14/4/2016 الخميس

المحاضرة الثامنة

تطبيقات د.ت.م / المنحني القابل للتجميع / للتقويم /

- تعريف د.ت.م
- خواص د.ت.م
- معايير د.ت.م
- تطبيقات د.ت.م

المنحني القابل للتجميع

$$f \text{ د.ت.م} \Longleftarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P) < \infty$$

$[a,b]$ تجزئة ما $P = \{ x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b \}$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

خواص د.ت.م:

① f د.ت.م $[a,b]$ $\Longrightarrow$ f محدودة على $[a,b]$

العكس $\not\Longrightarrow$

② f د.ت.م $[a,b]$ $\Longleftarrow$ $|f|$ د.ت.م $[a,b]$

$\not\Longrightarrow$ العكس ليس بالضرورة

③ f د.ت.م $[a,b]$ $\frac{1}{f}$ د.ت.م على $[a,b]$

$$|f(x)| \geq c > 0 , \forall x \in [a,b]$$

f د.ت.م $[a,b]$ $\Longleftarrow$ αf د.ت.م على $[a,b]$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

④ $\begin{cases} f \text{ د.ت.م على } [a,b] \\ g \text{ د.ت.م على } [a,b] \end{cases}$ $\Longleftarrow$

أ- $(f+g)$ د.ت.م على $[a,b]$

ب- $(f-g)$ د.ت.م

ج- $f.g$ د.ت.م

د- $\frac{f}{g}$ د.ت.م

$$|g(x)| \geq c > 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

⑤ f د.ت.م على $[a,b]$

$a < c < b$ فإن f د.ت.م على $[a,c]$ و $[c,b]$

وبالعكس:

وتتحقق العلاقة:

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$$

معايير د.ت.م

المعيار الأول:

f دالة مطردة $[a,b]$ $\Longleftarrow$ f د.ت.م $[a,b]$

$$\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|$$

المعيار الثاني: f دالة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$

$$\exists M > 0 \quad |f'(x)| \leq M , \forall x \in [a,b]$$

$\Longrightarrow$ f د.ت.م على $[a,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

المعيار الثالث:

f د.ت.م على $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ $f = f_1 - f_2$ حيث

f_1 دالة متزايدة على $[a,b]$

f_2 " " " "

المعيار الرابع:

f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإن

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \lim_{\Delta p \to 0} V(f, P)$$

المنحني القابل للتجميع:

إذا كانت لدينا المنحني L المعرف وسيطياً بالشكل:

$$x = \varphi(t) = x(t) \qquad ; t \in [\alpha, \beta]$$
$$y = \psi(t) = y(t)$$

وبحيث لا يحتوي على نقاط مضاعفة (باستثناء بداية المنحني ونهايته)

$$x = \cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$y = \sin t$$

$$x = t - \sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$y = 1 - \cos t$$

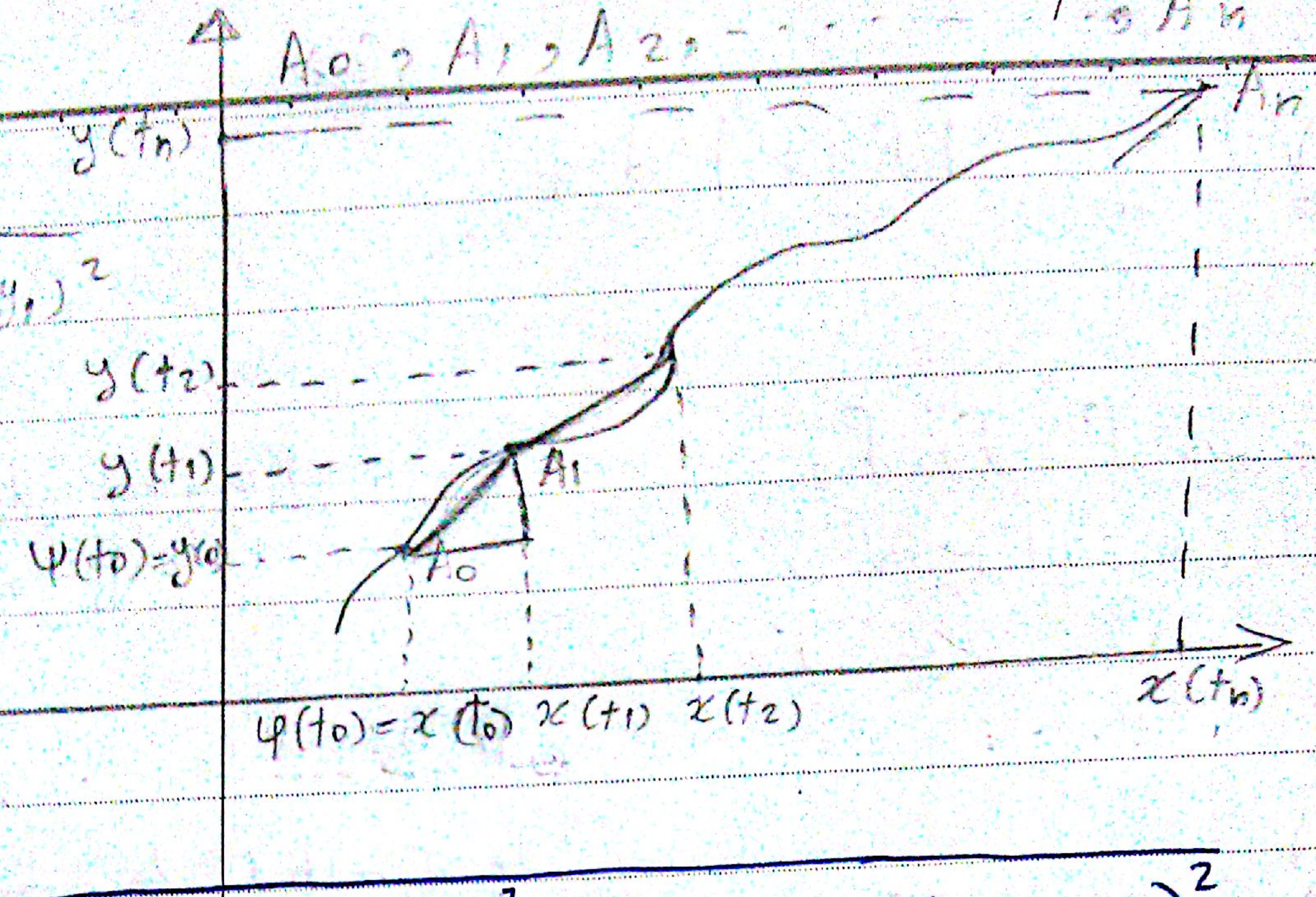
-- إذا كانت مغلقة)

لنأخذ تجزئة ما لـ $[\alpha, \beta]$ بالشكل:

$$P = \{t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta\}$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$

$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



$$l(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2}$$

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\right]^2 + \left[\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\right]^2}$$

لتكن مجموعة التجزئات لـ $[\alpha, \beta]$

هي $P \in \mathbb{P}[\alpha, \beta]$

$$l = \sup_{P \in \mathbb{P}(\alpha, \beta)} l(P) < \infty \Rightarrow$$ المنحني K قابل للتمييع

مبرهنة جوردان:

الشرط اللازم والكافي ليكون المنحني K قابلاً للتمييع هو أن يكون كل من الدالتين $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ د.ت.م على $[\alpha, \beta]$

أي:

$x(t)$ $y(t)$

$\varphi(t)$ و $\psi(t)$ د.ت.م على $[\alpha, \beta]$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{المنحني K قابل للتمييع} \\ l = \sup\limits_{P \in \mathbb{P}[\alpha, \beta]} l(P) < \infty \end{cases}$

$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}$ فكرة البرهان

$|b| = \sqrt{b^2} \leq$

البرهان :

$\Leftarrow$

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leq \sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\text{و} \quad |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \leq \sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{- - - - - - - -} = l(p)$$

$$\text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{- - - - - - - -} = l(p)$$

$$\Rightarrow \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leq \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{- - - - -} = l < \infty$$

$$\text{و} \quad \sup \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \leq \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{- - - - -} = l < \infty$$

وبما أنه لدينا من الفرض $l = \sup l(P) < \infty$

ومن العلاقة السابقة نستنتج أن :

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \infty$$

$$\text{و} \quad \sup \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \leq \infty$$

صياغة بقية البرهان علينا

وفي كلام كتير لسا

أنو ال sup محدود $\Leftarrow$ المجموع محدود $\Leftarrow$ الفروق محدودة

$\Leftarrow$ الدوال محدودة $\Leftarrow$

ويمكن بدنا نذكر شغلة $\psi(t)$ و $\varphi(t)$

عن الحال المغلق ذات ت.م على $[\alpha, \beta]$

$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$ فكرة البرهان

$(\Longrightarrow)$

$\varphi(t)$ و $\psi(t)$ د. ت. م على $[\alpha, \beta]$

$\Longrightarrow l = \sup l(P) < \infty$

$$\sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{} \leq \sum | | + \sum | |$$

$$l = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(P) \leq \bigvee_a^b \varphi + \bigvee_a^b \psi < \infty$$

$\Longrightarrow$ المنحني قابل للتجميع

مثال:

هل الدالة $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ د. ت. م على $[2, +\infty[$

وما هو تغيرها الكلي.

$f'(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x+1)^4} < 0$ الدالة متناقصة على $[2, \infty[$

على أي مجال جزئي منه

$\Longleftarrow f$ د. ت. م على $[2, A]$

حيث $\boxed{A \to \infty}$

$$\bigvee_2^\infty f = \lim_{A\to\infty} \bigvee_2^A f = \lim_{A\to\infty} |f(A) - f(2)| = \lim_{A\to\infty} \left| \frac{1}{(A+1)^2} - \frac{1}{9} \right|$$

$$= \frac{1}{9} < \infty$$

تمرين : $f \longrightarrow [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

2- 〃 〃 〃 〃 〃 〃 من اليمين عند 0

3- 〃 〃 〃 〃 〃 〃 من اليسار عند 1

4- هل f د.ث.م ؟ ولماذا ؟

الاستمرار : $x_0 \in]0,1[\Rightarrow \lim\limits_{x \gtrless x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \gtrless x_0} x^2 \sin\frac{\pi}{x} = x_0^2 \sin\frac{\pi}{x_0} = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \gtrless x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

$$f'(x) = 2x\sin\frac{\pi}{x} + x^2\cos\frac{\pi}{x}\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)$$

$$= 2x\sin\frac{\pi}{x} - \pi\cos\frac{\pi}{x}$$

$$f'(x_0) = 2x_0\sin\frac{\pi}{x_0} - \pi\cos\frac{\pi}{x_0}$$

$$\lim_{x \gtrless 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{\pi}{x}$$

$$= 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 \sin\frac{\pi}{x}$$

$$= 0 = f(1)$$

$$f'(0+0) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin\frac{\pi}{x}}{\cancel{x}} = 0$$

$$f'(1-0) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{x^2 \sin\frac{\pi}{x} - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \left[2x \sin\frac{\pi}{x} - \pi \cos\frac{\pi}{x} \right]$$

$$= \pi \qquad\qquad |a \mp b| \leq |a| + |b|$$

$$|f'(x)| \leq \left|2x \sin\frac{\pi}{x}\right| + \left|\pi \cos\frac{\pi}{x}\right| \leq 2 + \pi$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

$\Longrightarrow$ f د.ت.م على

$[0, 1]$

تمرين :

$$f : [0, \tfrac{1}{2}]$$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

① f مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$

② وضح أن f دالة متزايدة على $[0, \frac{1}{2}]$

③ هل f د.ت.م ؟ ولماذا ؟ ثم أوجد $V_0^{\frac{1}{2}} f$

④ بين أن f دالة لا تحقق شرط ليبشتز

$$\forall x_0 \in]0, \tfrac{1}{2}[$$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} x_0} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln x_0} = f(x_0)$$

$\boxed{x_0 = 0}$: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} -\frac{1}{\ln x} = 0 = f(0)$$

$\boxed{x_0 = \frac{1}{2}}$:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = f(\tfrac{1}{2})$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = f(\tfrac{1}{2})$$

$$f'(x) = -\left[\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right]$$

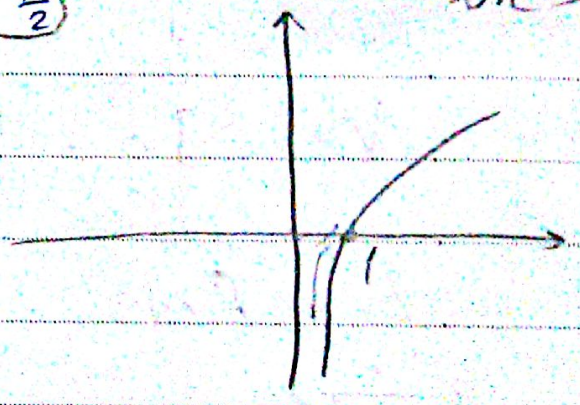
$$= \frac{1}{x(\ln x)^2} \geq 0$$

والدالة متزايدة.

x	0	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$-\frac{1}{\ln \frac{1}{2}}$

سالب

الـ $\ln$



$$\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f = \left| f(\tfrac{1}{2}) - f(0) \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} - 0 \right|$$

$$= \left| \frac{-1}{-\ln 2} \right| = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2$$
$$= -\ln 2$$

$$\forall\, u, v \in [a, b] \;, \exists\, L > 0$$
$$\frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \leq L$$

$$\exists\, u, v \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

$$u = 0 \;, v \xrightarrow{>} 0$$

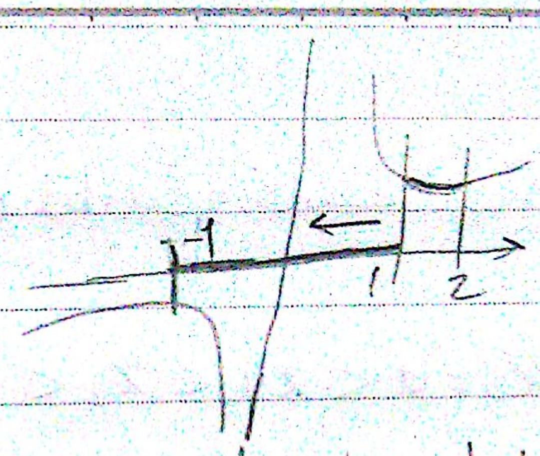
$$\lim_{v \xrightarrow{>} 0} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} = \lim_{v \xrightarrow{>} 0} \left| \frac{\frac{1}{\ln v}}{v} \right|$$

$$l = \lim_{v \xrightarrow{>} 0} \left| \frac{\frac{1}{v}}{\ln v} \right| \; : \; \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to 0^{+}} \left| \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \right|$$

$$= \lim_{x \to 0^{+}} \frac{1}{x} = +\infty$$

انتهى



ما في استمرار منتظم