المحاضرة الثامنة عشرة : نمذجة رياضية . 2016/5/16

البرمجة الديناميكية :

- مجالات الاستخدام :

تستخدم لإيجاد الحل الأمثل من المواقف متعددة الخطوات والتي تتضمن مجموعة من القرارات المرتبطة .

أمثلة ① مسائل توزيع الموارد وتنظيم الانتاج والإدارة .

② مسائل التخزين وتجديد الآلات ، وغيرها من الأمثلة ...

- منهج الاستنتاج :

من الخلف إلى الأمام (من آخر خطوة إلى أول خطوة) .

- مبدأ العمل :

تجزئة المسألة إلى خطوات ترتبط بمعيار معين حسب طبيعة الموقف .

- موضوع الدراسة :

في كل خطوة نعرف مجموعة من الحالات حيث يتفرع من كل حالة مجموعة من القرارات الممكنة .

- مقياس الفاعلية :

يحدد مقياس الفاعلية من صورة تكلفة أو ربح أو زمن أو أي مقياس آخر يعمل تابع الهدف .

- القرار الأمثل :

هو الذي يحقق في كل حالة القيمة المثلى لتابع الهدف في الحالة السابقة .

* أبرز المساهمين في تطوير هذه النظريات وتطبيقاتها هو العالم ريتشارد بالمان .

تتميز طرق حل مسائل البرمجة الديناميكية عن غيرها بما يلي :

1- تعطي الحل الأمثل المطلق وليس الحل الأمثل النسبي .

2- تخفض الزمن اللازم للحساب من جراء تجزئة المسألة إلى مسائل صغيرة وبعدد أقل من المتغيرات وبذلك ينخفض عدد البدائل في كل خطوة .

3- لا تتطلب أياً من الشروط الخطية أو التحدب أو حتى الاستمرارية ومع ذلك فهي محددة ضمن أشكال خاصة بتابع الهدف .

4- إن هذه الطريقة (طريقة حل البرامج الديناميكية) تتضمن عناصر تحليل الحساسية حيث نبين من خلالها حساسية النتائج من أجل جملة من القيم للمتغيرات الداخلة في المسألة وتمكننا من إيجاد السياسات القريبة للسياسة المثلى .

Scanned by CamScanner

مع الإشارة إلى أنها لا تستطيع حل كل أنواع المسائل.

5- تصنف مسائل البرمجة الديناميكية وفق ثلاث حالات:

أ) مسائل وحيدة البعد ووحيدة المؤثر.

ب) مسائل متعددة الأبعاد ووحيدة المؤثر.

أو وحيدة البعد ومتعددة المؤثرات.

ج) مسائل متعددة الأبعاد ومتعددة المؤثرات.

تعريف البعد:

هو المعيار الذي يؤثر في عملية اتخاذ القرار في مرحلة معينة من مراحل الحصول على الحل الأمثل حيث أنه إذا كان المعيار وحيد في اتخاذ القرار عندئذٍ نسمي المسألة بمسألة وحيدة البعد وإلا فهي متعددة الأبعاد.

تعريف المؤثر:

هو تابع الهدف.

إذا كانت المسألة تقبل أكثر من هدف واحد عندها نسميها مسألة متعددة المؤثرات في المثال التالي نوضح نوع من مسائل البرمجة الديناميكية وحيدة البعد ووحيدة المؤثر مع شرح كامل لكيفية إيجاد الحل الأمثل.

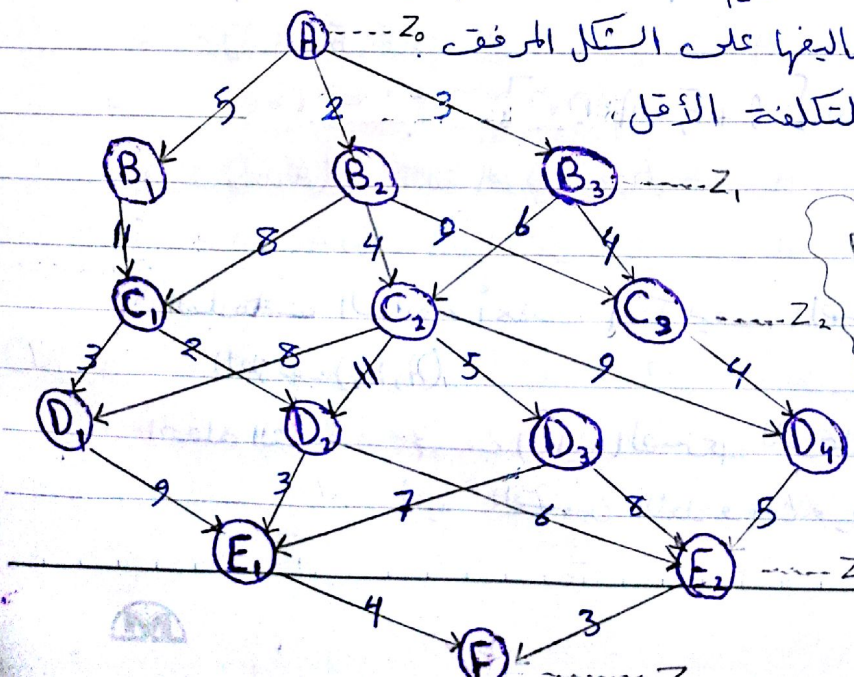
مسألة:

يطلب إنشاء اتستراد بين المدينتين A, F حيث يجب على هذا الاتستراد أن يمر من المدن B, C, D, E وبالتالي سيتشكل من 5 أقسام.

من أجل كل قسم تمت دراسة وتقييم كلفة مختلف البدائل

وقد تم تمثيل هذه البدائل مع تكاليفها على الشكل المرفق

المطلوب: تحديد الطريق ذات التكلفة الأقل لإنشاء هذا الاتستراد.



حتى نصل إلى B إما نذهب عن طريق B_1 أو B_2 أو B_3

حتى نصل إلى C إما نذهب عن طريق C_1 أو C_2 أو C_3

حتى نصل إلى D إما نذهب إلى D_1 أو D_2 أو D_3 أو D_4

حتى نصل إلى E إما نذهب عن طريق E_1 أو E_2

ثم نصل من E إلى F

Scanned by CamScanner

$Z_0 : A$

$Z_1 : B_1 \quad B_2 \quad B_3$

$Z_2 : C_1 \quad C_2 \quad C_3$

$Z_3 : D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4$

$Z_4 : E_1 \quad E_2$

$Z_5 : F$

من أجل حساب الكلفة الأصغرية نستخدم العلاقة التالية:

$$G_n(Z_n) = Min\left[G_{n-1}(Z_{n-1}) + F_n(Z_{n-1}, Z_n)\right] \quad (*)$$

حيث: $G_n(Z_n)$ الكلفة الصغرى للسياسة الجزئية حتى Z_n

$G_{n-1}(Z_{n-1})$ الكلفة الصغرى للسياسة الجزئية من A حتى Z_{n-1}

$F_n(Z_{n-1}, Z_n)$ كلفة المرحلة أو القسم بين Z_{n-1} و Z_n .

نبدأ بحل هذه المسألة ونبدأ بالخطوة الأولى:

لحساب الكلفة الصغرى للسياسة الجزئية التي تضم المرحلة الأولى فقط.

حيث $n=1$ نعوض من العلاقة $(*)$ فنحصل على:

$$G_1(Z_1) = Min\left[G_0(Z_0) + F_1(Z_0, Z_1)\right]$$

وصار نحسب $G_1(Z_1)$ من أجل كل بديل لـ Z_1 : (Z_1 أي بديل هي B_1, B_2, B_3)

$$G_1(B_1) = Min\left[0 + F_1(A, B_1)\right] = 5$$

حيث $F_1(A, B_1)$ تكلفة الطريق بين A, B_1 .

$$G_1(B_2) = Min\left[0 + F_1(A, B_2)\right] = 2$$

حيث $F_1(A, B_2)$ تكلفة الطريق من $A \longrightarrow B_2$.

$$G_1(B_3) = Min\left[0 + F_1(A, B_3)\right] = 3$$

حيث $F_1(A, B_3)$ تكلفة الطريق من $A \longrightarrow B_3$.

بما أن A ليس لديها بدائل لذلك يكون القيمة الأصغرية هي نفسها المسافة بين A وبدائل Z_1

العلاقات السابقة أعطت التكاليف الصغرى للمرحلة الأولى وهي موافقة للطريق (A, B_2).

المرحلة الثانية: نحسب الكلفة الصغرى للمرحلتين الأولى والثانية معاً

أي القسمين الأول والثاني حيث $n=2$.

Scanned by CamScanner

$$G_2(Z_2) = \text{Min}\left[G_1(Z_1) + F_2(Z_1, Z_2)\right]$$

ونحسبها من أجل كل بديل لـ Z_2 أي من أجل C_1, C_2, C_3

عند الحساب من أجل البديل C_1 يجب الأخذ بعين الاعتبار جميع البدائل السابقة B_1, B_2, B_3

وكذلك مع C_2, C_3 . (أي نأخذ المرحلة الأولى مع كل بديل من بدائل المرحلة الثانية)

$$G_2(C_1) = \text{Min}\left[G_1(B_1)+F_2(C_1,B_1), G_1(B_2)+F_2(C_1,B_2), G_1(B_3)+F_2(C_1,B_3)\right]$$
$$= \text{Min}\left[5+11, 2+8, 3+\infty\right] = 10$$

نقرأ الطريق الذي حصلنا عليه وفق القيمة الأصغرية التي حصلنا عليها

$$A \xrightarrow{2} B_2 \xrightarrow{8} C_1$$

وهو الطريق الأمثل للوصول إلى C_1 .

$$G_2(C_2) = \text{Min}\left[G_1(B_1)+F_2(C_2,B_1), G_1(B_2)+F_2(C_2,B_2), G_1(B_3)+F_2(C_2,B_3)\right]$$
$$= \text{Min}\left[5+\infty, 2+4, 3+6\right] = 6$$

نقرأ الطريق الذي حصلنا عليه وفق القيمة الأصغرية التي حصلنا عليها.

$$A \xrightarrow{2} B_2 \xrightarrow{4} C_2$$

وهو الطريق الأمثل للوصول إلى C_2 .

$$G_2(C_3) = \text{Min}\left[G_1(B_1)+F_2(C_3,B_1), G_1(B_2)+F_2(C_3,B_2), G_1(B_3)+F_2(C_3,B_3)\right]$$
$$= \text{Min}\left[5+\infty, 2+9, 3+4\right] = 7$$

نقرأ الطريق المقابل للقيمة 7 (الذي حصلنا عليه وفق القيمة الأصغرية التي حصلنا عليها).

$$A \xrightarrow{3} B_3 \xrightarrow{4} C_3$$

وهو الطريق الأمثل للوصول إلى C_3 .

المرحلة الثالثة: نحسب الكلفة الصغرى للمرحلتين الأولى والثانية والثالثة معاً.

أي $n=3$

$$G_3(Z_3) = \text{Min}\left[G_2(Z_2) + F_3(Z_2, Z_3)\right]$$

ونحسبها من أجل كل بديل لـ Z_3 أي من أجل D_1, D_2, D_3, D_4 .

$$G_3(D_1) = \text{Min}\left[G_2(C_1)+F_3(C_1,D_1), G_2(C_2)+F_3(C_2,D_1), G_2(C_3)+F_3(C_3,D_1)\right]$$
$$= \text{Min}\left[10+3, 6+8, 7+\infty\right] = 13$$

نقرأ الطريق: $A \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D_1$

Scanned by CamScanner

$$G_3(D_2) = \text{Min}\left[G_2(C_1)+F_3(C_1,D_2),\ G_2(C_2)+F_3(C_2,D_2),\ G_2(C_3)+F_3(C_3,D_2)\right]$$
$$= \text{Min}[10+2,\ 6+11,\ 7+\infty] = 12 \qquad A \to B_2 \to C_1 \to D_2$$
$$G_3(D_3) = \text{Min}[G_2(C_1)+F_3(C_1,D_3),\ G_2(C_2)+F_3(C_2,D_3),\ G_2(C_3)+F_3(C_3,D_3)]$$
$$= \text{Min}[10+\infty,\ 6+5,\ 7+\infty] = 11 \qquad A \to B_2 \to C_2 \to D_3$$
$$G_3(D_4) = \text{Min}[G_2(C_1)+F_3(C_1,D_4),\ G_2(C_2)+F_3(C_2,D_4),\ G_2(C_3)+F_3(C_3,D_4)]$$
$$= \text{Min}[10+\infty,\ 6+9,\ 7+4] = 11 \qquad A \to B_3 \to C_3 \to D_4$$

المرحلة الرابعة: حساب التكاليف من D إلى E:

$$G_4(Z_4) = \text{Min}[G_3(Z_3) + F_4(Z_3,Z_4)]$$

حساب من أجل كل بديل لـ Z_4 أي من أجل E_1, E_2

$$G_4(E_1) = \text{Min}[G_3(D_1)+F_4(D_1,E_1),\ G_3(D_2)+F_4(D_2,E_1),\ G_3(D_3)+F_4(D_3,E_1),\ G_3(D_4)+F_4(D_4,E_1)]$$
$$= \text{Min}[13+9,\ 12+3,\ 11+7,\ 11+\infty] = 15 \qquad A \to B_2 \to C_1 \to D_2 \to E_1$$
$$G_4(E_2) = \text{Min}[G_3(D_1)+F_4(D_1,E_2),\ G_3(D_2)+F_4(D_2,E_2),\ G_3(D_3)+F_4(D_3,E_2),\ G_3(D_4)+F_4(D_4,E_2)]$$
$$= \text{Min}[13+\infty,\ 12+6,\ 11+8,\ 11+5] = 16 \qquad A \to B_3 \to C_3 \to D_4 \to E_2$$

المرحلة الأخيرة: حساب التكاليف من E إلى F:

$$G_5(F) = \text{Min}[G_4(E_1)+F_5(E_1,F),\ G_4(E_2)+F_5(E_2,F)]$$
$$= \text{Min}[15+4,\ 16+3] = 19$$

ومنه فإن الطريق هو:

$$A \xrightarrow{2} B_2 \xrightarrow{8} C_1 \xrightarrow{2} D_2 \xrightarrow{3} E_1 \xrightarrow{4} F$$

أو الطريق:

$$A \xrightarrow{3} B_3 \xrightarrow{4} C_3 \xrightarrow{4} D_4 \xrightarrow{5} E_2 \xrightarrow{3} F$$

وتكلفة الطريق هي 19.

انتهت المحاضرة الثامنة عشرة

كلية

Scanned by CamScanner