اليمين ومن اليسار

② محدودة على $[0,1]$

③ بين أن الدالة ليست ذات تغير محدود

الحل:

$\boxed{1}$ تكون الدالة $f$ مستمرة على $]0,1[$ إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x\cos\frac{\pi}{2x} = x_0 \cos\frac{\pi}{2x_0} = f(x_0)$$

2) تكون الدالة $f$ مستمرة من اليمين عند $x_0 = 0$ إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \cos\frac{\pi}{2x} = 0 = f(0)$$

لا متناهي في الصغر = محدودة لا متناهي في الصغر

$$\underbrace{\left|\cos\frac{\pi}{2x}\right| \leq 1}_{\text{دالة محدودة}}$$

أو ممكن بطريقة الإحاطة

3) تكون الدالة مستمرة عند $x = 1$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = f(1)$$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} x \cos\frac{\pi}{2x} = \cos\frac{\pi}{2} = 0 = f(1)$$

محدودة أي يجب إثبات أنه:

$$\exists M > 0 \; ; |f(x)| \leq M \;,\; \forall x \in [0,1]$$

$$\left|\cos\frac{\pi}{2x}\right| \leq 1$$

$$|x| \left|\cos\frac{\pi}{2x}\right| \leq 1 \qquad |x| \leq 1$$

$x \in ]0,1]$

$$|f(x)| = \left|x\cos\frac{\pi}{2x}\right| = |x| \left|\cos\frac{\pi}{2x}\right| \leq 1$$

و $|f(0)| = 0 \leq 1 \Leftarrow$ $f$ محدودة على $[0,1]$

Scanned by CamScanner

$$P = \{ 0 < \frac{1}{2x} < \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{2x-2} \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

$$V(f,p) = \left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| + \cdots \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| +$$

$$\left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = f(x_0)$$

$$= \left|\frac{1}{2n}\cos n\pi - 0\right| + \left|\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)}{2} - \frac{1}{2n}\cos n\pi\right|$$

$$+ \cdots + \left|\frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right| + \left|\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi\right| =$$

$$V(f,p) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{2}$

$3\frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + 1$$

$5\frac{\pi}{2}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = +\infty$$

انتهى