النموذج الرياضي للعبة من المرتبة $m \times n$:

مقدمة:

إذا كانت اللعبة مستقرة فإن الحل المثالي لها هو الاستراتيجية المقابلة لنقطة سرجية وإن ثمن تلك اللعبة عندها يساويه قيمة a_{ij} المقابلة لتلك النقطة السرجية أما بصورة عامة فإن البحث عن حل مثالي للعبة ما يستدعي البحث عن قانون التوزيع الاحتمالي P_A وكذلك عن Q_B اللذين يعطيانه الحل بواسطة الاستراتيجيات المركبة ويحددان نسبة استخدام كل منها في عملية اللعب وهذا يستدعي بدوره إيجاد النموذج الرياضي للعبة .

نص المسألة:

لنفرض أن A , B هما طرفي اللعبة وأن A له الاستراتيجيات : $A_1, A_2, \ldots, A_m$

والتي يطبقها وفق قانون التوزيع الاحتمالي: $P_A : P_1, P_2, \ldots, P_m$

حيث أن : $0 \leq P_i \leq 1$ ، $\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$

وإن B له الاستراتيجيات : $B_1, B_2, \ldots, B_n$

والتي يطبقها وفق قانون التوزيع الاحتمالي : $Q_B : q_1, q_2, \ldots, q_n$

حيث أن: $0 \leq q_j \leq 1$ ، $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$

إن لهذه اللعبة مصفوفة المدفوعات $[a_{ij}]$.

سنناقش هذه المسألة من وجهة نظر الطرف A .

حيث أنه إذا قام A بتطبيق استراتيجياته المركبة وفق قانون التوزيع الاحتمالي P_A فإن متوسط الربح الذي يحققه عندما يتبنى الطرف B الاستراتيجية المنفردة B_j هو:

$$a_j = P_1 a_{1j} + P_2 a_{2j} + \cdots + P_m a_{mj}$$

بما أن A يحاول دائماً أن يجعل ربحه لا يقل عن ثمن اللعبة فإن:

$$(*)\quad \begin{cases} P_1 a_{11} + P_2 a_{21} + \cdots + P_m a_{m1} \geq V \\ P_1 a_{12} + P_2 a_{22} + \cdots + P_m a_{m2} \geq V \\ \vdots \\ P_1 a_{1n} + P_2 a_{2n} + \cdots + P_m a_{mn} \geq V \end{cases}$$

$\forall j = 1, 2, \ldots, n$

وهنا يجب الانتباه إلى أنه تم تشكيل كل سطر (كل شرط) من جداء عناصر كل عمود بقيم التوزيع الاحتمالي P_A وبذلك تكون مصفوفة الأمثال هي منقول مصفوفة المدفوعات بالإضافة إلى ذلك لدينا:

$$P_1 + P_2 + \ldots \ldots + P_m = 1$$

لأن: $\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$ «لامن الشرط».

إن الطرف A يسعى لأن يكون ثمن اللعبة أكبر ما يمكن أي:

$$Z = V \longrightarrow MaX$$

من مجموعة العلاقات (*) نقسم طرفي كل علاقة على V

وهنا نفرض أن: $\frac{P_i}{V} = x_i$

فنحصل على الشكل الجديد للعلاقات (*)

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots \ldots + a_{m1} x_m \geq 1$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots \ldots + a_{m2} x_m \geq 1$$

(**)

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots \ldots + a_{mn} x_m \geq 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{P_1}{V} + \frac{P_2}{V} + \ldots \ldots + \frac{P_m}{V}$$

$$= \frac{P_1 + P_2 + \ldots \ldots + P_m}{V} = \frac{1}{V}$$

ومنه:

$$\frac{1}{V} = x_1 + x_2 + \ldots \ldots + x_m$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{x_1 + x_2 + \ldots \ldots + x_m}$$

الطرف A يسعى لأن يكون V أكبر ما يمكن

ويتحقق ذلك إذا كان:

$$x_1 + x_2 + \ldots \ldots + x_m \longrightarrow Min$$

أصغر ما يمكن.

وعليه يصبح لدينا النموذج التالي:

أوجد القيمة الأصغرية للتابع:

$$L = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m$$

ضمن الشروط: (**) .

حيث $x_i \geqslant 0$

وبالتالي نكون قد حصلنا على نموذج رياضي خطي الحل المثالي له نفرضه:

$$x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots x_m^*$$

الذي نحصل من خلاله على:

$$V^* = \frac{1}{x_1^* + x_2^* + \ldots\ldots + x_m^*}$$

ومنه نقوم بحساب التوزيع الاحتمالي الأمثل الذي يحقق الربح الأعظمي للاعب A باستخدام العلاقة التالية:

$$p_i^* = V^* x_i^*$$

هذا النموذج هو النموذج الرياضي بالنسبة للاعب A .

للحصول على النموذج الرياضي من وجهة نظر اللاعب B نقوم بإيجاد النموذج المرافق للنموذج السابق من هذه الحالة ومن خلال هذا النموذج نحصل على العلاقة التالية:

$$q_j^* = V^* y_j^*$$

ويأتي على هذه الفقرة سؤال نظري.

مثال: أوجد الحل المثالي للعبة التي لطرفها A ثلاث استراتيجيات: A_1, A_2, A_3

ولطرفها B ثلاث استراتيجيات: B_1, B_2, B_3

ولها مصفوفة المدفوعات التالية:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

لكي تصبح جميع عناصر مصفوفة المدفوعات قيماً موجبة نقوم بالبحث عن أكبر عنصر سالب في هذه المصفوفة ونضيفه إلى جميع عناصر المصفوفة فتصبح مصفوفة المدفوعات على الشكل التالي:

B / A	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

حيث: أن أكبر سالب من المصفوفة السابقة هو 5

نقوم ببناء النموذج الرياضي من وجهة نظر الطرف A

عندئذٍ يصبح لدينا:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow Min$$

$$7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geqslant 1$$

$$2x_1 + 9x_2 + 0x_3 \geqslant 1$$

$$9x_1 + 0x_2 + 11x_3 \geqslant 1$$

حيث $x_i \geqslant 0 \; ; \; i=1,2,3$

هذا النموذج من وجهة نظر اللاعب A، في هذه الحالة يكون ثمن اللعبة هو: $V' = V+5$

ثم نقوم بإيجاد النموذج الرياضي من وجهة نظر اللاعب B

فللحصول على ثمن اللعبة الأساسي نطبق العلاقة $V = V' - 5$

مسألة التسلح والتشويش:

نفرض أن A لديه ثلاث أنواع من الأسلحة A_1, A_2, A_3

ويقوم بثلاثة أنواع من التشويش.

وإن احتمالات حسم المعركة لصالح الطرف A ولمختلف الأسلحة والتشويش معطاة بالمصفوفة التالية:

B / A	B_1	B_2	B_3
A_1	0.8	0.2	0.4
A_2	0.4	0.5	0.6
A_3	0.1	0.7	0.3

بما أن كل من A و B يرغب بحسم المعركة

بأكبر احتمال ممكن فعلى كل منهما أن يبحث عن استراتيجية مثالية تحقق له ذلك

فلإيجاد هذه الاستراتيجية نقوم ببناء النموذج الرياضي المناسب

وبحل هذا النموذج نحصل على المطلوب .
ولكن قبل البدء بالحل نضرب عناصر مصفوفة المدفوعات بالعدد ١٥
وهنا يتغير ثمن اللعبة فنحصل على :

$$V' = 15V$$

ويأخذ النموذج الرياضي بالنسبة لـ A الشكل الآتي :

$$L = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow Min$$

$$8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 1$$

بحيث : $x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

عند الحل نحصل على V' ، للحصول على V نقوم بالتقسيم على ١٥ .

• عندما يكون عناصر مصفوفة المدفوعات أرقام صعب التعامل معها يمكننا أن نضيف أو نطرح أو نضرب عناصرها بأعداد مناسبة بحيث نقوم بتبسيطها لنسهل التعامل معها .

• ولكن في هذه الحالة سيصبح هناك اختلاف بالثمن V وليكن الثمن الجديد هو V' . فللحصول على ثمن اللعبة الأساسي V نقوم بإجراء عملية معاكسة للعملية التي أجريناها على عناصر المصفوفة على الثمن الجديد V' كما في المثال السابق . $V = \frac{V'}{15}$

انتهت المحاضرة الخامسة عشرة

كعبة