مثال (1): لنفرض أنه لدينا اللعبة ذات مصفوفة المدفوعات التالية:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \underset{j}{Min}\, a_{ij}$
A_1	1	-3	-2	3	-3
A_2	0	5	4	1	0
A_3	2	3	2	3	2
$\beta_j = \underset{i}{Max}\, a_{ij}$	2	5	4	3	

أصغر قيمة من كل سطر

أكبر قيمة من كل عامود.

المطلوب: تحديد α ، β ، V (ثمن اللعبة) ..

$$\alpha = \underset{i}{Max}\, \alpha_i = \underset{i}{Max}\, \underset{j}{Min}\, a_{ij} = 2$$

$$\beta = \underset{j}{Min}\, \beta_j = \underset{j}{Min}\, \underset{i}{Max}\, a_{ij} = 2$$

نلاحظ أن $\boxed{\alpha = \beta = 2}$ وبالتالي فإن هذه اللعبة هي لعبة مستقرة .

ومنه فإن ثمن اللعبة هو: $\boxed{V = 2}$.

مثال (2): لدينا اللعبة ذات مصفوفة المدفوعات التالية:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \underset{j}{Min}\, a_{ij}$
A_1	3	2	8	4	2
A_2	5	4	5	6	4
A_3	4	6	3	5	3
$\beta_j = \underset{i}{Max}\, a_{ij}$	5	6	8	6	

المطلوب: تحديد α ، β ، V .

$$\alpha = \underset{i}{Max}\, \underset{j}{Min}\, a_{ij} = 4$$

$$\beta = \underset{j}{Min}\, \underset{i}{Max}\, a_{ij} = 5$$

نلاحظ أن $\alpha \neq \beta$ ومنه فإن هذه اللعبة غير مستقرة

وثمن اللعبة أكبر أو يساوي الحد الأدنى وأصغر أو يساوي الحد الأعلى أي:

$$\alpha \leq V \leq \beta$$

$$4 \leq V \leq 5$$

أي أن مقدار الربح V هو مقدار مجهول سنعمل على حسابه لاحقاً.

الحل المثالي للعبة :

لإيجاد الحل المثالي لأي لعبة علينا قبل كل شيء أن نميز بين الألعاب المستقرة و الألعاب غير المستقرة

أولاً: الحل المثالي للألعاب المستقرة:

هو الذي يعطينا أكبر ربح ممكن بالنسبة للطرف A .

ويتم الحصول عليه من خلال حساب الثمن الأدنى و الثمن الأقصى ثم تحديد الاستراتيجيات المستقرة لكل طرف و المقابلة للثمن المستقر للعبة .

ثانياً: الحل المثالي للألعاب غير المستقرة :

يتم الحصول على هذا الحل بدلالة مختلف الاستراتيجيات الممكنة حيث أن حل اللعبة يتضمن عدداً من الاستراتيجيات المنفردة لكل طرف من طرفيها ، ويتم تبني كل استراتيجية وفق توزيع احتمالي معين أو وفق نسب يجب حسابها .

- إن التعبير الرياضي عن الحل بواسطة الاستراتيجيات المركبة يمكن صياغتها على الشكل التالي :

إن A يجب أن يبحث عن التوزيع الاحتمالي : $P_A : P_1 , P_2 , \dots\dots , P_m$

و المقابل للاستراتيجيات : $A : A_1 , A_2 , \dots\dots , A_m$

و الذي يجعل ربحه أكبر ما يمكن ،

كذلك فإن B يبحث عن التوزيع الاحتمالي: $Q_B : q_1 , q_2 , \dots\dots , q_n$

و المقابل للاستراتيجيات : $B : B_1 , B_2 , \dots\dots , B_n$

و الذي يحقق له أكبر ربح ممكن .

مع العلم أن:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

وبذلك نكون قد حولنا مسألة البحث عن الحل المثالي للعبة إلى عملية البحث عن قانون التوزيع الاحتمالي $P_1 , P_2 , \dots\dots , P_m$ الذي يجب على الطرف A أن يعمل وفقه حتى يحقق أكبر ربح .

كما نرمز لقانون التوزيع الاحتمالي المرافق بالرمز Q_B .

نظريات مختلفة :

النظرية الأولى : لكل لعبة منتهية حل مثالي واحد على الأقل بواسطة الاستراتيجيات المركبة

النظرية الثانية: لكل لعبة منتهية ثمن V يحقق المتراجحة $\alpha \leq V \leq \beta$

النظرية الثالثة: إذا ألتزم أحد الطرفين باستراتيجيته المركبة المثالية فإن مقدار ما يربحه يبقى ثابتاً و مساوياً لثمن اللعبة V

وذلك إذا كان تصرف اللاعب الآخر لا يخرج عن استراتيجيته الفعالة.

هكذا نكون قد توصلنا إلى بناء النموذج الرياضي للعبة من المرتبة $m \times n$.

انتهت المحاضرة الرابعة عشرة.

هبة.