21/4/2016 الخميس (48) المحاضرة التاسعة

تكامل استيلجس

$$\int_0^2 x^2\,dx = 9$$

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 12$$

* تعريف تكامل ريمان
- مجموع ريمان $\int_0^2 (x+1)\,dx = 4$
- تكامل ريمان $\int_0^4 (x+1)\,dx = 8$
- تمارين

* تعريف تكامل استيلجس.
- مجموع استيلجس
- تكامل استيلجس
- ملاحظات: (1) $g(x) = x$
(2) $f(x) = 1$

* شروط وجود تكامل استيلجس
* خواص تكامل استيلجس
* تعريف الدالة الدرجية.
- مبرهنة (1): لحساب قيمة تكامل استيلجس إذا كانت $g(x)$ درجية
- مبرهنة (2): لحساب قيمة تكامل استيلجس بشكل عام

تعريف تكامل ريمان :

إذا كانت الدالة f معرفة ومحدودة على $[a,b]$ وكانت لدينا التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$ بحيث :

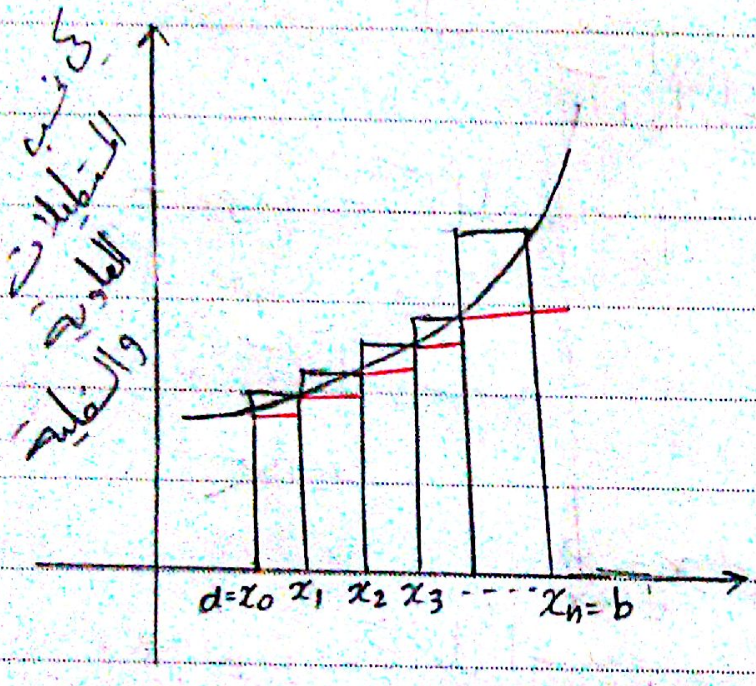
$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

نأخذ المجموع :

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

حيث :

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$



شرح :

قيمة عليا $U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_k$

تابع متزايد

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

قيمة دنيا $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\, \Delta x_k$

بشكل عام

أكبر قيمة للتابع $U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \cdot \Delta x_k$

بشكل عام

أصغر قيمة للتابع $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(t) \cdot \Delta x_k$

بشكل عام لأي تابع

- $M_k(f) = \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$

- $m_k(t) = \inf\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$

$$L(f,P) \le \sigma(f,P) \le U(f,P)$$

شروط وجود تكامل ريمان :

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\; - L) = 0$$

$$\Delta x = \max(\Delta x_k) \qquad 1 \le k \le n$$

$\lambda P = \|P\| = \Delta x$ نظيم التجزئة P

يكون تكامل ريمان موجوداً إذا وجدت النهاية A بحيث :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sigma(f, P) = A \in \mathbb{R}$$

$\Delta x = \max$

نرمز لهذه النهاية بـ $\int_a^b f\,dx$

* نقول عن f أنه كمول (حسب ريمان) إذا وجدت النهاية $A \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sigma(f, P) = A$$

$$\Delta x = \max(x_k - x_{k-1}) \qquad 1 \le k \le n$$

وكانت هذه النهاية مستقلة عن P ومن اختيار t_k، نرمز لـ A بـ $\int_a^b f\,dx$

مهم

* صيغة ثانية للتعريف في بعض المراجع :

نقول عن f أنه كمول حسب ريمان إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \delta > \Delta x \Rightarrow |\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$$

حيث :

$$I = \int_a^b f\,dx$$

أو الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P_3 : P \supset P_3 \Rightarrow |\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$$

تعريف تكامل استيلجس :

إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين معرفتين ومحدودتين على $[a,b]$
وكانت P تجزئة لـ $[a,b]$ بحيث :

$$P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$$

نأخذ المجموع : $S(P,f,g)$ أو

$$S(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g_k$$

$$\Delta g_k = g(x_k)-g(x_{k-1})$$

و $t_k \in [t_{k-1}, t_k]$

نقول عن f أنه قابل للمكاملة بالنسبة لـ g على $[a,b]$ (وفق استيلجس)
إذا وجدت النهاية $A \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$A=\lim_{\Delta x \to 0} S(f,g,P)$$

ونرمز له بـ :

$$A=\int_a^b f\,dg$$

حيث :

$$\Delta x = \max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$$

ملاحظات :

1- $g(x)=x \overset{\text{نعوض}}{\Longleftarrow} g(x_k)=x_k$

$$S(f,x,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$A=\lim_{\Delta x\to 0} S(f,x,P)=\int_a^b f\,dx$$

(تكامل ريمان)

$\Leftarrow f(x)=1$ -2

$$S(1,g,P)=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)-g(x_{k-1})$$

$$=g(\cancel{x_1})-g(x_0)+g(\cancel{x_2})-\cancel{g(x_1)}+\cdots+g(x_n)-g(\cancel{x_{n-1}})$$

$$=g(x_0)-g(x_n)$$

$$=g(b)-g(a)$$

$$\boxed{\int_a^b 1\, d(g(x))=g(b)-g(a)}$$ تفاضل وتكامل

شروط وجود تكامل استيلجس :

مبرهنة (1) :

إذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$

فإن الشرط اللازم والكافي ليكون تكامل استيلجس موجود هو أن

تتحقق العلاقة:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(U(f,g,P)\right)-L(f,g,P))=0$$

$$\Delta x=\max_{1\le k\le n}(\Delta x_k)=\max_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$$

$$U(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta g_k$$

$$L(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta g_k$$

حيث :

$$M_k(f)=\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$$

$$m_k(f)=\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$$

مبرهنة (2):

إذا كانت $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ و $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ فإن:
$\int_a^b f \cdot dg$ يكون موجوداً.

مبرهنة (3):

إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$
و $g(x)$ د. ت. م على $[a,b]$ فإن تكامل استيلجس $\int_a^b f dg$ يكون موجوداً
فرق دالتين متزايدتين

مبرهنة (4):

إذا كانت f كمولة على $[a,b]$ حسب ريمان، وكانت $g(x)$ تحقق شروط
ليبشتز فإن التكامل $\int_a^b f dg$ يكون موجوداً.

مبرهنة (5):

إذا كانت f مستمرة على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ دالة تحقق شرط
ليبشتز فإن التكامل $\int_a^b f dg$ يكون موجوداً.

مبرهنة (6): مجال مغلق

إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ والدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق
ومحدودة وكمولة حسب ريمان على $[a,b]$ فإن
$\int_a^b f dg$ يكون موجوداً وتتحقق العلاقة:

$$(S)\int_a^b f\,dg = (R)\int_a^b f \cdot g'\,d(x)$$

تعني تكامل استيلجس

تكامل ريمان

خواص تكامل استيلجس:

1- $\int_a^b d(g(x)) = g(b) - g(a)$

2- $\int_a^b (f_1 \mp f_2)\,dg = \int_a^b f_1\,dg \mp \int_a^b f_2\,dg$

-3 $$\int_a^b f(x)\, d[g_1(x) \mp g_2(x)] = \int_a^b f(x)\, dg_1(x) \mp \int_a^b f(x)\, dg_2(x)$$

(الجداء والقسمة غير موجودين)

-4 $$\int_a^b [\alpha f(x)]\, d[\beta g(x)] = \alpha . \beta \int_a^b f\, dg$$

: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

-5 إذا كانت $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ وكان التكاملات

$$\int_a^b h\, dg \quad , \quad \int_a^b f\, dg$$

موجودين

وكان $f(x) \leq h(x)$ وذلك $\forall x \in [a,b]$

فإن:

$$\int_a^b f\, dg \leq \int_a^b h\, dg$$

-6 إذا كانت $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ وكان $\int_a^b f dg$ موجوداً

فإن:

1. $\int_a^b |f(x)|\, dg$ يكون موجوداً

(العكس غير صحيح بالضرورة)

2. $\int_a^b f^2(x)\, dg$ يكون موجود

وتتحقق العلاقة:

$$\left|\int_a^b f\, dg\right| \leq \int_a^b |f|\, dg$$

7- إذا كانت $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$
وكان التكامل $\int_a^b f\,dg$ موجوداً

فإن التكاملين:
$$\int_a^b f\,dg \quad , \quad \int_c^b f\,dg$$
يكونان موجودين ويحققان العلاقة:
$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$$

حيث $c \in [a,b]$ (العكس ليس صحيح بالضرورة)

8- إذا كان التكاملان:
$$\int_a^c f\,dg \quad , \quad \int_c^b f\,dg$$
موجودين حيث $a < c < b$
وكان أحد التابعين f و g مستمراً على c والآخر محدوداً في جوار c
فإن التكامل $\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً وتحقق العلاقة:
$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$$

9- برهنة التجزئة: (مهم)
إذا كان أحد التكاملين $\int_a^b f\,dg$ وَ $\int_a^b g\,df$ موجوداً
فإن الآخر يكون موجود وتحقق العلاقة:
التكامل بالتجزئة
$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = [f(x)\cdot g(x)]_a^b$$
$$= f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)$$

10- إذا كان f مستمراً على $[a,b]$ وكان g د.ت.م على $[a,b]$
فإن:
$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \le \max_{a \le x \le b} |f(x)| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x)$$

انتهى