المحاضرة السادسة: عملي احصاء

تمرين:

ليكن X متغيرة عشوائية لها التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$
متحولات مستقلة ولها نفس التوزيع

فإذا كانت عينة عشوائية X_1, X_2, X_3 من X وكانت

لدينا الإحصاءات:

$$\hat{\mu}_1 = X_1 + X_2 + X_3$$

$$\hat{\mu}_2 = X_1 + X_2 - X_3$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3$$

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{3}X_1 + 2X_2 - \frac{1}{3}X_3$$

1) أي المقدرات المذكورة لـ μ عن غير المتحيزة من بين الإحصاءات السابقة؟

$E(\hat{\mu}) = \mu$

الحل:

$$E(\hat{\mu}_1) = E(X_1 + X_2 + X_3)$$

عشوائية تعني استقلال.

$$= EX_1 + EX_2 + EX_3$$

$$= \mu + \mu + \mu = 3\mu$$

إذن: $\hat{\mu}_1$ مقدر غير متحيز لـ μ

$E(\hat{M}_2) = E(X_1 + X_2 + X_3)$

08.00

$= E(X_1) + EX_2 - EX_3 = M + M - M = M$

09.00

اذن : $\hat{M}_2$ هو مقدر متحيز لـ M

10.00

$E(\hat{M}_3) = E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3\right)$

11.00

$= \frac{1}{2}EX_1 + \frac{1}{3}EX_2 + \frac{1}{6}EX_3$

12.00

$= \frac{M}{2} + \frac{M}{3} + \frac{M}{6} = \frac{6}{6}M = M$

01.00

02.00

اذن M_3 هو مقدر متحيز لـ M.

03.00

$E(\hat{M}_4) = \frac{1}{3}E(X_1) + 2EX_2 - \frac{1}{3}EX_3$

04.00

$= \frac{1}{3}M + 2M - \frac{1}{3}M - 2M \neq M$

05.00

هو مقدر غير متحيز لـ M

06.00

07.00

ب) أوجد المقدر ذات التشتت الأصغري من بين المقدرات

النهيئة لـ M ، $\hat{M}$ مقدر متحيز

الحل: المقدر الأفضل هو ذو التشت الأصغر

① $E(\hat{M}) = M$

② $Var(\hat{M}) = \min$

ذات تشت اصغري M

$$Var(\hat{M}_2) = Var(X_1 + X_2 + X_3)$$

$Var(aX) = a^2 Var(X)$

$$= Var(X_1) + Var(X_2) + V(X_3)$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

$$Var(\hat{M}_3) = Var\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3\right)$$

$$= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{36}a^2$$

$$= \frac{14}{36}a^2$$

نقارن بين: $3a^2$ ، $\frac{14}{36}a^2$

ومنه: $Var(\hat{M}_2) > Var(\hat{M}_3)$

اذن $\hat{M}_3$ هو المقدر ذو التشت الأصغري.

PHONE NOTES

08.00 تمرين :

09.00 يمثل البيان الإحصائي التالي اتساع عشر سحيرات من البندورة

10.00 مقاسة بالكيلوغرام :

3.3, 3.0, 2.3, 2.6, 2.2, 3.1, 1.5, 1.6 و 1.9

11.00 ونعلم ان عينات الانتاج في مجتمع سحيرات البندورة يوصف

12.00 بتوزيع طبيعي تباينه $\sigma^2 = 0.36$

01.00 أوجد : 95 % ثم أو 98 % مجال ثقة لمتوسط

02.00 الانتاج μ .

03.00 الحل :

04.00 $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{26}{10} = 2.6$$

05.00

06.00 مجال ثقة 95 % لمتوسط μ يعطى بـ :

07.00 $$\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$$

PHONE NOTES

08.00 ومنه :

$$\left[\bar{X} - \delta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{X} + \delta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

09.00

10.00 $$= \left[2.6 - 1.96\left(\frac{0.6}{\sqrt{10}}\right) \;,\; 2.6 + 1.96\left(\frac{0.6}{\sqrt{10}}\right)\right]$$

11.00 $$= [2,23 \;,\; 2.97]$$

12.00 مجال ثقة 98% للمتوسط M يكون فيه :

01.00 $\alpha = 0.98 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} =$

02.00

03.00

04.00

05.00

06.00

07.00

08.00 المحاضرة السابعة

09.00 عملي الجمعة.

تمرين :

10.00 من بين 5000 شخص تبين أن 1400 منهم عاطلين

عن العمل ؟

11.00 أوجد 97% مجال ثقة للنسبة الحقيقية للعاطلين عن العمل

12.00 من المجتمع الذي تنتمي له العينة

01.00 الحل: حجم العينة : $n = 5000$

02.00 عدد العاطلين عن العمل $\rightarrow Y = 1400$

03.00 $\hat{p} = \frac{Y}{n} = \frac{1400}{5000} = 0.28$

04.00 $\Rightarrow \hat{q} = 1 - 0.28 = 0.72$

05.00 $\alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985$

06.00 $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.985} = 2.17$

07.00 مجال ثقة 97% لـ p هو :

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \; ; \; \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right]$$

PHONE NOTES

$$= [0.28 - 2.17\sqrt{\frac{(0.28)(0.72)}{5000}}, 0.28 + 2.17\sqrt{\frac{(0.28)(0.72)}{5000}}]$$

$$= [0.266, 0.2937]$$

ب- كم يجب ان يكون حجم العينة حتى لا يتجاوز الخطأ 0.05 وذلك في قولنا أن نسبة العاطلين عن العمل في العينة وهي للنسبة الحقيقية في المجتمع نسبة 99%

الحل:

ان حجم العينة الواجب أخذه حتى لا يتجاوز الخطأ $\epsilon = 0.05$

عندما نفترض أن: $\hat{p} = 0.28$ وثقة 99%

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\epsilon}\right)^2$$

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575$$

في جدول التوزيع الطبيعي

	0.07	0.08	$z_{0.995}$ لحساب
2.5	0.9949	0.9951	نأخذ: $\frac{2.57+2.58}{2}$

$$n \geq \left(\frac{2.575 \cdot \sqrt{(0.28)(0.72)}}{2(0.05)} \right)^2$$

$n \geq 133.67$

يجب ان يكون حجم العينة : $n \geq 134$

تمرين :

إذا علمنا أن كمية المياه التي يستهلكها الشخص تخضع للتوزيع الطبيعي وعند مراقبة صرفيات 18 شخص من المياه أن الانحراف المعياري لصرفياتهم من المياه يساوي 2.5 لتر

أوجد 90% مجال ثقة لتباين كميات المياه المستهلكة لدى الاشخاص في المجتمع .

الحل :

$(1-\alpha) = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.1$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow \chi^2_{0.05}(7) = 0.989$

PHONE NOTES

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.95}(7) = 14.1$$

ان بالثقة 95٪ لتباين متحول عشوائي طبيعي هو المجال :

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$$

$$= \left[\frac{(7)(2.5)^2}{14.1} , \frac{(7)(2.5)^2}{0.989} \right]$$

$$= [4.237 , 3.1]$$