مبرهنة: ليكن لدينا البيان المترابط $G=(V;E)$ و لتكن C دائرة
$$C=\langle x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n\rangle \subseteq G$$
و ليكن لدينا البيان $H=(V;E-\{e_1,\dots,e_{n-1}\})$، و ليكن البيان
$$G'=(V';E-\{e_1,\dots,e_{n-1}\})$$ حيث
$V'=\{v\in V$, v عقدة غير معزولة $\}$

عندئذ يكون مايلي محقق:
$$V'\cap\{x_1, x_2, \dots, x_n\}\neq\phi$$

الإثبات:

لتكن $x\in\{x_1,\dots,x_n\}$ و $y\in V$

بما أن البيان G مترابط، عندئذ يوجد ممر يربط بين العقدتين x و y أي
$$\exists P: x\longrightarrow y$$
$$P=\langle x=y_1, e'_1, y_2, \dots, y_m=y\rangle$$
لتكن $y_r\in P$ حيث $1\leq r\leq m$

نميز الحالات التالية:

الحالة (I): إذا كانت $r=m \Leftarrow y_r\equiv y_m$ أي
$$y_r\in\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$
و $\Leftarrow \quad y_r\in V'$
$$V'\cap\{x_1,\dots,x_n\}\neq\phi$$

الحالة (II): $1\leq r<m$

و منه فإن:

$y_r\in\{x_1,\dots,x_n\}$ تنتمي لمجموعة عقد الدائرة

$y_{r+1}\notin\{x_1,\dots,x_n\}$ (العقدة التي تلي y_r)

مجموعة أضلاع الدائرة $e_r\notin\{e_1,\dots,e_n\}\Rightarrow e^r\in E$

$\Rightarrow e^r \in E - \{e_1, \ldots, e_n\}$

$\Rightarrow e^r \in G'$

$\Rightarrow y_r$ عقدة غير معزولة

$\Rightarrow \{x_1, \ldots, x_n\} \cap V' \neq \phi$

تمرين/

البيان الذي جميع عقده زوجية لا يملك جسر

ليكن لدينا البيان المترابط $G=(V;E)$ ، حيث يكون

$\forall v \in V : deg(v) = 2K \quad , K \in \mathbb{Z} \Rightarrow K \geq 1$

عندئذ ؛ فإن البيان G لا يملك جسر .

الإثبات:

لتكن $x \in V$ ولننشئ الدائرة C (مركبة فيها تكرار عقد يعني)

$C = \{x = x_1, \ldots, x_n = x\}$

وضمن الخوارزمية التالية

البيان G مترابط و

$\forall v \in V : \quad deg(v) > 1$

ننشئ متتالية من العقد والأضلاع انطلاقاً من العقدة $x = x_1$

هذه المتتالية من الأضلاع تشكل طريق

$w = \{x_1, \ldots, x_n\}$

لنثبت أن هذا الطريق هو دائرة

إذا كانت $x_1 \neq x_n$ نستنتج أن

$deg(x_n) = 2K+1$ (فردية)

وهذا تناقض لأنه

$\forall v \in G : deg(v) = 2K$

$\Rightarrow x_n \equiv x_1$

$\Rightarrow w \equiv C$

وكونه لا يطابق الدائرة C نستنتج أنّ أي ضلع موجود في البيان موجود بالدائرة ⇐

$\forall e \in G \quad : e \in C \quad \Rightarrow$

ولا علينا أن يكون جـ.

البيان يحوي عقدتين فردتين، باقي العقد زوجية يكون نصف أويلر

/مبرهنة/ ليكن لدينا البيان المترابط $G = (V; E)$

سؤال دورة

G نصف أويلر $\Leftrightarrow$

$\exists x, y \in V \quad : \deg(x) = 2K + 1$

$\deg(y) = 2\ell + 1$

$; K, \ell \in \mathbb{Z}$

الإثبات: إذا كان G نصف أويلر ⇐ يوجد طريق w أي

$\exists \, w \subseteq G \quad : w = \langle x, \ldots, y \rangle$

جميع عقد هذا الطريق هي عقد زوجية باستثناء عقدة البداية وعقدة النهاية

$\forall v \in w \quad : v \neq x \;\wedge\; v \neq y \quad ; \deg(v) = 2K \quad ; K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \deg(x) = 2K + 1 \quad , \deg(y) = 2\ell + 1 \quad ; K, \ell \in \mathbb{Z}$

$\Leftarrow$ عقد فردية $x, y \quad ; \quad x, y \in V$

ولنثبت أنّ البيان هو نصف أويلر

نشئ البيان

$G' = (V ; E \cup \{e\} \quad : e = (x, y) \}$

$\Rightarrow v \in G' \quad , \deg(v) = 2K \quad ; K \in \mathbb{Z}$

$\exists C \subseteq G' \quad , \forall e \in E' = E \cup \{e\}$

$; \quad \forall v \in V \quad ; e \wedge v \in C$

لدينا $C' = C - \{e\}$ هو طريق في البيان G ⇐

$\forall e' \in G , \forall v \in G \quad ; e' \wedge v \in C'$

/ /

$\Leftarrow$ G هو نصف أويلر

خوارزمية إيجاد بيان أويلر :

ستطرح لاحقاً " اترك فراغ بمقدار نصف صفحة "

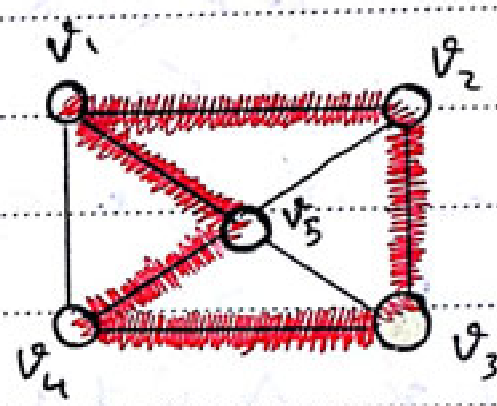
نظرية/ ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V; E)$ حيث يكون $n=|V|\geq 3$

$\forall x,y \in V \quad , \quad x \neq y$

إذا كان $deg(x)+deg(y) \geq n$ فإن G بيان هاملتون

" بدون برهان "

مثال :



G

بيان هاملتون

$|V|=5$

$\forall v_i, v_j \in V \quad , \quad v_i \neq v_j$

$deg(v_i)+deg(v_j) \geq 5$

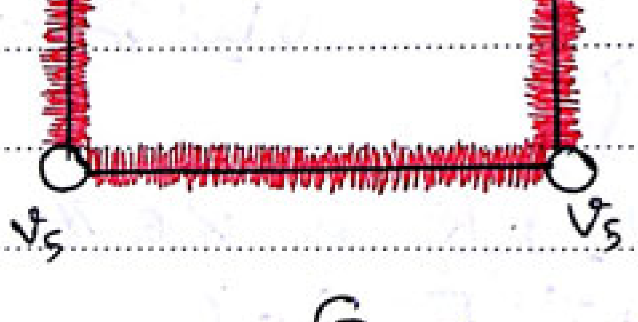
الحالة المعاكسة : مثال :

$|V|=5$

$\forall v_i, v_j \in V \quad , \quad v_i \neq v_j$

$deg(v_i) + deg(v_j) \leq n$

بالرغم من كون G هو بيان هاملتون .



G

إذاً النظرية السابقة هي شرط كافٍ وغير لازم .

مبرهنة: ليكن لدينا البيان المترابط $G=(V;E)$ حيث: $|V|=n$, $deg(x)\geq n/2$ $\forall x\in V$

عندئذ: فإن البيان G هو بيان هاملتون.

الإثبات: $\forall x,y\in G$: $deg(x)\geq n/2$

$deg(y)\geq n/2$

: $x\neq y$

حسب المبرهنة "النظرية" السابقة

$deg(x)+deg(y)\geq n/2+n/2=n$

$\Leftarrow$ G هو بيان هاملتون.

تمرين:

أثبت أن البيان $K_{3,3}$ هو بيان هاملتون.

$K_{3,3}=(V;E)$

$|V|=6$, $\forall x\in V$, $deg(x)\geq 3$

$\Rightarrow \forall x,y\in V$; $x\neq y$: $deg(x)+deg(y)\geq 6$

$\Leftarrow$ حسب المبرهنة السابقة يكون البيان المعطى هو بيان هاملتون.

مبرهنة: ليكن لدينا البيان المترابط $G=(V;E)$

$|V|=n\geq 3$

$\forall x,y\in V$, $x\neq y \Rightarrow deg(x)+deg(y)\geq n-1$

فإن البيان G نصف هاملتون

الإثبات: لدينا البيان $G=(V;E)$ يحقق:

$\forall x,y\in V$: $deg(x)+deg(y)\geq n-1$

ننشئ البيان

$G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{v_0\}$

$E' = E \cup \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\} : e'_i = (v_0, v_i)$

; $i = 1:n$

وعليه

$\forall x', y' \in G'$, $x' \neq y'$

$deg(x') + deg(y') \geq n$

⟸ وحسب المبرهنة السابقة يكون G' هو بيان هاملتون

بحذف العقدة التي أضفناها وجميع الأضلاع نحصل على مجر في البيان

G وتكون جميع عقد البيان G ⟸ G هو نصف هاملتون

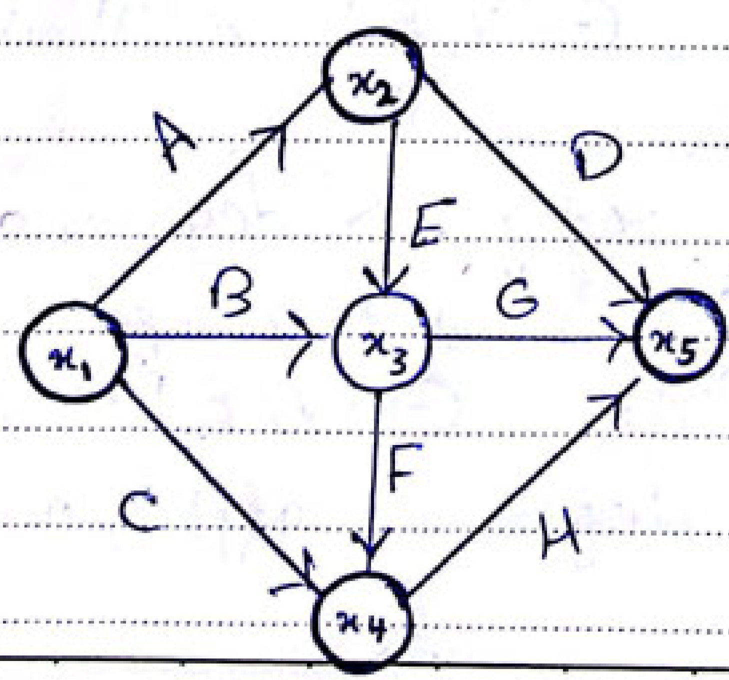
تطبيقات نظرية البيان :

- طريقة PERT ;

المقصود بطريقة PERT ترتيب أولويات مراحل إيجاد مشروع معين بحيث يكون إيجاد المشروع بأقل وقت ممكن وأقل كلفة ممكنة

- وضعت هذه الطريقة من قبل أمريكا لإنجاز مشروع حرب النجوم (الاستراتيجية الدفاعية) Star Wars

سنرتب مراحل العمل في بيان



سُمّي العقدة حدث ، إذاً : العقد تقابل أحداث . " كل عقدة تقابل حدث " .

الحدث هو إنجاز مرحلة معينة من العمل .

إنجاز مراحل المشروع على بشبكة موجهة فيها عقدة بداية وعقدة نهاية (لا يوجد دوائر مغلقة) .

كل قوس يقابل نشاط .

النشاط : هو زمن إنجاز مهمة معينة من المشروع .

لكل نشاط نميز ثلاث حالات :

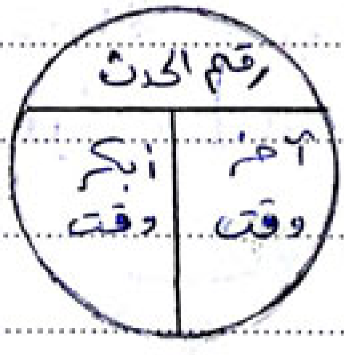
1) إنجاز النشاط إذا كانت الظروف مواتية .

2) الزمن التفاؤلي لإنجاز النشاط .

3) الزمن اللازم لإنجاز النشاط إذا كانت الظروف معاكسة (زمن التشاؤم)

المطلوب : إيجاد أبكر وقت وآخر وقت لإنجاز هذا المشروع .

بالبداية نقسم كل حدث إلى ثلاث أقسام



انتهت .

- معالجة شبكات PERT :

PERT : Programme Evaluation Review Technique

تقنية مراجعة تقيم (كلفة) البرنامج (المشاريع) :

حدث Event : يقابل عقدة في البيان ، وتمثل في المشاريع إما نهاية نشاط أو بداية نشاط ، وليس له أي كلفة .

نشاط Activity : يقابل قوس في البيان ، وله كلفة زمنية و كلفة اقتصادية ، يبدأ بحدث وينتهي بحدث .

الوقت التفاؤلي optimistic Time (o.T.) : وهو الزمن اللازم لإنجاز نشاط إذا كانت الظروف مواتية .

الوقت التشاؤمي Passimistic Time (P.T.) : وهو الزمن اللازم لإنجاز نشاط إذا كانت الظروف معاكسة .

أكثر الأوقات احتمالاً Most Likely time (M.L.T.) : هو الوقت الأكثر احتمالاً لإنجاز نشاط .

الوقت المحسوب Compute time (te) : هو الوقت (الزمن) الفعلي لإنجاز نشاط معين ويحسب من خلال القانون التالي :

$$t_e = \frac{OT + 4MLT + PT}{6}$$

أبكر وقت Earliest time (E_t) : هو أبكر وقت ممكن حسابه لإنجاز نشاط معين .

آخر وقت Latest time (L_t) : هو آخر وقت مسموح به لإنجاز نشاط معين .

- حساب أبكر وقت : $E_t = \max \{ \overset{\text{أبكر وقت}}{E_{tj}} + t_{ej} \}$ كلفة المسار = الوقت المحسوب

- حساب آخر وقت : $L_t = \min \{ E_{ti} - t_{ei} \}$

الوقت الفائض (وقت التعطيل) scheduling time :

نرمز له بـ S : حيث $S = L_t - E_t$

ويساوي آخر وقت مطروح منه أبكر وقت.

المسار الحرج Critical Path : هو أطول ممر بين عقدة البداية وعقدة النهاية.

ملاحظة: وهو الممر الذي يمر بالعقد التي يكون فيها وقت التعطيل معدوم.

الحدث الوهمي Dummy Event.

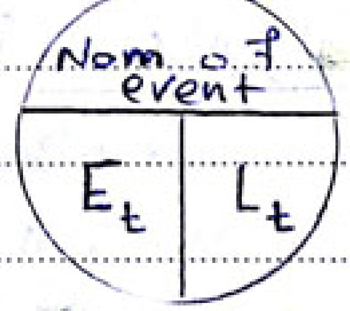
النشاط الوهمي Dummy Activity.

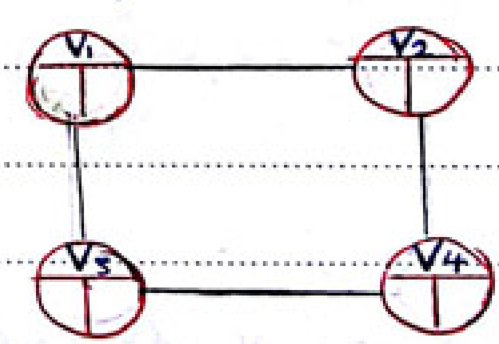
- يمكن أن نضيف حدث وهمي أو نشاط وهمي للتخلص من الحالات الشاذة (أو الخاصة).
- تطبق طريقة PERT على الشبكات. (الشبكة لا تحوي دائرة مغلقة).

تطبيق طريقة PERT على مثال:

تقسم كل عقدة إلى ثلاثة أقسام لتطبيق طريقة PERT

كل عقدة تقسم إلى ثلاث أجزاء





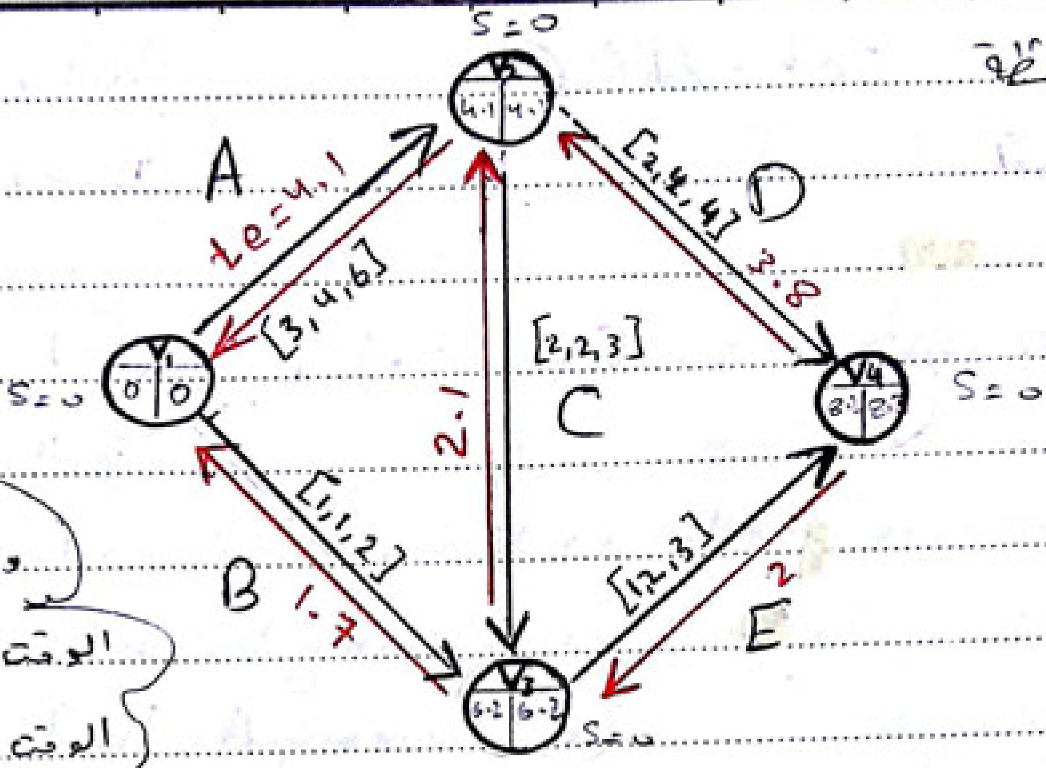
ابحث في الانترنت
PERT Method
عن أسس طريقة

Project مشروع: هو عبارة عن شبكة تحتوي على أحداث وأنشطة.

- يمكن الكتابة بشكل جدولي أو على البيان مباشرة.

/ /

أنشطة A,B,C,D,E



وصفنا على كل نشاط ثلاث أوقات
الوقت التفاؤلي، الوقت الأكثر احتمالاً
الوقت التشاؤمي

Event	Act	O.T	MLT	P.T	te (الوقت المحسوب)
$v_1 \longrightarrow v_2$	A	3	4	6	$\frac{3+16+6}{6} = 4.1$

الجدول السابق يوضع الأوقات الثلاثة لكل نشاط

" إما نضعهم على الجدول أو على البيان مباشرة "

لإيجاد طريقة PERT نحتاج إلى الملاحظات التالية:

- لإيجاد شبكة PERT: (1) أبكر وقت لحدث البداية يساوي الصفر.

(2) آخر وقت لحدث النهاية يساوي أبكر وقت.

(إن الحدث النهائي أبكر وقت فيه يساوي آخر وقت)

- سنحسبهم:

أولاً: نحسب الوقت المحسوب لـ A = 4.1 (طبقاً العلاقة السابقة)

و لـ B, C, D, E ونضعهم على البيان مباشرة

$$\Rightarrow C.P = v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4$$

$$= 4.1 + 2.1 + 2 = 8.2$$ (مسار طوله)

هو أطول مسار من عقدة البداية إلى النهاية

طريقة Cascada Algorithm :

- تحقق شرط ضرب المصفوفات "عادةً" تكون المصفوفة مربعة في البيان" حيث عدد الأسطر للثانية = عدد الأعمدة للأولى.
- إذا كانت لدينا المصفوفة A و B :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نعرف المصفوفة C حيث: $C = A \oplus B$

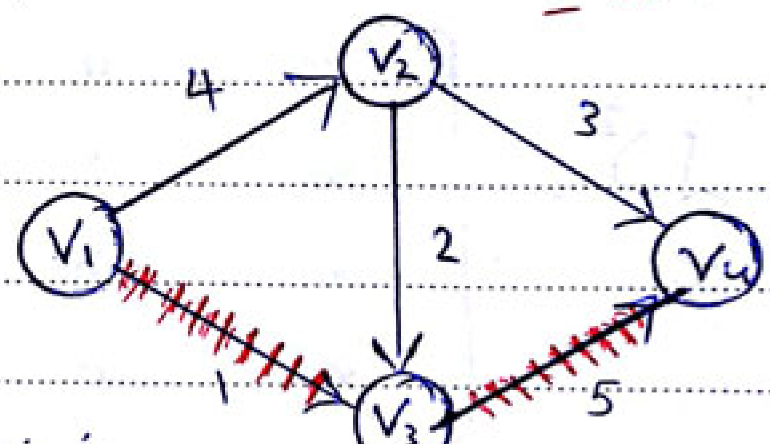
ليس الجمع المألوف

العنصر $C_{ij} = \min\{a_{ik} + b_{kj}\}$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

خوارزمية كاسكادا: وجدنا الوقت المحسوب لكل

(أ) نوجد مصفوفة البيان الموجه الموزون. ومنه ما يلي:



البيان في المثال السابق

$D = (d_{ij})$

تعرف على الشكل التالي:

$$d_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & ; \quad v_i \to v_j \text{ تمثل وزن القوس} \\ 0 & ; \quad i = j \\ +\infty & ; \quad \nexists\ v_i \longrightarrow v_j \text{ لا يوجد قوس} \end{cases}$$

$$D = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 4 & 1 & \infty \\ v_2 & \infty & 0 & 2 & 3 \\ v_3 & \infty & \infty & 0 & 5 \\ v_4 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{array}$$

نحسب:

$$\left.\begin{aligned} D^2 &= D \oplus D \\ D^3 &= D^2 \oplus D \\ D^{i+1} &= D^i \end{aligned}\right\} D'$$

المصفوفة لا تتغير بهذه الحالة

نحصل على D' تسمى مصفوفة الأبعاد، عناصرها أقصر مسارات بين العقد.

- العنصر في السطر الأول يمثل أقصر ممر من عقدة البداية لعقدة النهاية، وهو حاصل جمع الممرات بين عقدة البداية وعقدة النهاية (متتالية).

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 6 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{D^2 \oplus D}{D^3} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 6 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$D^3 = D^2$$

وبالتالي نجد أن طول الممر = 6

Path = 6

أي أن:

$v_1 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4$

دعماً لشغال الموهوبة
نيرناتك للنمو

- خواص عملية الجمع المعرف:

① ليست تبديلية أي

$B \oplus A \neq A \oplus B$

② تجميعية

$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

انتهت.

طريقة ديكستر Dijkister Algorithm :

لإيجاد (لحساب) أقصر طريق بين عقدتين في بيان موجّه

- خواص (فرضيات) الخوارزمية

$P(1) = 0$

تمثل كلفة النقل من مركز البداية (من عقدة البداية)

$T(K) = \infty \quad ; \quad K = 2:n$

وهي الكلفة الافتراضية للنقل، هي كلفة النقل من مركز البداية إلى المركز K "الكلفة التجريبية"

خطوات الخوارزمية :

step 1 :

كلفة النقل المحسوبة $T(j) = \min\{\underset{\text{القديمة}}{T(j)} \;,\; P(K) + d_{kj}\}$

تمثل قيمة القوس (وزن القوس) الرابط بين العقدة K والعقدة j

$T(j)$ هي كلفة النقل التجريبية (أو المحسوبة) من عقدة البداية إلى العقدة j

step 2 :

كلفة النقل الحقيقية من عقدة البداية إلى العقدة K , تحسب من العلاقة التالية

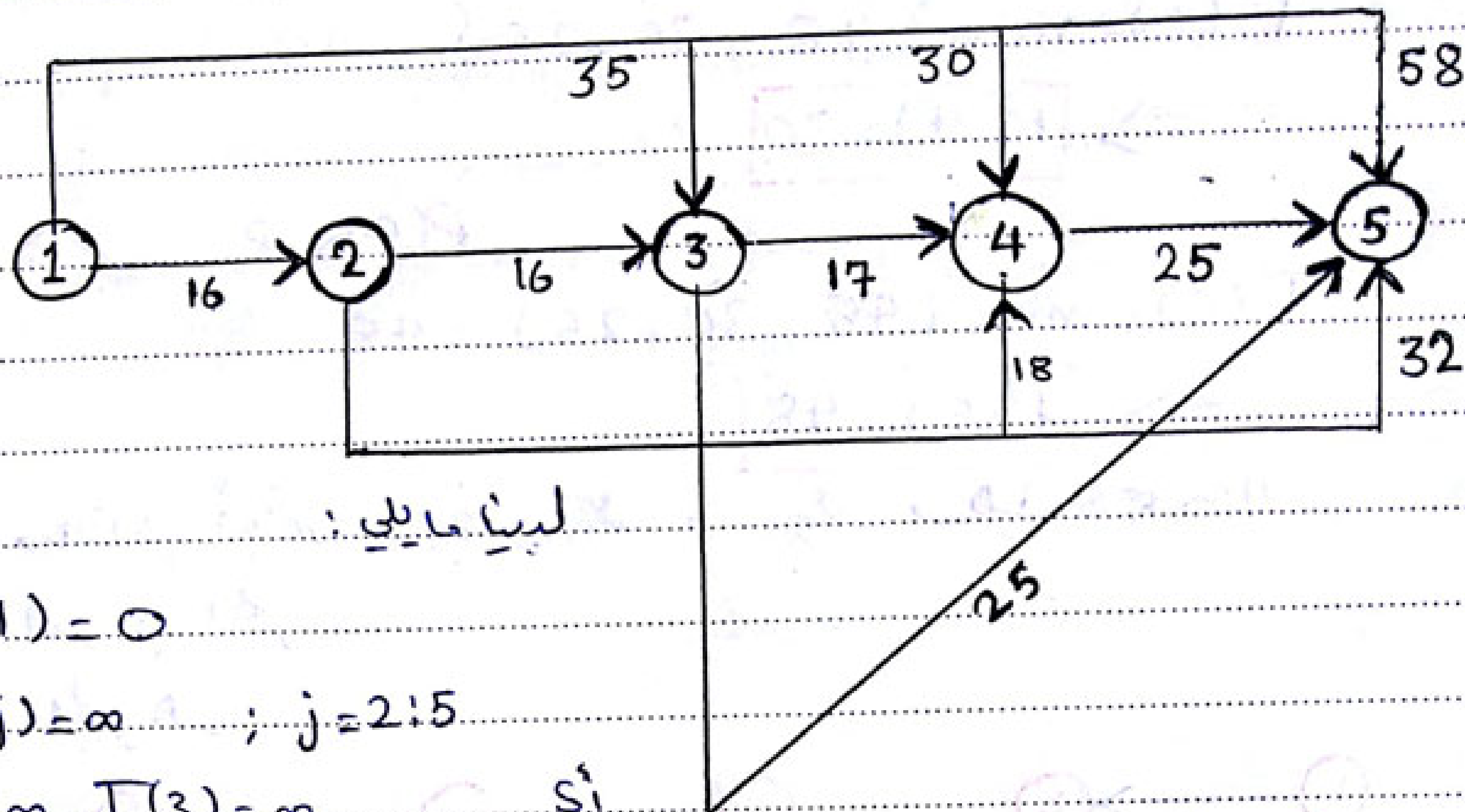
$P(j) = \min\{T(j), T(j+1), T(j+2), \ldots\}$

- نطبق خوارزمية Dijkister على المثال التالي :

ليكن لدينا البيان التالي :

المطلوب : أوجد طول أقصر مسار من العقدة 1 إلى العقدة 5 باستخدام خوارزمية Dijkister

" البيان موجّه "



لدينا ما يلي :

$P(1) = 0$

$T(j) = \infty \quad ; \; j = 2:5$

أي $T(2) = \infty \, , \, T(3) = \infty$

$T(4) = \infty \, , \, T(5) = \infty$

$d_{12} = 16 \quad , \; d_{13} = 35 \quad , \; d_{14} = 30 \quad , \; d_{15} = 58$

نحسب : $P(2) = ?$

$T(2) = \min\{\overset{\text{القديمة}}{T(2)} \; , \; P(1) + d_{12}\}$

$= \min\{\infty \; , \; 0 + 16\} = 16$

$T(3) = \min\{\infty \; , \; 0 + 35\} = 35$

$T(4) = \min\{\infty \; , \; 0 + 30\} = 30$

$T(5) = \min\{\infty \; , \; 0 + 58\} = 58$

$\Rightarrow \boxed{P(2) = \min\{16, 35, 30, 58\} = 16}$

: $P(3) = ?$

$T(3) = \min\{T(3) \; , \; P(2) + d_{23}\} = \min\{35 \; , \; 16 + 16\} = 32$

$T(4) = \min\{T(4) \; , \; P(2) + d_{24}\} = \min\{30 \; , \; 16 + 18\} = 30$

$T(5) = \min\{T(5) \; , \; P(2) + d_{25}\} = \min\{58 \; , \; 16 + 32\} = 48$

$\Rightarrow \boxed{P(3) = 30}$

: $P(4) = ?$

$T(4) = \min\{30 \, , \, 30 + 17\} = 30$

$T(5) = \min\{48 , 30+25\} = 48$

$\Rightarrow \boxed{P(4) = 30}$

$P(5) = ?$

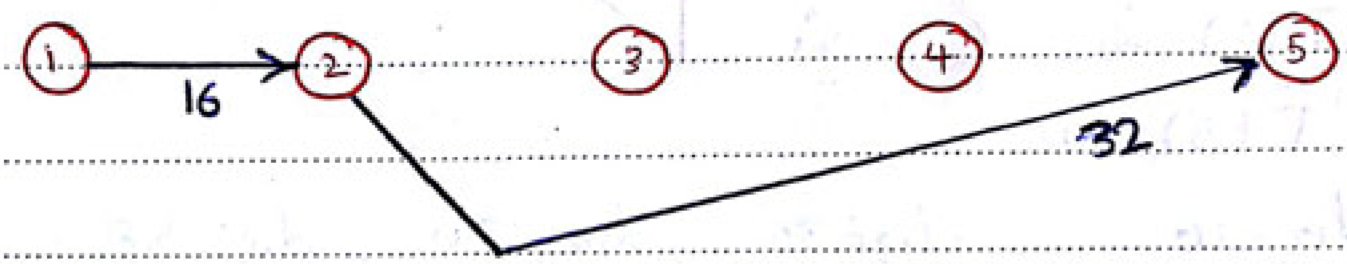
$T(5) = \min\{48 , 30+25\} = 48$

$\Rightarrow \boxed{P(5) = 48}$

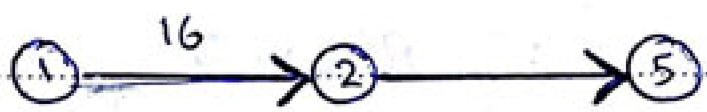
وبالتالي أقصر طريق بين v_1 و v_5 يساوي 48

لنوضح الممر

الممر هو



أي:



استخدام نظرية البيان بالترميز:

" اترك فراغ ثلاث صفحات تقريباً "

تعريف البيان الجزئي

تعريف: ليكن لدينا البيان التالي $G=(V;E)$ وليكن لدينا البيان $H=(L;U)$ عندئذٍ:

$H \subseteq G : L \subseteq V \wedge U \subseteq G$

جزئي — إذا تحقق الشرطين

تعريف: نقول عن البيان H إنه بيان مولّد للبيان G إذا كانت

$L \equiv V$ (تطابق) , $U \subseteq E$.

أي:

H مولّد لِ G $\Longleftrightarrow L \equiv V$, $U \subseteq E$.

تعريف البيان المولد بوساطة مسار: ليكن لدينا البيان $F=(R;S)$

نقول إنّ هذا البيان مولّد بوساطة مسار، إذا تمّ ما يلي محققاً

(مسار) $w=\langle x_1, e_1, \dots, x_m\rangle$

(عقد المسار هي عقد البيان) $R=\{x_1, \_\_\_, x_m\}$

ويتحقق الشرط التالي:

$e \in S$: $e\in E \wedge$ x_i, x_j e يربط بين عقدتين

حيث: $1\le i\le m$ ، $1\le j\le m$

تعريف البيان المولّد بواسطة مجموعة عقد: ليكن لدينا البيان $N=(X;Z)$ وهو بيان جزئي مولّد بوساطة عقد المجموعة X، حيث تحقق العلاقة التالية:

$X=\{v;$ v طرف للضلع $Z\ni e\}$

هو بيان جزئي مولّد لعناصر المجموعة Z (مجموعة الأضلاع)

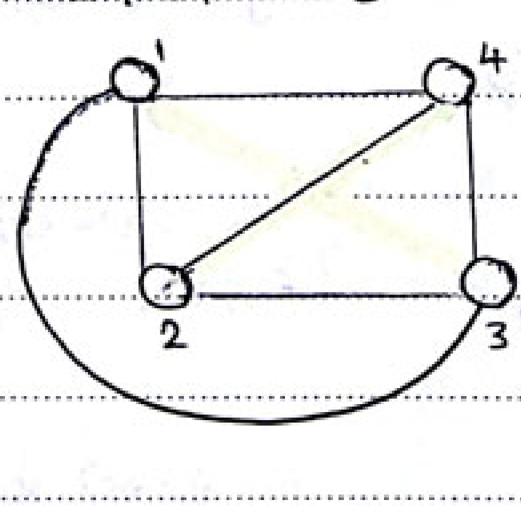
هو مولد بـ X لكن كل عقدة هي طرف لـ $Z\ni e$ $\Leftarrow$ هي عقدة من المجموعة X

أي: هو بيان جزئي مولد من عناصر المجموعة Z (أطراف عناصر المجموعة Z)

ملاحظة $\boxed{1}$ ليكن لدينا البيان التالي $G=(V;E)$ ، $v_1\in V$

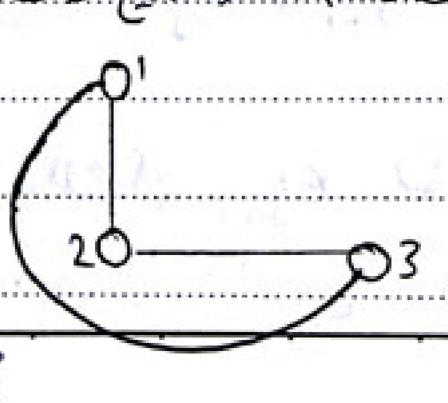
$G-\{v_1\}=G'=(V-\{v_1\}, E-\{e:$ e طرف للضلع $v_1\})$

مثال:



البيان الناتج عن حذف العقدة V_4 هو بيان جزئي

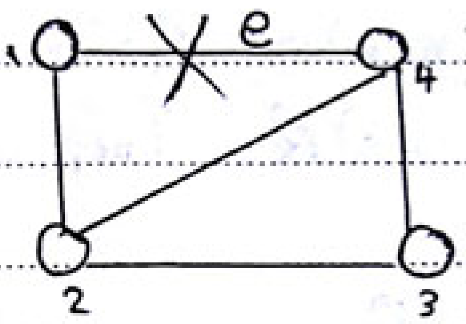
نحذف العقدة V_4 وجميع الأضلاع المؤثرة فيها



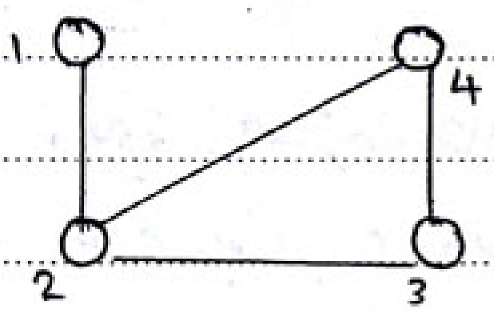
2 ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ ، $e\in E$

$$G-\{e\}=G'=(V;E'=E-\{e\})$$

مثال:



بحذف الضلع e نحصل على البيان التالي:



خوارزمية فلوري Fleury Algorithm لإيجاد دوائر أويلر:

تعتبر هذه الخوارزمية ذات كلفة معقولة لإيجاد دوائر أويلر، وبالتالي إيجاد بيانات أويلر.

- دائرة أويلر: هي دائرة تمر بجميع أضلاع البيان وجميع عقده دون تكرار الأضلاع، مع تكرار العقد (هي دائرة مركبة).

- ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ ، المطلوب: إيجاد دائرة أويلر في هذا البيان إن وجدت.

step 1:

نختار عقدة $x_0\in V$ (عقدة ما عشوائياً تم اختيارها)

step 2:

نشكل طريق $w_j=\langle x_0,\ldots,x_j\rangle$ — الطريق: تتابع من العقد والأضلاع

step 3:

الضلع e_{j+1}

(1) $e_{j+1}\notin w_j \quad \wedge \quad e_{j+1}\in E-\underbrace{\{e_1,e_2,\ldots,e_j\}}_{\text{أضلاع الطريق } w_j}$

إن الضلع e_{j+1} يؤثر على العقدة x_j (من الطريق)

نميز لهذا الضلع حالتين:

① ليس جسر أ في البيان $G_{\{e_1,e_2,...,e_j\}}$

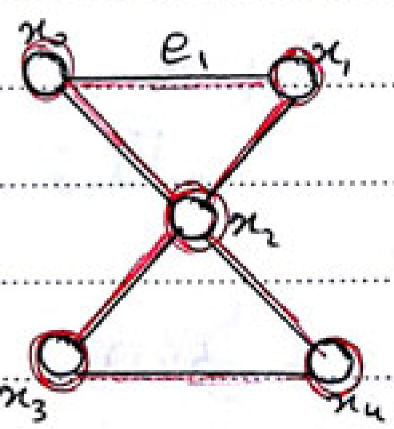
② هو جسر ⟸ لا ينتمي لدائرة أي لا ينتمي لدائرة أويلر ⟸ الحالة الأولى

① هي الحالة الطبيعية أي هو ليس جسر أ في البيان $G_{\{e_1,...e_j\}}$

نضيف الضلع e_{j+1} لنحصل على $w_{j+1}=w_j\cup\{e_{j+1},x_{j+1}\}$

وهكذا نتابع أي نكرر هذه الخطوة حتى نغطي جميع عقد البيان وأضلاعه.

ملاحظة: الخوارزمية تتوقف بعد عدد منتهٍ من الخطوات لأن البيان منتهٍ.



مثال على خوارزمية فلوري:

بيان أويلر، نوجد دائرة مركبة

تحوي جميع عقد البيان

- نختار عقدة ما عشوائياً ولتكن x_0.
- نختار طريق $\langle x_0,e_1,x_1,...,x_0\rangle$

حصلنا على دائرة أويلر.

مهم

مبرهنة/ إن الدائرة التي حصلنا عليها في بيان أويلر بخوارزمية فلوري هي دائرة أويلر.

⟸ G بيان أويلر فإن الدائرة التي حصلنا عليها بخوارزمية fleury هي دائرة أويلر.

الإثبات: ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بيان بسيط ومترابط، ولدينا G هو بيان أويلر، ولتكن الدائرة $C=\langle x_0,x_1,...,x_n\rangle$ دائرة حصلنا عليها باستخدام خوارزمية fleury

نميز حالتين:

نحذف أضلاع C

(I) $G'=(V;E_{\{e_1,...,e_n\}})$

$\forall x\in V\ ;\ deg(x)=0$

إذاً الدائرة C هي دائرة أويلر.

(II) إذا حذفنا من البيان مجموعة أضلاع الدائرة C ⇐ يبقى لدينا مجموعة عقد درجتها > 0 أي يوجد أضلاع لم تمر عليها الدائرة

$$G'' = (V ; E - \{e_1, \ldots, e_n\})$$

$$\exists x \in V \quad ; \deg(x) > 0$$

في هذه الحالة يوجد ضلع واحد على الأقل لا ينتمي للدائرة C

و لنثبت أن هذه الحالة غير ممكنة "حيث أن G هو بيان أويلر" نفرضاً

لتكن المجموعة S:

$$S = \{x : x \in V \quad , \deg(x) > 0\}$$

$$S \neq 0$$

و لتكن

$$\bar{S} = V - S \neq \phi$$ تحوي عقد درجتها تساوي الصفر

و بالتالي حسب مبرهنة سابقة نجد أن

$$S \cap \{x_0, \ldots, x_n\} \neq \phi$$ عقد مرتبطة بأضلاع غير موجودة بالدائرة

عقد الدائرة (عقد البيان)

لتكن $0 < m < n$, m أكبر عدد صحيح تكون من أجله

$$\deg(x_m) > 0$$

إذن $x_m \in S$

$$\Rightarrow x_{m+1} \in \bar{S}$$

لننشئ المجموعة

$$A = \{e : e \text{ يربط بين عقدة من } S \text{ مع عقدة من } \bar{S}\} \neq \phi$$

و ننشئ البيان $G' = (V ; E - \{e_1, \ldots, e_n\})$, حسب مبرهنة سابقة

يكون $A \cap (E - \{e_1, \ldots, e_n\}) \neq \phi$

أضلاع الدائرة

و بالتالي بأخذ البيان

$$G_m = (V ; E - \{e_1, \ldots, e_m\})$$

$\Rightarrow A \cap E - \{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq \{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$

ومن تعريف m هو أكبر عدد صحيح بحيث

$deg(x_m) > 0$

$\Rightarrow A \cap E - \{e_1, \ldots, e_m\} = \{e_{m+1}\}$

$\Leftarrow$ e_{m+1} هو جسر في G_m

وبما أن العقدة $x_m \in S$

$deg(x_m) > 0$ في البيان G_m

$G' = G_m$

إذا يوجد ضلع بحيث تكون x_m هي أحد أطرافه $\exists e$

لكن $e \neq e_{m+1}$, $e \neq e_m$

والضلع e هو جسر في G_m

((البرهان ينتهي نتايج بالملاحظة السابقة)) ...

انتهت

Syria Math تصحيح أخطاء محاضرات نظرية البيان

م/٥/٨

P.64 $deg(u) = 2K - l$ ✓

P.44 م/8/ إثبات الاتجاه الثاني

$e \notin C \subseteq G \,,\ \forall C \Rightarrow e$ جسر ✓

P.44

السطر الأخير

$e' \notin E \Rightarrow e' \in \overline{E}$ ✓

P.45

إثبات الحالة الأولى

$\Rightarrow e = (v_1, v_2) \notin E$ ✓

$\Rightarrow e \in \overline{E}$

Razan