المحاضرة التاسعة — تطبيقات نظرية الفئات — 2016/5/2

الجداءات:

تعريف: لتكن $(A_i)_{i\in I}$ اسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$.
ولتكن $A\in ob(\mathcal{C})$

$$(u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I}$$

اسرة من المورفيزمات للفئة $\mathcal{C}$.

فنقول أن الثنائية (A, u_i) تشكل جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ إذا تحقق:
لأجل كل $B\in ob(\mathcal{C})$ ولأجل كل اسرة من المورفيزمات $(v_i : B \longrightarrow A_i)_{i\in I}$
يوجد مورفيزم وحيد $v : B \longrightarrow A$ بحيث:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v_i"'] & A \arrow[d, "u"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

$(u_i . v) = (v_i)$ $\quad u_i . v = v_i \quad \forall i\in I$

مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i\in I}$ اسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$.
الشروط الآتية متكافئة:

1. الاسرة $(A_i)_{i\in I}$ تملك جداء هو الثنائية $(A, (u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I})$
2. أيا كان $X\in ob(\mathcal{C})$ التطبيق:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "u_i . w"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

$$\Gamma : \mathcal{C}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}(X,A_i)$$
$$\Gamma(w) = (u_i . w)_{i\in I}$$

متباين وغامر.

البرهان:

(2⟵1) إذا كان $w, w' \in \mathcal{C}(X,A)$ بحيث، $w = w'$

$$u_i . w = u_i . w' \quad \forall i\in I$$
$$(u_i . w)_{i\in I} = (u_i . w')_{i\in I}$$
$$\Gamma(w) = \Gamma(w')$$

لنعرف علاقة أخرى.

$$\Gamma^{-1} : \prod \mathcal{C}(X,A_i) \longrightarrow \mathcal{C}(X,A)$$

$$\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}) = f$$

ومنه يوجد حسب الفرض $f : X \longrightarrow A$ بحيث يكون $(u_i . f)_{i\in I} = (w_i)_{i\in I}$

إن Γ^{-1} تطبيق .

لأنه إذا كان $(w_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

وأن : $u_i . f = w_i$

$u_i . f = v_i \quad \forall i\in I$

$$\Gamma^{-1}\left((w_i)_{i\in I}\right) = f = \Gamma^{-1}\left((v_i)_{i\in I}\right)$$

بقي أن نثبت أن جداؤهم يعطي المطابقة.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "u_i.g"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

ليكن $g\in \mathcal{C}(X,A)$ إذن :

$$\Gamma^{-1}\Gamma(g) = \Gamma^{-1}\left((u_i.g)_{i\in I}\right) = g$$

$$\Gamma^{-1}\Gamma = I_{\mathcal{C}(X,A)}$$

$$\Gamma\Gamma^{-1}\left((w_i)_{i\in I}\right) = \Gamma(g') = (u_i.g')_{i\in I} = (w_i)_{i\in I}$$

حيث : $u_i.g' = w_i$

أي : $\Gamma\Gamma^{-1} = I_{\mathcal{C}(X,A_i)}$

وبالتالي Γ متباين وغامر

$(1 \longleftarrow 2)$ ليكن $X\in ob(\mathcal{C})$

ولتكن $(v_i : X \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ أسرة من المورفيزمات للفئة $\mathcal{C}$

ولما كان Γ غامر يوجد $\alpha\in \mathcal{C}(X,A)$ بحيث :

$$\Gamma(\alpha) = (v_i)_{i\in I}$$

$$\Gamma(\alpha) = (u_i.\alpha)_{i\in I}$$ حسب تعريف Γ

$$\Longrightarrow (u_i.\alpha)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

ليكن $\beta : X \longrightarrow A$, يحقق :

$$(u_i.\beta)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

$$\Gamma(\beta) = (v_i)_{i\in I} = \Gamma(\alpha)$$

بما أن Γ متباين $\Longleftarrow \beta = \alpha$

ومنه فإن الأسرة $(A_i)_{i\in I}$ تملك جداء.

مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة f

لنفرض أن $(A, u_i : A \longrightarrow A_i)$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

وأن $(B, v_i : B \longrightarrow A_i)$ جداء آخر للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

عندئذٍ يوجد ايزومورفيزم $\alpha : B \longrightarrow A$ لأجله

$$u_i . \alpha = v_i \qquad \forall i \in I$$

$$(u_i . \alpha)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "v_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

البرهان:

لما كانت الثنائية (A, u_i) جداء للأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ:

حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : B \longrightarrow A$ لأجله

$$u_i . \alpha = v_i \qquad \forall i \in I$$

لما كانت الثنائية (B, v_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد

$$\beta : A \longrightarrow B$$

$$v_i . \beta = u_i \qquad \text{لأجله المخطط تبديلي}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "u_i"'] & B \arrow[d, "v_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

لنبرهن على أن: $\alpha . \beta = I_A \;,\; \beta . \alpha = I_B$

حسب مبرهنة سابقة يوجد تطبيق متباين وغامر

$$\Gamma : f(X, A) \longrightarrow \prod f(X, A_i)$$

معرف بالشكل: $\Gamma(f) = (u_i . f)_{i\in I}$

لأجل $X = A$ نجد أن:

$$I_A \in f(A, A)$$

$$\Gamma(I_A) = (u_i . I_A)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$
$$= (v_i . \beta)_{i\in I} = ((u_i . \alpha) . \beta)_{i\in I}$$
$$= (u_i . (\alpha . \beta))_{i\in I} = \Gamma(\alpha . \beta)$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_A = \alpha . \beta}$$

ولأجل الجداء (B, v_i) يوجد تطبيق متباين وغامر

$$\Gamma : f(X, B) \longrightarrow \prod f(X, A_i)$$

$$\Gamma(g) = (v_i \cdot g)_{i\in I}$$

ولأجل $X = B$ نجد أن : $I_B \in f(B,B)$ وأن :

$$\Gamma(I_B) = (v_i \cdot I_B)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$
$$= (u_i \cdot \alpha)_{i\in I} = ((v_i \cdot \beta)\alpha)_{i\in I}$$
$$= (v_i (\beta \cdot \alpha))_{i\in I}$$
$$= \Gamma(\beta \cdot \alpha)$$
$$\Rightarrow \boxed{I_\beta = \beta \cdot \alpha}$$

ومنه α ايزومورفيزم .

<u>مبرهنة:</u> لتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة f. ولنفرض أن :

$(A, \pi_i : A \to A_i)$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ :

1. لأجل كل $i\in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i : A_i \to A$ لأجله $\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i}$

$$A \xrightarrow{\alpha_i} A \xrightarrow{\pi_i} A_i$$

2. لأجل كل $i\in I$ المورفيزم π_i إيبومورفيزم .

<u>البرهان :</u>

-1 لما كانت الثنائية (A, π_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

يوجد تطبيق متباين وغامر $\Gamma : f(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I} f(X, A_i)$

$$\Gamma(f) = (\pi_i \cdot f)_{i\in I}$$

وهذا التطبيق موجود لأجل كل $X \in ob(f)$.

لأجل $X = A_i$

$$\Gamma : f(A_i, A) \longrightarrow \prod f(A_i, A_i)$$

ولما كان $(I_{A_i})_{i\in I} \in \prod f(A_i, A_i)$

ولما كان Γ غامر يوجد $\alpha_i \in f(A_i, A)$

بحيث :

$$\Gamma(\alpha_i) = (I_{A_i})_{i\in I}$$
$$\Gamma(\alpha_i) = (\pi_i \cdot \alpha_i)_{i\in I}$$
$$\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i} \qquad \forall i\in I$$

2-

$$\pi_i : A \longrightarrow A_i$$

لنأخذ التطبيق $\beta_i \mathcal{f}(A_i, X) \longrightarrow \mathcal{f}(A, X)$

$$\beta(f) = f.\pi_i$$

ولنبرهن على أنه متباين.

ليكن $f, g \in \mathcal{f}(A_i, X)$ بحيث:

$$\beta(f) = \beta(g)$$

$$f.\pi_i = g.\pi_i$$

ومنه (1): $(f.\pi_i)\alpha_i = (g\pi_i)\alpha_i$

$$f.(\pi_i \alpha_i) = g(\pi_i \alpha_i)$$

$$f.I_{A_i} = g I_{A_i}$$

$f = g \Rightarrow$ ايبومورفيزم π_i

من جهة أخرى لدينا:

$$\Gamma : \mathcal{f}(X, A) \longrightarrow \pi \mathcal{f}(X, A_i)$$

$$\Gamma(f) = (\pi_i . f)$$

متباين وغامر.

ولدينا أيضاً لأجل كل $j \in I$

$$\Gamma_j : \pi \mathcal{f}(X, A_i) \longrightarrow \mathcal{f}(X, A_j)$$

$$\Gamma_j (V_i)_{i \in I} = V_j$$

وهو تطبيق غامر:

انتهت المحاضرة التاسعة