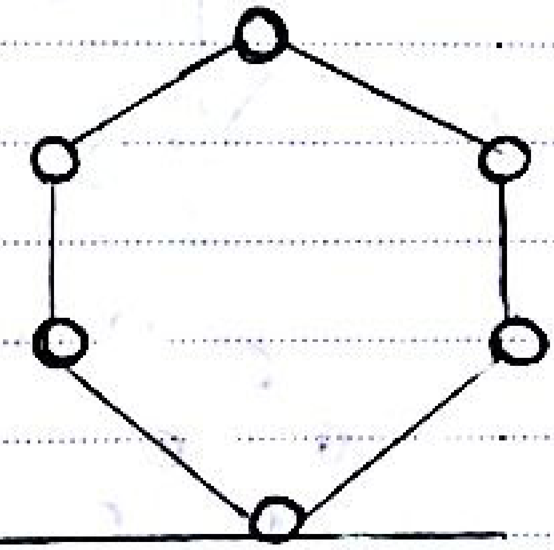
البيان الدائري : cycle graph

هو البيان $G=(V;E)$ المترابط والبسيط , بحيث :

$\forall x \in V \quad ; \quad deg(x)=2$

التمثيل له →

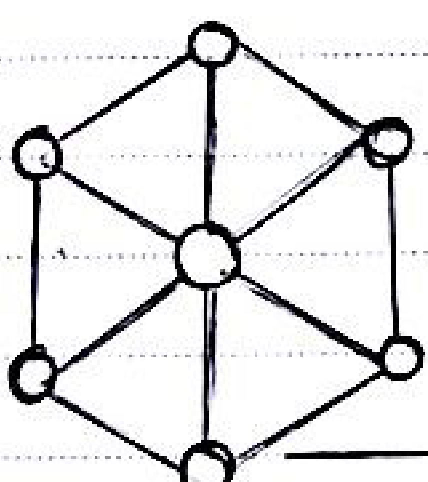


البيان العجلة : Wheel graph

هو البيان $G=(V;E)$ المترابط والبسيط , بحيث :

$\forall v \in V \quad ; \quad deg(v) \geq 3$

وبحيث يحوي الدائرة C_{n-1} عقدها تتجاور مع عقدة واحدة (مع نفس العقدة).

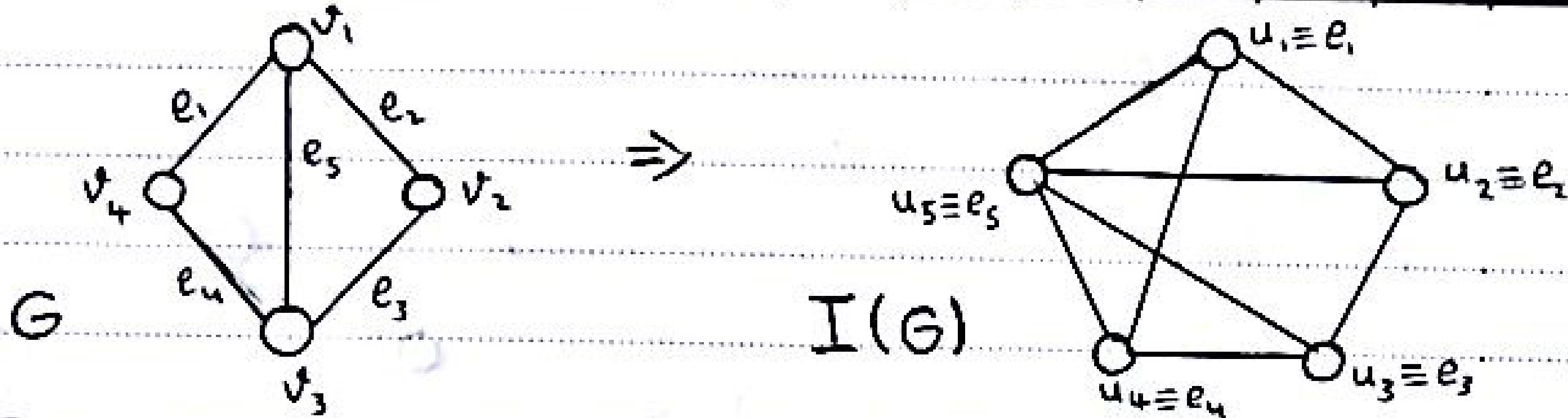


← التمثيل له

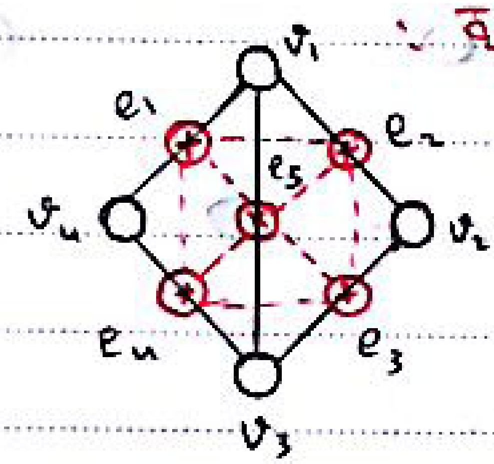
بيان المناقلة : Interchange graph

ليكن لدينا البيان المترابط والبسيط $G=(V;E)$, نرمز لبيان المناقلة بالرمز $I(G)$ وهو البيان الذي عقده تقابل أضلاع البيان الأصلي وتكون العقدتين متجاورتين إذا كان الضلعين الأصليين الموافقين لهما متجاورين في البيان الأصلي.

مثال: أوجد بيان المناقلة للبيان التالي G :



- خوارزمية بسيطة لإيجاد بيان المناقلة :



الخطوة الأولى :

- نضع إشارة (إكس X) على كل ضلع .

الخطوة الثانية :

- نوصل الأضلاع المتجاورة .

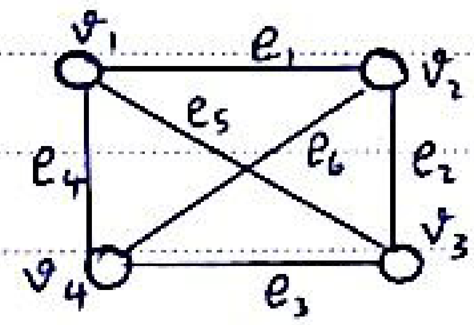
" تم التطبيق على البيان السابق "

/ وظيفة /

$\boxed{1}$

- أوجد بيان المناقلة للبيان K_4 , أي أوجد $I(K_4)$

البيان K_4 له الشكل التالي :



2 - ليكن لدينا البيان K_n (بيان تام من /n/ عقدة) , أثبت أن بيان المناقلة $I(K_n)$ منتظم من الدرجة $2n-4$

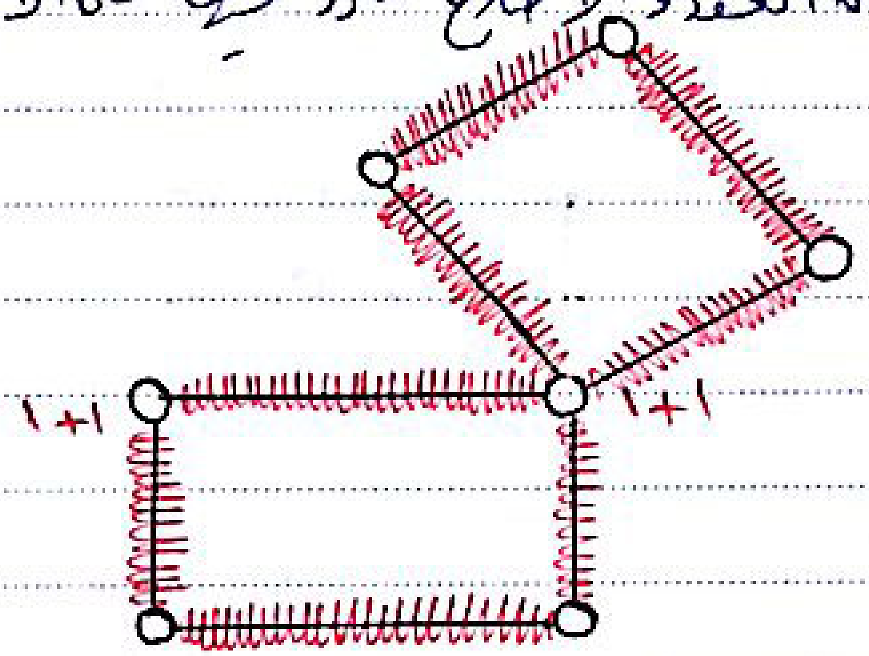
K_n منتظم من الدرجة $(n-1)$ وهو بيان بسيط تام

3 - ليكن لدينا البيان ($K_{m,n}$) / بيان زوجي / , أثبت أن بيان المناقلة $I(K_{m,n})$ منتظم من الدرجة $n+m-2$

سابقاً تم تعريف الدائرة على أنها متتالية من العقد والأضلاع، بحيث أنه لا يوجد فيها تكرار باستثناء عقدة البداية والنهاية، وهذا التعريف هو تعريف الدائرة البسيطة، أما الدائرة المركبة فهي التي تكرر فيها أكثر من عقدة، الأضلاع لا يوجد فيها تكرار.

تعريف الدائرة المركبة: هي متتالية من العقد والأضلاع تتكرر فيها على الأقل أربع عقد.

مثال على ذلك:



دائرة مركبة ←

بأخذ جزء واحد فقط تكون دائرة بسيطة.

(1+1 أي تكررت مرتين).

- عرفنا بالبيانات البسيطة / المسار / الطريق / الممر /

- الآن نعرفهم بالبيانات الموجهة:

تعريف المسار الموجه: هو متتالية من الأقواس والعقد لها نفس الاتجاه.

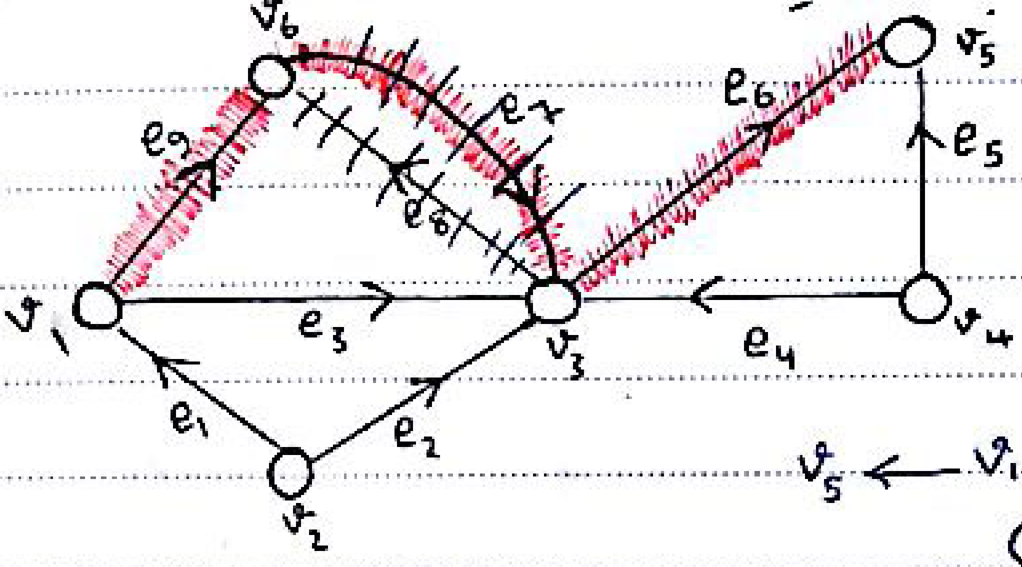
تعريف الطريق الموجه: هو متتالية من الأقواس التي لها نفس الاتجاه ولا تتكرر فيه الأقواس.

تعريف الممر الموجه: هو متتالية من الأقواس التي لها نفس الاتجاه ولا تتكرر فيه العقد.

تعريف الدائرة البسيطة الموجهة: هي متتالية من الأقواس التي لها نفس الاتجاه والعقد وتتكرر فيها عقدة البداية والنهاية.

تعريف الدائرة المركبة الموجهة: هي متتالية من الأقواس التي لها نفس الاتجاه والعقد وتتكرر فيها عقدة غير عقدة البداية والنهاية على الأقل.

مثال: ليكن لدينا البيان الموجه التالي:



- لدينا e_6, e_7, e_9 هو ممر من العقدة v_1 إلى العقدة v_5 أي:

$P = \langle e_6, e_7, e_9 \rangle$ ممر ; $v_5 \leftarrow v_1$

- و الدائرة $C = \langle e_7, e_8 \rangle$ هي دائرة بسيطة موجهة
- من v_5 لا يوجد أي ممر إلى أي عقدة أخرى.
- لا يوجد ممر من أي عقدة لـ v_4.

تمرين/ سؤال دورة

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ حيث يكون $|V| = 2n$ (عدد زوجي) و

$\forall C \subseteq G$ (بسيطة) ; $|C| > 3$

أثبت أن عدد الأضلاع في هذا البيان G هو أصغر أو يساوي n^2

$$|E| \leq n^2$$

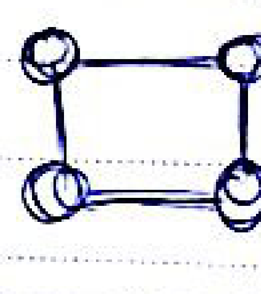
الإثبات: نحل هذه المسألة باستخدام الاستقراء الرياضي

من أجل $n=1 \Leftarrow |V|=2$

$\Rightarrow |E| \leq n^2 = 1$

إذا كانت $n=2 \Leftarrow |V|=4$

$\Rightarrow |E| = 4 \leq 4$



نفرض صحة العلاقة من أجل $n=K$:

أي أن

$$|V| = 2K \Rightarrow |E| \leq K^2$$

العلاقة صحيحة.

لنثبت صحتها من أجل $n = K+1$

$$|V| = 2K+2$$

البيان الموافق هو H من أجل $n=K+1$

وليكن H_1 هو البيان الموافق من أجل $n=K$

ولنفرض أن البيانية مترابطة

$$\exists\, u, v \in H \quad ; \quad u \neq v$$

(عقدتين من البيان المترابط)

حذف العقدتين u و v نحصل على البيان H' ;

$$H' = H - \{\{u\} \cup \{v\}\}$$

أي أن

$$H' = (\underbrace{V - \{u, v\}}_{V'_{H'}} \,;\, E')$$

$$|V'_{H'}| = 2K$$

$$\xRightarrow{\text{حسب العلاقة}} |E'| \leq K^2$$

بإضافة العقدة u و v للبيان H' نحصل على البيان الأصلي H

وبالتالي :

في البيان H

$$deg(v) = l$$
$$deg(u) = 2K + l$$

لنحسب عدد الأضلاع

$$|E| \leq K^2 + l + (2K - l) + 1$$
$$= K^2 + l + 2K - l + 1$$
$$= K^2 + 2K + 1$$
$$= (K+1)^2$$

تمرين / وظيفة / مهم للامتحان :

لتكن لدينا البيان $G=(V;E)$. حيث

$|V|=n$ عدد فردي و

$\forall C \subseteq G \quad ; \quad |C| > 3$

عندئذ فإن

$$|E| \leq \frac{(n^2-1)}{4}$$

انتهت .

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}=(V;\vec{E})$ ، نقول عن البيان انه موجه بشدة (أو بقوة) Strongly Dirgraph
إذا وجد بين أي عقدتين مسار موجه ، ونسميه بيان مترابط بشدة .

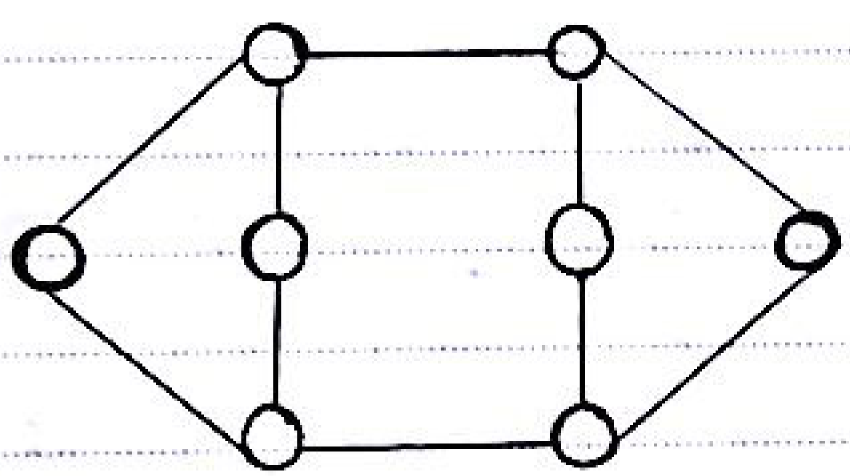
مبرهنة/ إذا كان لدينا البيان $\vec{G}=(V;\vec{E})$ موجه ومترابط بشدة، هذا يكافئ أن كل ضلع من البيان الأصلي ينتمي لدائرة.

$\vec{G}$ مترابط بشدة $\Leftrightarrow$ $\forall e \in G$ فإن $e \in C$

الإثبات: مطلوب / وظيفة /

تمارين :

1. ليكن لدينا البيان التالي :
زوّد أضلاع البيان G باتجاه بحيث يكون البيان الناتج هو بيان مترابط بشدة .



2. ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$;

$\forall x \in V$; $deg(x) \geqslant 3$

, $|V|=6$, $\forall c \in G$: $|c| \geqslant 4$

أثبت أنّ : $G \equiv K_{3,3}$

يطابق بشكل

3. ليكن لدينا البيان $\vec{G}=(V;\vec{E})$ المترابط بشدة، $|V|=n$ أثبت أنّ :

$$n \leqslant |\vec{E}| \leqslant n(n-1)$$

4. لتكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ والمترابط، بحيث
$\forall C \subseteq G \quad ; |C|>3$
فإذا كان $|V|=2n-1$ أثبت أن:
$|E| \leq n^2-n$

---

5. أثبت أنه إذا كان البيان مترابط فإن بيان المناقلة مترابط
G مترابط $\Leftarrow$ $I(G)$ مترابط

/مبرهنة/ لتكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ ، $|V|=n$ ولتكن
$x,y \in V \quad ; \quad x \neq y$
عندئذٍ يكون ما يلي محققاً:

① إذا كان $x=x_1,e_1,\ldots,e_n,x_n=y$ ممراً من x إلى y فإنه يوجد طريق من x إلى y.

② إذا كان $x=x_1,e_1\ldots\ldots,e_n,x_n=x$ ممراً من x إلى x فإنه $\langle x_1,e_1,\ldots\ldots,x_n\rangle$ هي دائرة.

الإثبات:
الحالة الأولى: نستخدم طريقة المكافئ العكسي:
ليكن $\langle x=x_1,\ldots\ldots,e_n,x_n=y\rangle = W$
ليس طريقاً، هذا يعني
$\exists\, i,j \in \mathbb{Z} \quad , 1 \leq i,j \leq n \ :$
$e_i \equiv e_j$
وهذا يناقض كون W ممر، إذاً W طريق

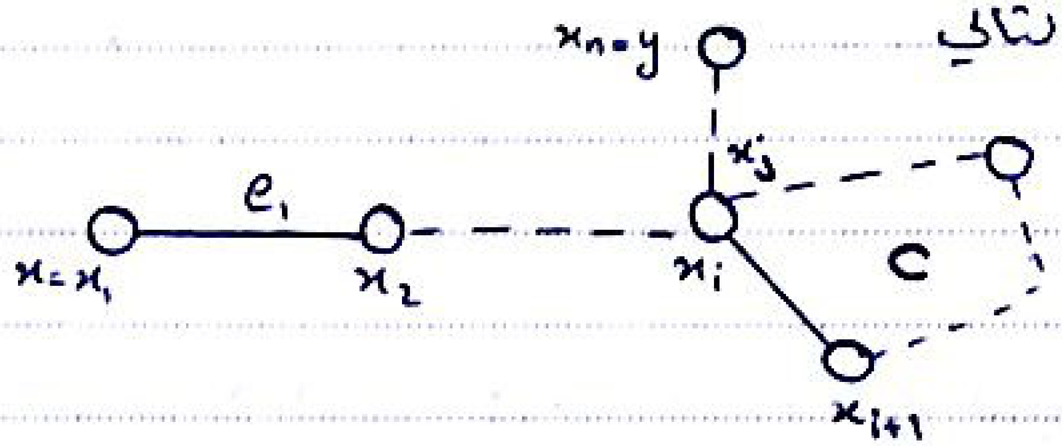
الحالة الثانية: لدينا $C=\langle x=x_1, e_1, \dots, e_n, x_n=x\rangle$ ممر (فرضاً)
لنثبت أن C هي دائرة، أيضاً لذلك نستخدم طريقة البرهان
العكسي، نفترض أن C ليست دائرة وبالتالي
$\exists\, i, j \in \mathbb{Z} \quad ; \quad e_i \equiv e_j$
إذاً يوجد عقدتين بحيث تكون هاتين العقدتين متكررتين في المتتالية
هذا ينافي كون C ممر، ومن الممر لا يوجد تكرار للعقد
$\Leftarrow$ C دائرة

تعريف/
ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ ولتكن لدينا:
$x, y \in V \quad , \quad x \neq y$
عندئذٍ إذا كان:
$L=\langle x=x_1, e_1, \dots, x_n=y\rangle$ مسار
① يوجد ممر من x إلى y.
② إذا كان المسار L' ؛
$L'=\langle x=x_1, \dots, x_n=x\rangle$ ، عندئذٍ توجد
دائرة تمر بـ x
إثبات:
① L مسار من x إلى y
$L=\langle x=x_1, e_1, \dots, e_n, x_n=y\rangle$
نشكل مجموعة الأعداد الصحيحة A التي تحقق ما يلي:
$A=\{r \,;\, r\in\mathbb{Z} \,,\, $ يوجد مسار L طوله $r\}$
لدينا $A \neq \phi$ و A مجموعة مرتبة إذاً
$\exists S\in A \quad ; \quad \forall \alpha\in A \quad ; \quad S \leqslant \alpha$
و هو طول أصغر مسار بين العقدة x و y

المسار L_s هو مسار أصغري , أصغر مسار يربط بين العقدة x و العقدة y , لنثبت أنه هذا المسار ممر
يتم ذلك حسب المطلوب العكسي . لنفرض أن L_s ليس ممر
عندئذ :

$$\exists i,j \quad ; \quad 1 \leq i,j \leq n \quad ; \quad x_i \equiv x_j$$

يكون للمسار الشكل التالي



و إنه :

$$|C| \geq 2$$

حذف الدائرة C أي $L_s \setminus C$ عندئذ نحصل على L'_s

$$\Leftarrow$$

$$|L'_s| < |L_s|$$

و هذا تناقض
إذاً يوجد ممر من x إلى y .

(2) يتم الإثبات بطريقة مشابهة لإثبات (1)

/ مبرهنة / : ليكن لدينا البيان $G=(V,E)$ بيان بسيط و مترابط ; لتكن

$$x, y \in V \quad ; \quad x \neq y$$

إذا وجد ممران مختلفان من x إلى y فإن البيان G يحوي دائرة C .

سؤال دورة

الإثبات : ليكن لدينا المساران

$L_1 = \langle x = x_1, e_1, \ldots, x_n = y \rangle$;

$L_2 = \langle x = y_1, e'_1, \ldots, y_n = y \rangle$

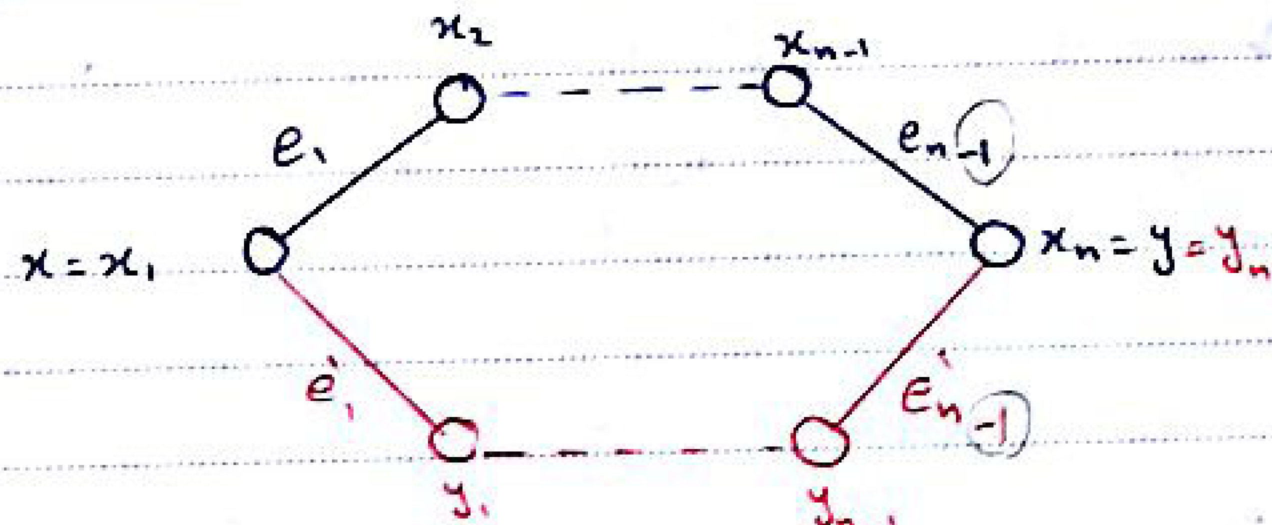
حيث $L_1 \neq L_2$ نميز حالتين:

- الحالة الأولى:

$\forall v_i \in L_1 \quad : \nexists \alpha \in L_2 \quad ; \quad v_i \equiv \alpha$

$\forall v_j \in L_2 \quad : \nexists \beta \in L_1 \quad ; \quad v_j \equiv \beta$

عدا عقدتي البداية والنهاية.

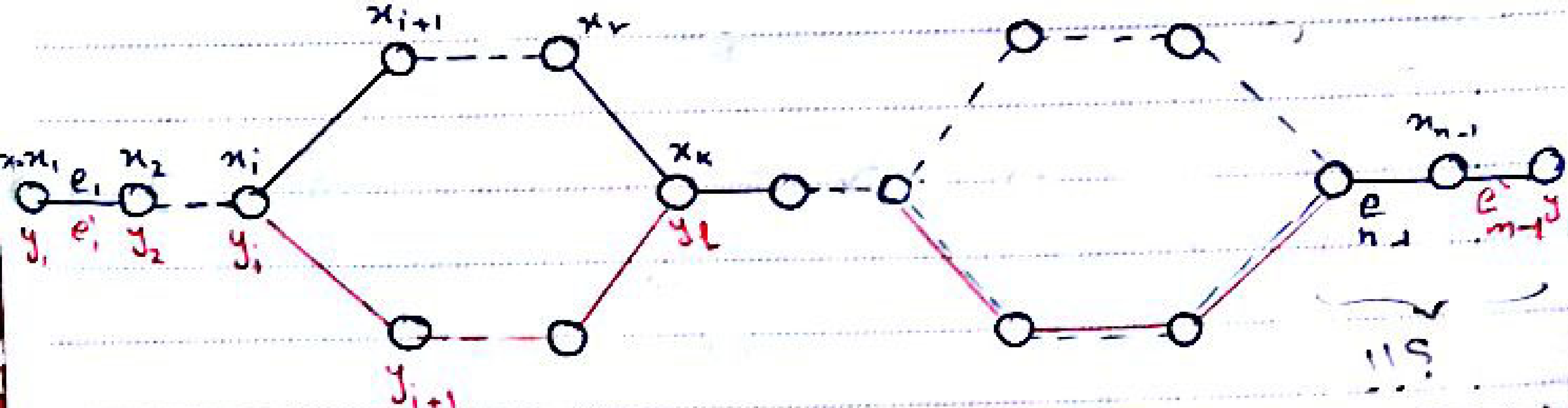


عندئذ $L = L_1 \cup L_2$ تمثل دائرة بسيطة

- الحالة الثانية:

$L_1 \neq L_2 \quad , \exists\, v_i \in L_1 \underset{i \neq j}{\wedge} v_j \in L_2 \quad ; \quad v_i \equiv v_j$

; $v_i, v_j \neq x, y$ (عقدتا البداية والنهاية)



لنشكل المجموعة A

$$A = \left\{ r : \underset{i \leq r \leq j}{r \in \mathbb{Z}} \;;\; i,j \;;\; x_i \equiv y_j \right\}$$

إنّ $A \neq \phi$ و A مجموعة مرتبة

وبالتالي

$\exists s \in A \;,\; \forall \alpha \in A \;,\; s \leq \alpha$

$\Rightarrow x_i \equiv y_i \;,\; s = i$

$\exists t \in A \;,\; s < t \leq \beta \;:\; \beta \in A \;,\; \beta \neq s$

$x_k \equiv y_\ell \;,\; k \neq \ell$

$k \leq t \leq \ell$

نشكل الممرين

ممر $L_1 = \langle x_i , e_{i+1} , \dots , x_k \rangle$

ممر $L_2 = \langle y_i , e'_{i+1} , \dots , y_\ell \rangle$

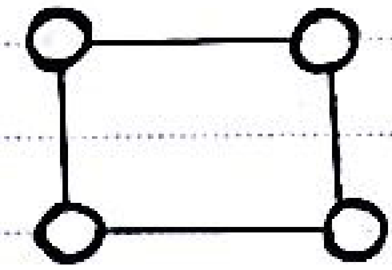
لدينا : $x_i \equiv y_i$ و $x_k \equiv y_\ell$

إذاً $L = L_1 \cup L_2$ تشكل دائرة

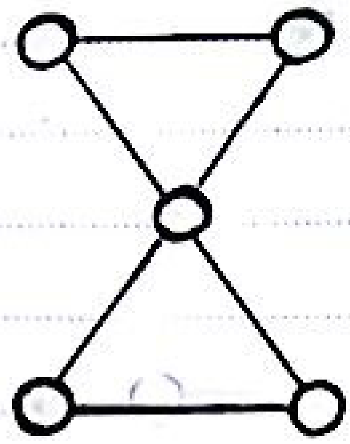
- بيانات أويلر : Euler graph

ليكن لدينا البيان $G = (V; E)$ ، نقول عن البيان G انه بيان أويلر إذا وجدت دائرة C بحيث تحوي هذه الدائرة جميع عقد البيان و جميع أضلاعه .

مثال:



بيان أويلر



بيان أويلر

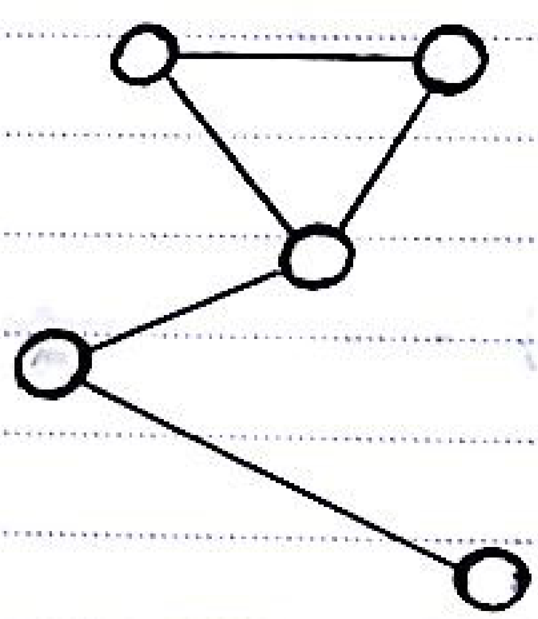
ليس بيان أويلر (لا يوجد دائرة)

بيان نصف أويلر:

تعريف: نقول عن البيان G انه بيان نصف أويلر إذا وجد طريق يحوي كل جميع أضلاع البيان وعقده.

مثال:

بيان نصف أويلر



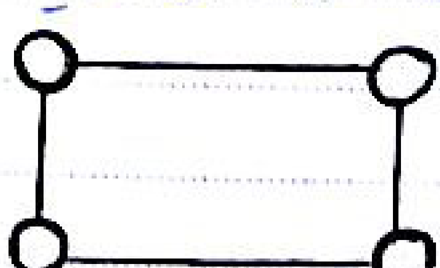
بيان نصف أويلر

كل بيان أويلر هو نصف أويلر والعكس ليس صحيح بالضرورة

بيان هاملتون Hamilton graph

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ نقول عن البيان G انه بيان هاملتون إذا وجدت دائرة C في البيان G تحوي جميع عقد البيان.

مثال:



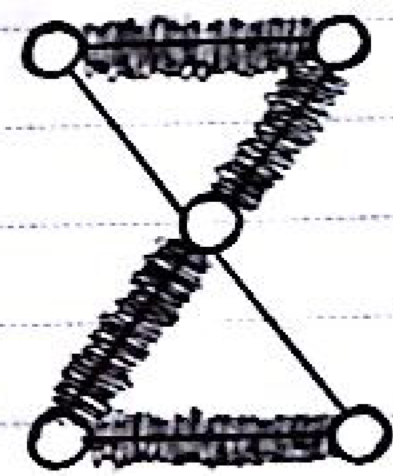
بيان هاملتون

بيان نصف هاملتوني:

نقول عن البيان G إنه بيان نصف هاملتون، إذا وجد طريق في البيان G يحوي جميع عقد البيان.

مثال:

بيان نصف هاملتوني



ليس بيان هاملتون لا يوجد دائرة تحوي جميع عقد البيان،
هو بيان نصف هاملتون

ملاحظة/

الدائرة في بيان أويلر هي دائرة مركبة و في بيان هاملتون هي دائرة بسيطة.

ملاحظة/

لا يوجد خوارزمية ذات كلفة معقولة تمكننا من إيجاد دائرة هاملتون في أي بيان.

انتهت

١٣/٣ رمز البيان الزوجي التام $G=(X,Y;E)$

- تعريف العقدتين المتجاورتين بجب وضع الفاصلة المنقوطة

$G=(V;E)$

- أنه نقل الأرنب، الذئب، الخروف

فقط عدد أو الخطوط، هو الخط الذي يصل من MJD

إلى MJA بدلاً من MJD

١٤/٣

P.16 السطر 16 نضع نجمة أعلاه

$E=\{e_1, \dots, e_m\}$

- مصفوفة التأثير: P.17

الكلمة $\boxed{8}$ نضع سطر بدلاً من مصفوفة

P.19 رسم البيان غير ... أعلى

نضع e_4

P.21 بتعريف مصفوفة التجاور $a_{ij}=\begin{cases}1 ; & \exists e=(x_i,x_j)\in E \\ 0 ; & x_j \text{ ... } x_i\end{cases}$

P.22 $a_{ij}=\begin{cases}\alpha & \\ \beta & \exists e=(x_i,x_j)\in E \\ 0 & \end{cases}$

P.23 يجب وضع $d_{ij}=\{$

P. 23 رمز مصفوفة الادخال:

$Q=(q_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$