3) Γ طريق " " يحوي بداخله الصفر ولا يحوي i.

4) Γ طريق مغلق بسيط موجه بالاتجاه الموجب ويحوي بداخله الصفر و i.

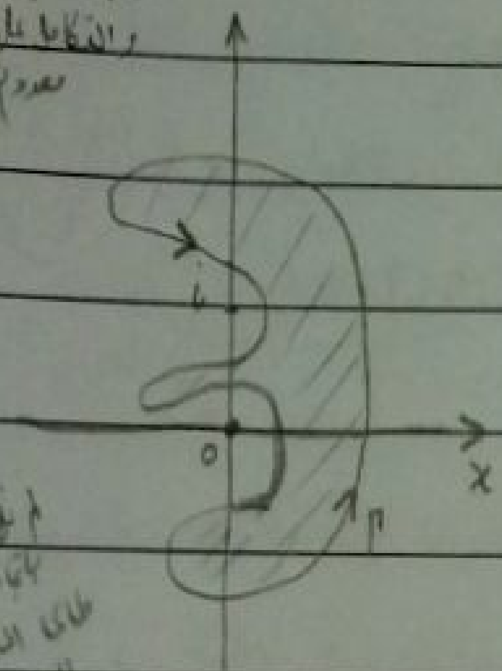
المحاضرة العشرون:

كل الطرق التي لا تحوي 0 و i طرق مشوهة

حل التمرين: 1) التابع المكامل تحليلي على $G = \mathbb{C} \setminus \{0, i\}$.

بما أن المنحني Γ وداخله محتوى في المنطقة $G \Leftarrow G$ في $\Gamma \sim 0$.

حسب مبرهنة كوشي:

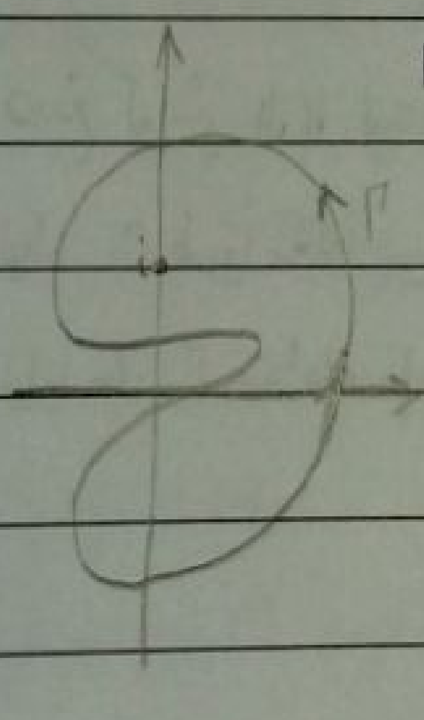


$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz = 0$$

2)

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz = \int_\Gamma \frac{\left(\frac{\sin z}{z^2}\right)}{z-i} dz$$

$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$ فهو تحليلي على محيط وداخل Γ. و i نقطة داخل Γ (*)



حسب صيغة كوشي التكاملية:

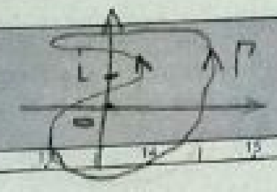
$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz = 2\pi i f(i)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\sin i}{i^2}\right)$$

$$= -2\pi i \sin i = -2\pi i \left(\frac{e^{-1} - e^{1}}{2i}\right)$$

$$= \pi(e^{1} - e^{-1}) = 2\pi \underbrace{\operatorname{sh} 1}_{\text{التابع الزائدي}}$$

(*) و Γ موجه بالاتجاه الموجب وبسيط



(3 نستخدم صيغة كوشي التكاملية العامة لأننا نشترك z^2 بالمقام ولكن الأس ليس واحد

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz = \int_\Gamma \frac{\left(\frac{\sin z}{z-i}\right)}{z^{2=1+1}}\,dz$$

تحليلي على $f(z)=\frac{\sin z}{z-i}$ على $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ فهو تحليلي على محيط وداخل Γ

و $z=0$ تنتمي لداخل Γ و Γ بسيط موجه بالاتجاه الموجب.

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(0) = 2\pi i\left(\frac{\cos z}{z-i} - \frac{\sin z}{(z-i)^2}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{-i} - 0\right) = -2\pi$$

مشتق البسط على المقام

حيث طبقنا هذه الصيغة:

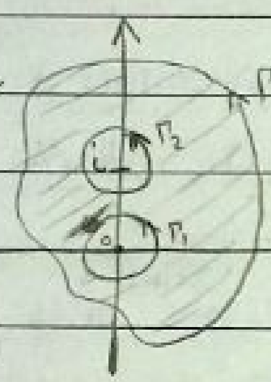
$$\boxed{\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)}$$

منحني مغلق بسيط موجه بالاتجاه الموجب (ليس بالضرورة دائرة)

نقطة داخل Γ (ليس بالضرورة مركز الدائرة)

(4 المكامل تحليلي على $G=\mathbb{C}\setminus\{0,i\}$ نستخدم تعميم شكل كوشي الأول

العلية التي تجمع في (3) غير ممكنة



طرق Γ_1, Γ_2 بسيط وموجه بالاتجاه الموجب حيث كل الدوائر غير متقاطعتين

لا يهم إن كان تحليلي داخل الطرق الجزئية أم لا

و بالتالي فهو تحليلي على الطرق $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$

وبما أن Γ_1 و Γ_2 تقعان داخل Γ وغير متقاطعين

ولها اتجاه Γ ذاته وهما بسيطان كالطريق Γ

والمكامل تحليلي على المنطقة المظللة فإن:

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz = \int_{\Gamma_1}\frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz + \int_{\Gamma_2}\frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz$$

$$= \int_{\Gamma_1}\frac{\left(\frac{\sin z}{z-i}\right)}{z^2}\,dz + \int_{\Gamma_2}\frac{\frac{\sin z}{z^2}}{(z-i)}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin z}{z-i}\right)'\Big|_{z=0} + 2\pi i\left(\frac{\sin z}{z^2}\right)\Big|_{z=i}$$

$$= -2\pi + 2\pi \operatorname{sh} 1$$

إذا كان لدينا نقطة غير مجموعة منتهية يساوي الصفر فالنقطة تنتمي لتلك المجموعة

النقاط الشاذة لتابع عقدي:

نقول عن نقطة z_0 إنها نقطة شاذة لتابع عقدي f إذا لم يكن f تحليلياً عندها وفي جوار لـ z_0 (قرص مفتوح مركزه z_0) يحوي نقطة واحدة على الأقل يكون f تحليلياً عندها.

مثال: إن $z=-i$ و $z=i$ هما النقطتان الشاذتان الوحيدتان لـ $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$

لأن التابع $f(z)$ غير تحليلي عند i و $-i$ لأنه غير معرف عندها.

أي جوار لهذه النقاط سيحوي على نقطة واحدة على الأقل التابع f يكون تحليلي عندها.

النقطة الشاذة لتابع f إما أن تكون معزولة أو أن تكون غير معزولة.

* نقول عن نقطة شاذة لتابع f إنها شاذة معزولة إذا ملكت جواراً (قرص مركزه z_0) لا يحوي أي نقطة شاذة للتابع f غير z_0.

إذا نقطة z_0 والتابع غير تحليلي عندها (z_0 شاذة)

وإلا فنقول إن النقطة z_0 نقطة شاذة غير معزولة أي أن النقطة الشاذة غير المعزولة أي جوار لها سيحوي نقطة شاذة أخرى غيرها للتابع واحدة على الأقل. (مهما صغرنا الجوار سنجد نقطة شاذة غيرها)

وإذا حاولنا تصغير هذا الجوار حتى لا يحوي نقاطاً شاذة غير z_0 فإن z_0 شاذة معزولة

لغة طبولوجية ← (النقطة الشاذة غير المعزولة هي نقطة تجمع لمجموعة النقاط الشاذة للتابع)

مثال عن نقطة شاذة معزولة:

في المثال السابق إن كلا النقطتين $z=i$ و $z=-i$ نقطة شاذة معزولة للتابع $\frac{1}{z^2+1}$ لأن الجوار $D(i,1)$ للنقطة i لا يحوي $-i$ أي لا يحوي نقطة شاذة أخرى للتابع غير i

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}.$$

بالمثال $D(-i,1)$.

النقاط مع النقاط الشاذة غير المعزولة صعب

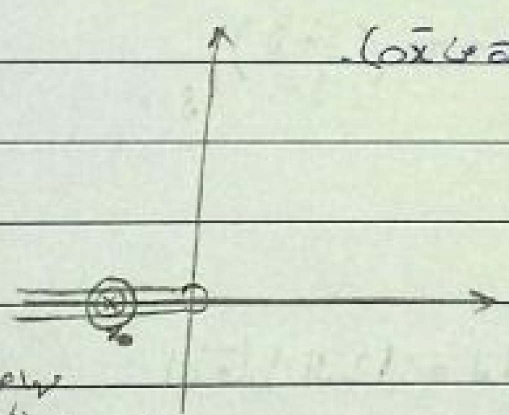
مثال عن نقطة شاذة غير معزولة:

لو أخذنا أي عدد حقيقي سالب (غير موجب) ← يمكن أن نأخذ الصفر هو نقطة شاذة غير معزولة للتابع $\log z$ (الفرع الرئيسي لـ $\log z$).

$\log z$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\overline{ox}$ وهو غير تحليلي عند أي نقطة من $\overline{ox}$.

(عند أي عدد حقيقي غير موجب لأنه غير معرف عند أي نقطة من $\overline{ox}$).

ولا يوجد لأي عدد حقيقي غير موجب جوار لا يحوي نقاطاً شاذة للتابع $\log z$ مختلفة عن تلك النقطة.



مهما صغرنا الجوار لنزول النقطة يبقى جزء من المحور داخل الجوار أي يوجد نقطة شاذة غيرها في الجوار

خاصة: إذا كانت مجموعة النقاط الشاذة لتابع مجموعة منتهية فإن كل هذه النقاط ستكون شاذة معزولة.

النقطة الشاذة غير المعزولة هي نقطة تجمع

المحور في الشوكة لا يوجد لا نقطة z_0

$\mathbb{C}$ فضاء متري ← المسافة بين عنصرين أكبر تماماً من الصفر

لأنه المجموعة منتهية فإن هذه النقاط سيكون min أصغرها

مجموعة النقاط الشاذة هي مجموعة منتهية فلا يمكن أن يكون لها

$\bar{z}$ مستمر على $\mathbb{C}$ لكن غير قابل للاشتقاق عند أي نقطة من $\mathbb{C}$
⇓
$\bar{z}$ غير تحليلي عند أي نقطة من $\mathbb{C}$

بشكل خاص: جميع النقاط الشاذة لتابع كسري (حاصل قسمة كثيري حدود) نقاط شاذة معزولة لأن مجموعة النقاط الشاذة لتابع كسري هي أصفار المقام وأصفار المقام هي حلول معادلة جبرية من درجة منتهية فإذا كانت هذه الدرجة n فإن عدد الأصفار (عدد الحلول المختلفة) لها هي على الأكثر n، أي أن مجموعة النقاط الشاذة لتابع كسري هي مجموعة منتهية وبالتالي جميع نقاطها هي نقاط شاذة معزولة.

مجموعة النقاط الشاذة لتابع مجموعة منتهية $\Leftarrow$ جميع النقاط الشاذة لهذا التابع معزولة.

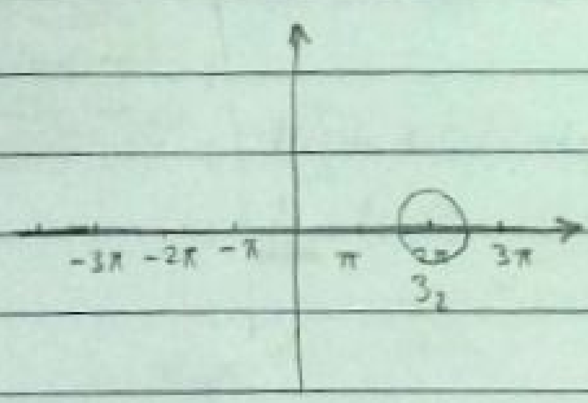
* هل العكس صحيح؟

العكس غير صحيح بالضرورة ولنثبت ذلك نحتاج إلى مثال على تابع عندي جميع نقاطه الشاذة غير منتهية وجميعها معزولة.

المثال المعاكس:

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

إن مجموعة النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي المجموعة $\{z_k = \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ وهي مجموعة أصفار المقام أي مجموعة حلول $\sin z = 0$ حيث أن البسط والمقام تحليليان على $\mathbb{C}$.



إن مجموعة النقاط الشاذة هنا غير منتهية وجميع هذه النقاط هي نقاط شاذة معزولة لأن البعد بين أي نقطتين شاذتين متتاليتين منها يساوي π.

وهذا يعني أن: $D(z_k, \frac{\pi}{2})$ لا يحوي من النقاط الشاذة للتابع إلا z_k.

إذا كان عدد النقاط الشاذة لتابع منتهٍ فجميع هذه النقاط ستكون معزولة. لتابع غير منتهٍ فقد يكون هناك نقاط غير معزولة.

مثال:

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

إن النقاط الشاذة لحاصل قسمة تابعين هي مجموعة النقاط الشاذة للبسط اجتماع مجموعة النقاط الشاذة للمقام اجتماع أصفار المقام.

في هذا المثال لا يوجد للبسط نقاط شاذة لأنه تحليلي على $\mathbb{C}$

للمقام نقطة شاذة وحيدة وهي $z=0$ لأنه غير معرف عند الصفر.

أما أصفار المقام فهي حلول المعادلة $\sin \frac{1}{z} = 0$ أي $\frac{1}{z} = \pi k : k \in \mathbb{Z}^*$

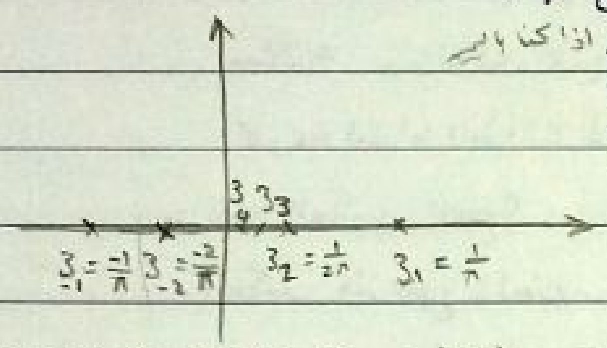
أي هي المجموعة: $\{z_k = \frac{1}{\pi k} : k \in \mathbb{Z}^*\}$

إذاً مجموعة النقاط الشاذة للتابع f هي: $\{0, z_k = \frac{1}{\pi k} , k \in \mathbb{Z}^*\}$

وهي غير منتهية.

إذا كان لدينا نقطة شاذة غير معزولة للتابع f تأكيد مجموعة النقاط الشاذة للتابع تكون غير منتهية

جميع النقاط z_k هي نقاط شاذة معزولة للتابع f.



إذا كنا بالموجب

أقرب نقطة شاذة لـ z_k ($0<k$) هي z_{k+1}

أما إذا كنا بالسالب

أقرب نقطة شاذة لـ z_k ($k<0$) هي z_{k-1}

وفي كلا الحالتين هذا البعد موجب تماماً فلو رمزنا

لهذا البعد r_k فإن $D(z_k , \frac{r_k}{2})$

لن يحوي أي نقطة شاذة لـ f غير z_k (هذا تبرير لماذا z_k جميعها نقاط شاذة معزولة)

أما $z=0$ فهي نقطة شاذة غير معزولة وسبب ذلك هو التالي:

المتتالية z_k تسعى للصفر: $z_k = \frac{1}{\pi k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

وجميع نقاط هذه المتتالية هي نقاط شاذة للتابع وهذا يعني أنه أي جوار

للصفر سيحوي كل حدود المتتالية z_k باستثناء عدد منها.

من الآن فصاعداً سنتعامل فقط مع النقاط المعزولة الشاذة

النقطة الشاذة المعزولة نوعان إما أن تكون شاذة كاذبة (قابلة للإزالة).

أو أن تكون شاذة صادقة.

النقطة الشاذة الأساسية

نقطة شاذة

(القطب)

تعود نظامية