

البيئات:

تعريف: لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{A} . وليكن $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$

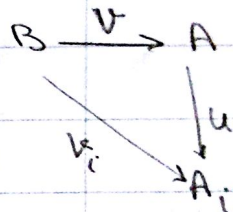
$$(u_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I}$$

أسرة من المورفيزمات للفئة \mathcal{A} .

فقول أن الثنائية $(A, (u_i)_{i \in I})$ تشكل جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ إذا تحققت:

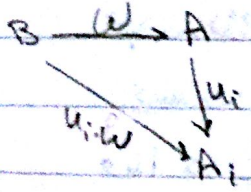
لأجل كل $B \in \text{ob}(\mathcal{A})$ ولأجل كل أسرة من المورفيزمات $(v_i : B \rightarrow A_i)_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد $v : B \rightarrow A$ بحيث:

$$(u_i \circ v) = (v_i) \quad u_i \circ v = v_i \quad \forall i \in I$$



مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{A} . الشروط الآتية متكافئة:

1. الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك جداء هو الثنائية $(A, (u_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I})$
2. أيًا كان $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$ التطبيق:



$$\Gamma : \mathcal{A}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i)$$

$$\Gamma(w) = (u_i \circ w)_{i \in I}$$

متباين ومغاير.

البرهان:

(1 \leftarrow 2) إذا كان $w, w' \in \mathcal{A}(X, A)$ بحيث $w = w'$

$$u_i \circ w = u_i \circ w' \quad \forall i \in I$$

$$(u_i \circ w)_{i \in I} = (u_i \circ w')_{i \in I}$$

$$\Gamma(w) = \Gamma(w')$$

لتعرف علاقة أخرى.

$$\Gamma^{-1} : \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i) \rightarrow \mathcal{A}(X, A)$$

$$\Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = f$$

$$(u_i \circ f)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I}$$

ومنه يوجد به العنصر $f : X \rightarrow A$ بحيث يكون

إن Γ^{-1} تطبيقت .

$$(w_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

$$u_i \cdot f = w_i$$

$$u_i \cdot f = v_i \quad \forall i \in I$$

$$\Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = f = \Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I})$$

بمعنى أن ثابت أن جزؤهم يعطوا الطابقت .

ليكن $g \in f(x, A)$: إن

$$\Gamma^{-1}(g) = \Gamma^{-1}((u_i \cdot g)_{i \in I}) = g$$

$$\Gamma^{-1} = I_{f(x, A)}$$

$$\Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = \Gamma^{-1}(g) = (u_i \cdot g)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I}$$

$$u_i \cdot g = w_i \quad \text{حيث :}$$

$$\Gamma^{-1} = I_{f(x, A_i)}$$

أخيه :

وبالتالي Γ متباينة وغامر

(1 ← 2) ليكن $x \in \text{ob}(f)$

ولتكن $(v_i : x \rightarrow A_i)_{i \in I}$ مجموعة المورفيزمات للفئة f

ولما كان Γ غامر يوجد $\alpha \in f(x, A)$ حيث :

$$\Gamma(\alpha) = (v_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(\alpha) = (u_i \cdot \alpha)_{i \in I} \quad \text{حيث تعريف } \Gamma$$

$$\Rightarrow (u_i \cdot \alpha)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

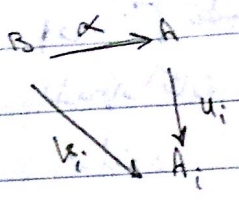
ليكن $\beta : x \rightarrow A$ ، يفتقده :

$$(u_i \cdot \beta)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(\beta) = (v_i)_{i \in I} = \Gamma(\alpha)$$

بما أن Γ متباينة $\leftarrow \beta = \alpha$

ومنه فإن الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك جداء



مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{F}

لتفرض أن $(A, u_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

وأن $(B, v_i: B \rightarrow A_i)_{i \in I}$ جداء آخر للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

عندئذ يوجد $\alpha: B \rightarrow A$ مورفيزم α لخطه

$$u_i \cdot \alpha = v_i \quad \forall i \in I$$

$$(u_i \cdot \alpha)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

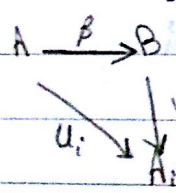
البرهان:

لما كانت (A, u_i) النهائية $(A_i)_{i \in I}$ للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ عندئذ:

ص $\alpha: B \rightarrow A$ مورفيزم α لخطه

$$u_i \cdot \alpha = v_i \quad \forall i \in I$$

لما كانت النهائية (B, v_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإنه يوجد مورفيزم β



$$\beta: A \rightarrow B$$

$$v_i \cdot \beta = u_i \quad \text{لخطه التخطت بتدليجه}$$

لنبرهن على أن: $\alpha \cdot \beta = I_A$, $\beta \cdot \alpha = I_B$

ص مبرهنة سابقة يوجد تطبيق متباين وغامر

$$\mathcal{F}: \mathcal{F}(X, A) \longrightarrow \prod \mathcal{F}(X, A_i)$$

$$\mathcal{F}(f) = (u_i \cdot f)_{i \in I} \quad \text{معرفه بالمثل}$$

لأن $X = A$ نجد أن:

$$I_A \in \mathcal{F}(A, A)$$

$$\mathcal{F}(I_A) = (u_i \cdot I_A)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I}$$

$$= (v_i \cdot \beta)_{i \in I} = ((u_i \cdot \alpha) \cdot \beta)_{i \in I}$$

$$= (u_i \cdot (\alpha \cdot \beta))_{i \in I} = \mathcal{F}(\alpha \cdot \beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_A = \alpha \cdot \beta}$$

ولأن الجداء (B, v_i) يوجد تطبيق متباين وغامر

$$\mathcal{F}: \mathcal{F}(X, B) \longrightarrow \prod \mathcal{F}(X, A_i)$$

$$\Gamma(g) = (v_i \cdot g)_{i \in I}$$

ولذلك $x = B$ نجد أن : $I_B \in f(B, B)$ وأن :

$$\begin{aligned} \Gamma(I_B) &= (v_i \cdot I_B)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I} \\ &= (u_i \cdot \alpha)_{i \in I} = ((v_i \cdot B) \alpha)_{i \in I} \\ &= (v_i \cdot (B \cdot \alpha))_{i \in I} \\ &= \Gamma(B \cdot \alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_B = B \cdot \alpha}$$

وهذا α ايزومورفيزم .

مبرهنة: لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{C} ، ولنفرض أن :

$(A, \pi_i : A \rightarrow A_i)$ عبارة للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ عندئذ :

$$A \xrightarrow{\alpha_i} A \xrightarrow{\pi_i} A_i$$

1- لكل $i \in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i : A_i \rightarrow A$

$$\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i} \quad \text{لأنه}$$

2- لكل $i \in I$ المورفيزم π_i ايزومورفيزم .

البرهان :

1- لما كانت الشائبة (A, π_i) عبارة للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

$$\Gamma : f(x, A) \longrightarrow \prod_{i \in I} f(x, A_i) \quad \text{يوجد تطبيقت متباينة وغامر}$$

$$\Gamma(f) = (\pi_i \cdot f)_{i \in I}$$

وهذا التطبيق موجود لكل $x \in \text{ob}(\mathcal{C})$

لأن $x = A_i$

$$\Gamma : f(A_i, A) \longrightarrow \prod_{i \in I} f(A_i, A_i)$$

ولما كان $(I_{A_i})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} f(A_i, A_i)$

ولما كان Γ غامر يوجد $\alpha_i \in f(A_i, A)$

$$\Gamma(\alpha_i) = (I_{A_i})_{i \in I} \quad \text{بفقت}$$

$$\Gamma(\alpha_i) = (\pi_i \cdot \alpha_i)_{i \in I}$$

$$\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i} \quad \forall i \in I$$

$$\pi_i : A \longrightarrow A_i$$

$$\beta_i : f(A_i, x) \longrightarrow f(A, x) \quad \text{لنأخذ التطبيق}$$

$$\beta(f) = f \cdot \pi_i$$

ولنبرهن عليه أنه متباينة

ليكن $f, g \in f(A_i, x)$ بحيث:

$$\beta(f) = \beta(g)$$

$$f \cdot \pi_i = g \cdot \pi_i$$

$$(f \cdot \pi_i) \alpha_i = (g \cdot \pi_i) \alpha_i \quad \text{وهو (1) :}$$

$$f(\pi_i \alpha_i) = g(\pi_i \alpha_i)$$

$$f \cdot I_{A_i} = g \cdot I_{A_i}$$

$$f = g \Rightarrow \pi_i \text{ ابسولوتيزم}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\Gamma : f(x, A) \longrightarrow \pi_i f(x, A_i)$$

$$\Gamma(f) = (\pi_i \circ f)$$

متباينة وغامر

ولدينا أيضاً لكل $j \in I$

$$\Gamma_j : \pi_j f(x, A_i) \longrightarrow f(x, A_j)$$

$$\Gamma_j(v_i)_{i \in I} = v_j$$

وهو تطبيق غامر

انتهت المحاضرة التاسع

شكراً