للنقطة الشاذة المعزولة نوعان: شاذة كاذبة وشاذة صادقة

* نقول عن نقطة شاذة معزولة z_0 للتابع f إنها نقطة كاذبة أو قابلة للإزالة إذا وجد لها جوار (قرص مركزه z_0) وتابع تحليلي وعليه بحيث يكون مقصوراً على القرص محذوف المركز z_0 مساوياً لـ f.

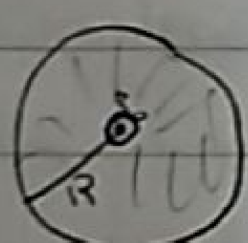
أي رياضياً:

$\exists\, g$ تابع تحليلي على $D(z_0, R)$ ؛ $\exists R>0$

بحيث يتحقق: $f(z) = g(z)$

وذلك $\forall z \in \underbrace{D(z_0, R)\setminus\{z_0\}}_{\text{حلقة}} = ann(z_0, 0, R)$

بالرسم:



* يمكن تمديد التابع f إلى تابع تحليلي في جوار لـ z_0.

ومجدداً f سيكون تحليلي عند $D(z_0, R)\setminus\{z_0\}$

مثال: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ، نلاحظ أن $z=0$ نقطة شاذة معزولة لـ f «كونها وحيدة».

ننشر $\sin z$ في $\mathbb{C}$.

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)$$

لكن تابع ليس تحليلي على كامل $\mathbb{C}$ كونه ذو نقطة معزولة.

وبالتالي نشر سابق صحيح على $\forall z \in \mathbb{C}^*$

$\mathbb{C}^*$ بلغة حلقات $\mathbb{C}^* = (0, 0, \infty)$

مركز

نصف قطر داخلي

بالأعلى

لكون منشور $\sin z$ متقارب أصلاً على $\mathbb{C}$ وعنه على $\mathbb{C}^*$ وبالتالي

يمكن إخراج z عامل مشترك

$$\Rightarrow = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= g(z) \Rightarrow f(z) = g(z), \ \forall z \in \mathbb{C}^*$$

g الممثل بالسلسلة في الطرف الأيمن تحليلي على $\mathbb{C}$.

* يمكن إثبات ذلك باستخدام دالامبير لحساب نصف قطر تقارب.

ملاحظة $g(0) = 1$

وهي تساوي: $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

مبرهنة، z_0 شاذة للتابع f

z_0 شاذة كاذبة لـ f $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

تطبيق على مثال سابق:

$$\lim_{z \to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \to 0} \sin z = 0$$

$z_0 = 0 \Leftarrow$ شاذة كاذبة

* نقول عن نقطة شاذة لتابع إنها شاذة صادقة إذا لم تكن كاذبة نتيجة من المبرهنة.

$$z_0 \text{ شاذة صادقة } \iff \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\neq 0$$

مثال: $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$

$$\lim_{z\to 0} z.f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$$

ومنه $z_0=0$ شاذة صادقة لـ f.

* للنقطة الشاذة الصادقة نوعان: القطب والشاذة الأساسية.

نقول عن نقطة الشاذة صادقة z_0 إنها قطب من المرتبة m $(m\in\mathbb{N}^*)$ إذا كانت z_0 صادقة للتابع $(z-z_0)^l.f(z)$ أياً كانت $l<m$ وكاذبة للتابع $(z-z_0)^m.f(z)$

وهذا يكافئ:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^l.f(z)\neq 0 \quad , \forall\, l\le m$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m+1} f(z) = 0$$

* إذا كانت $m=1$ نسمي z_0 قطباً بسيطاً لـ f.
أما إذا كانت $m \geq 2$ نسمي z_0 قطباً مضاعفاً من الرتبة m

اصطلاح: البعض يعتبر النقطة الشاذة الاعتيادية قطباً من رتبة صفر.

مثال: $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$
أولاً: هل هي شاذة كلية أو صادقة.

$$\lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z^2}$$

كونها بسط ومقام تحليليان على $\mathbb{C}$ ومنه نطبق

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2z} = \infty \neq 0$$ أو بالعكس

$\Leftarrow$ $z=0$ نقطة شاذة صادقة
هنا هل النقطة هي قطب ولا لا؟ وإذا نعم فما هي رتبتها؟

$$\lim_{z\to 0} z^{(3)} \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \sin z = 0$$

$\Leftarrow$ $z=0$ قطب لـ $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$

$$\lim z^{\overset{m}{(2)}} \frac{\sin z}{z^3} = \lim \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$$

$z=0$ قطب من رتبة ثانية لـ f.

* نقول عن نقطة شاذة صادفة z_0 إنها شاذة أساسية لـ f إذا كانت صادفة للتوابع $(z-z_0)^l f(z)$ وذلك أيا كان l وهذا يكافئ.

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^l \cdot f(z) \neq 0 \quad \forall l$$

مثال: $z=0$ شاذة أساسية للتابع $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

أصفار التابع العقدي، نقول عن نقطة z_0 إنها صفر للتابع f إذا $f(z_0)=0$.

- نقول عن صفر z_0 للتابع f إنه من المرتبة $m\geq 1$ إذا:

$$f(z)=(z-z_0)^m \cdot g(z) \quad , \quad g(z_0)\neq 0$$

مبرهنة: ليكن f تابعاً تحليلياً عند z_0 وليكن z_0 صفراً لـ f يكون z_0 صفراً لـ f من المرتبة m إذا:

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=0$$

$$\wedge \; f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

«مرتبة أول مشتق الذي لا ينعدم عند z_0 هو مرتبة z_0»

تمرين : عين أصفار التابع $f(z)=z.\sin z$ وبين مرتبة كل منها. أصفار f هي حلول المعادلة.

$$f(z)=0$$

$$z.\sin z=0 \Rightarrow z=0$$ إما

أو $\sin z=0 \Rightarrow z=\pi k$

ومنه مجموعة أصفار f هي،

$$\{\pi k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pi k\ ,\ k\in\mathbb{Z}^*\}$$

معرفة رتب الأصفار:

$$f'(z)=\sin z+z.\cos z$$

$$f'(\pi k)=\sin \pi k+\pi k.\cos \pi k$$

إذا كانت $k\in\mathbb{Z}^*$ فإنه

$$f'(\pi k)=0+\pi k(-1)^k\neq 0$$

جميع الأصفار πk حيث $k\in\mathbb{Z}^*$ هي أصفار بسيطة لـ f (من المرتبة الأولى)

$$f'(0)=0$$

$$f''(0)=\cos z+\cos z-z.\sin z$$

$$f''(0)=2\neq 0$$

ومنه $z=0$ هو صفر مضاعف لـ f من المرتبة الثانية

* نصطلح أن صفر من المرتبة صفر لتابع هو عبارة عن نقطة لا تعدم التابع.

تنشيط. ملاحظة: إذا كانت z_0 صفراً من المرتبة r لـ f وصفراً من المرتبة k لـ g فإنه صفر من المرتبة $r+k$ لـ $f.g$ ومنها صفر من المرتبة $r.k$ للتابع $(f(g))^{?}$

مثال سابق $f(z)=z\sin z$

$f(z)=z \Rightarrow z=0$

صفراً لـ f من مرتبة الأولى.

فإنها أيضاً صفراً لـ $\sin z$ من مرتبة أولى وبالتالي z_0 صفر لـ $z\sin z$ من المرتبة $1+1=2$ الثانية.

مثال: $(z-i)^{10}$; $z=i$ هي صفراً من المرتبة الأولى لـ z لكنها صفراً من المرتبة $10=1\times10$ لتابع $(z-i)^{10}$

لو كان $z(z-i)$ فإن $z=0$ هي صفراً من مرتبة أولى لـ z ومن مرتبة صفر لـ $(z-i)$

خاصة: إن أصفار تابع تحليلي غير صفري هي نقاط (أصفار معزولة) معلومة. إذا كان لدينا تابع تحليلي على منطقة G ولديه عدد نقاط تراكم صفري فهو تابع صفري أي ينعدم على نقاط G بالكامل. (مجموعة تحليلية).

أثبت أن $\cos^2 z+\sin^2 z=1$ على $\mathbb{C}$

نثبت أنه تابع صفري على $\mathbb{C}$

$f(z)=\cos^2 z+\sin^2 z-1$

هو تابع تحليلي على $\mathbb{C}$

كما أن: $f(x)=\cos^2 x+\sin^2 x-1$

لأن $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

أي (المحور حقيقي $g \in V$).

ومنه حسب (مبرهنة)

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad , f(z) = 0$$

ومنه فإن $\forall z \in \mathbb{C} \ . \ \cos^2 z + \sin^2 z = 1$

تصنيف النقاط الشاذة لحاصل قسمة تابعين تحليليين:

ليكن g و h تابعين تحليليين على منطقة G إن النقاط الشاذة

للتابع $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ في G هي أصفار المقام (أي أصفار $h(z)$)

ولتكن z_0 صفراً للمقام من المرتبة k وصفر للبسط من المرتبة r.

صفر حسب مضاعفها

فإن 1) إذا كان $k \leq r$ فإن z_0 شاذة كاذبة لـ f

2) " كانت $k > r$ " z_0 قطب من المرتبة

$$m = k - r$$

* عندما يكون بسط ومقام تحليليين فلا يوجد غير نوعان من

نقاط شاذة كاذبة أو قطب "

مثال: عين النقاط الشاذة للتابع:

$$f(z) = \frac{z - i}{z^3(z^2+1)\cdot\sin^4 z}$$

وبين نوع كل منها.

البسط تحليلي على $\mathbb{C}$ والمقام جداء توابع تحليلية على $\mathbb{C}$.
وبالتالي حاصل قسمة البسط على المقام هو تابع تحليلي على $\mathbb{C}$
وبالتالي نقاط شاذة هي أصفار المقام أي حلول المعادلة

$$z^3(z^2+1)\sin^4 z=0$$

$$z=0\,,\quad z=i\,,\quad z=-i$$

$$z_k=\pi k\,,\quad k\in\mathbb{Z}^*$$

$z=i$ هو صفر من المرتبة الأولى لمقام لأنها صفر لـ (z^2+1)
حيث $(z-i)(z+i)$ هي صفر من مرتبة أولى لـ $(z-i)$ ومن مرتبة صفر لـ $(z+i)$ وبالتالي هي صفر من مرتبة $1+0$ لـ (z^2+1)

وبالتالي هي نقطة شاذة كاذبة لـ f.
وأيضاً $z=-i$ هي صفر من المرتبة الأولى لمقام ولا تعدم بسط وبالتالي هي صفر من رتبة صفر لبسط
رتبة بسط أصغر من مرتبة مقام وبالتالي $z_0=-i$ هي قطب من المرتبة $m=1-0=1$.

$z_k=\pi k$ هي صفر من رتبة الرابعة لـ $\sin^4 z$ لأنها صفر من مرتبة أولى لـ $\sin z$.
وهي لا تعدم بسط وبالتالي النقاط z_k هي أقطاب مضاعفة من مرتبة $m=4-0=4$

$z=0$ هي صفراً من رتبة سابعة لمقام f ومن مرتبة
3 لـ z^3 وصفراً من رتبة 4 لـ $\sin^4 z$ و $z=0$ لا يعدم
البسط وبالتالي $z=0$ هو قطب من مرتبة سابعة لـ f

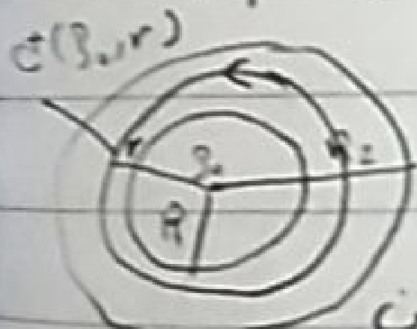
م 22 2016/5/19

مبرهنة لوران: إذا كان f تحليلياً على حلقة $ann(z_0, R_1, R_2)$
فإن f قابل للنشر وفق لوران في الحلقة A أي أن

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

وذلك $\forall z \in A$

حيث $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ و $R_1 < r < R_2$



$$ann(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} ; R_1 < |z-z_0| < R_2\}$$

يرمز عادة لمجموع المتسلسلتين السابقتين
بالرمز $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_n)^n$

ملاحظات:

1) إن نشر لوران لتابع في حلقة وحيد.

2) إذا كان f تابعاً تحليلياً على حلقة وعلى القرص الداخلي للحلقة
المغلق عندها سيكون تحليلي على قرص خارجي الحلقة.
فإن نشر لوران لذلك تابع في الحلقة هو نشر تايلور ذاته
في القرص.

مثال: $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ تحليلي على الحلقة $A=ann(0,0,\infty)$ $\mathbb{C}^*$

لا يمكن نشره وفق تايلور في جوار صفر لأنه تابع غير تحليلي عند 0

لكن يمكن نشره وفق لوران في الحلقة $A=ann(0,0,\infty)$.

$$f(z)=\frac{1}{z}\sin z$$

z^{-1} منشور في الحلقة

تحليلي على كامل $\mathbb{C}$

حسب خاصة (2) فإن منشور تايلور ⇐ منشور لوران

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)$$

$$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots \quad \forall z\in\mathbb{C}^*$$

وهو منشور f وفق لوران في A.

ملاحظة:

النشر وفق لوران في حلقة من الشكل $ann(z_0,0,R)$ فأسمي النشر لتابع وفق لوران في جوار z_0

ملحوظة: إذا طلب نشر تابع في جوار z_0 ننظر لـ z_0 إذا كانت z_0 ليست شاذة فالنشر مطلوب تايلور

وإذا z_0 شاذة فالنشر سيكون لوران في الحلقة A وإذا كان نصف قطر حلقة داخلي 0 عندها نقول أن النشر هو نشر f وفق لوران في جوار صفر

مثال: ننشر التابع $f(z) = \frac{1}{1+z}$ في الحلقة $|z|>1$

أي $(ann(0, 1, \infty))$

إن نشر $\frac{1}{1+z} = \sum (-1)^n z^n$

صحيح فقط في $|z|<1$

ولكن هنا $|z|>1$ أي نشر سابق غير صحيح وبالتالي

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}}$$

$$1<|z| \Leftarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} \text{ ——— } \forall z \in ann(0,1,\infty)$$

* نسمي النشر لتابع f في مثال سابق بنشر f في جوار ∞ (خارج أي قرص مركزه 0)

إذا كان نصف قطر خارجي ∞ عندها يكون نشر تابع وفق لوران النشر في جوار ∞

تصنيف النقاط الشاذة باستخدام لوران في جوارها؟

لتكن z_0 شاذة معزولة لـ f عندئذ يوجد $R>0$ بحيث يكون f تحليلي على $ann(z_0, 0, R)$ حسب مبرهنة لوران يمكن نشر f وفق لوران في جوار z_0 أي في حلقة $(ann(z_0, 0, R))$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \text{———} + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \text{———}$$

الجزء رئيسي لنشر لوران لـ f في جوار z_0

$$+ \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + \text{———} + a_n(z-z_0)^n + \text{———}}_{\text{جزء تحليلي (الصحيح) لنشر لوران لـ } f \text{ من جوار } z_0}$$

نلاحظ في مثال (١) لا يوجد جزء رئيسي لكن يوجد جزء تحليلي صحيح
وهو: $1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$

يسمى a_{-1} براسب التابع f عند z_0 ويرمز له بـ $Res(f, z_0)$
$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(z_0, r)} f(z).dz \quad , \forall r < R$$

١) إذا كان الجزء الرئيسي لنشر لوران للتابع f في جوار نقطة شاذة z_0 له غير موجود عندها تكون z_0 نقطة شاذة كاذبة لـ f و إن الراسب عندها معدوم.
وذلك حسب (مثال ١)

٢) إذا كان $\overset{\text{الجزء الرئيسي}}{\text{النشر}}$ لوران لتابع f في جوار نقطة شاذة z_0 له مكون من عدد منتهٍ من الحدود فإن z_0 قطب للتابع f مرتبته القيمة المطلقة لأصغر أس موجود في نشر

مثال: انشر هذا التابع وفق لوران في جوار $z=0$ ثم بيّن نوع نقطة $z=0$ واحسب راسب عندها؟ $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^5} = \frac{z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots}{z^5}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!\,z^3}}_{\text{الجزء الرئيسي للنشر}} + \underbrace{\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \cdots}_{\text{الجزء التحليلي للنشر}}$$

كون الجزء الرئيسي مكون من عدد منته من الحدود

وبالتالي $z=0$ هي قطب من المرتبة 4.

$$Res\left(\frac{\sin z}{z^5},0\right)=0$$

مثال آخر: $g(z)=\frac{\sin z}{z^6}$

$$=\frac{1}{z^5}+\text{---}+\frac{1}{5!\,z}-\text{---}$$

$$\Rightarrow Res\left(\frac{\sin z}{z^6},0\right)=\frac{1}{5!}.$$

* كل نقطة شاذة كاذبة يكون راسب عندها معدوم

لكن العكس غير صحيح حسب مثال (*).

$z=0$ قطب من مرتبة رابعة وراسب عندها معدوم

3) إذا كان الجزء الرئيسي لنشر لوران لتابع f بجوار نقطة شاذة z_0 له مكون من عدد غير منته من حدود فإن z_0 نقطة شاذة أساسية لتابع.

تمرين: عين النقاط الشاذة لتابع $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ ثم بين نوع كل منها.

$e^{\frac{1}{z}}$

إن النقطة الشاذة الوحيدة هي $z=0$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\text{---}\quad\forall z\in\mathbb{C}^*$$

نلاحظ أن الجزء الرئيسي لنشر لوران لتابع f بجوار $z=0$ مكون من

عدد غير منته من الحدود عندها $z_0 = 0$ هي نقطة
شاذة أساسية لـ

$$Res(f, z_0) = 1$$

لو ضربنا $e^{\frac{1}{z}}$ بـ z^5 عندها $g(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$ يصبح
راسب $Res(g, z_0) = \frac{1}{6!}$
وتبقى z_0 هي نقطة شاذة أساسية.

احسب تكامل $\int_{C^+(0,2)} e^{\frac{1}{z}} z^5 . dz$

لدينا من تعريف راسب لتابع f عند نقطة z_0:

$$\frac{1}{6!} = Res(z^5 e^{\frac{1}{z}}, 0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+(0,r)} z^5 e^{\frac{1}{z}} . dz$$

حيث $0 < r < R$

وبالتالي مهما كانت دائرة مغلقة صحيحة

$$\Rightarrow \int_{C^+(0,2)} z^5 e^{\frac{1}{z}} . dz = \frac{2\pi i}{720} = \frac{\pi i}{360}$$

نقطة شاذة كاذبة الراسب معدوم

" " أساسية لابد من نشر لمعرفة راسب.

" " القطب هناك دستور يساعدنا لمعرفة راسب.

الراسب لتابع عند قطب له:

- إذا كان z_0 قطباً بسيطاً للتابع f فإن:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \neq 0$$

- إذا كان z_0 قطباً مضاعفاً من المرتبة m فإن:

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

عندما $m = 1$ نعود لدستور سابق.

مثال: