المحاضرة السادسة .   الدكتورة : برلنت سلطان

يمكن تخفيض درجة حدودية باستخدام حدودية تشيبيشيف الواحدية.

أي يمكن $P_4 \xrightarrow{\text{تخفيض}} P_3$ باستخدام حدودية تشيبيشيف الواحدية

وسيكون الخطأ المرتكب بالنسبة لـ P_3 هو أصغر ما يمكن و ذلك باستخدام العلاقة التالية :

* هذه حدودية من الدرجة n واحدية المعامل $\Longrightarrow \dfrac{P_n - P_{n-1}}{a_n}$

$$\frac{P_n - P_{n-1}}{a_n} = \tilde{T}_n \quad \xrightarrow{\text{نستنتج}} \quad P_{n-1} = P_n - a_n \tilde{T}_n$$

أكبر خطأ من أجل حالة

$$\max |P_n - P_{n-1}| = \frac{a_n}{2^{n-1}}$$

$$\underset{P_{n-1}\ \text{الكلي لـ}}{E} = \underset{P_n\ \text{خطأ}}{E_1} + E_2 \rightarrow \frac{a_n}{2^{n-1}}$$

• الفائدة من تخفيض الحدودية من درجة خامسة إلى درجة رابعة هي : أن التكلفة تكون أقل .

مثال (3) : هو Z2 ...

$$\underbrace{f(x) = e^x}_{T} \qquad P_n = 1 + \underbrace{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}}_{Q}$$

في حال طلب منا التالي نحل كما يلي :

1. $E\,exact\,(0,5) = |T(0,5) - Q(0,5)| =$ نعوض و نحسب

2. $R\,exact\,(0,5) = \dfrac{|T(0,5) - Q(0,5)|}{T(0,5)} = \text{- - -}$ نعوض و نحسب

3. $\underset{\text{تايلور}}{E_{max}} = \dfrac{P_5\, f^{(5)}}{5!} = 0.023\ ; \quad P_5 = x^5\Big]_{0,5} = (0,5)^5$

هذه حدودية تكتب بشكل حدودية Q

ولدينا أيضاً: $f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x \longrightarrow \dots \longrightarrow f^{(5)}(x)=e^x$

نعوض بأعظم قيمة لها في المجال $[-1,1]$ نعلم أن e^x دالة تزايدية.

إذاً: أعظم قيمة لها هي أكبر قيمة في المجال. وبالتالي:

$$\max|f^5| = e^1$$

وبالتعويض في * نجد أن $E_{max} = 0.023$

[illegible]

$\boxed{2}$ أوجد حدودية P_3 درجة ثالثة باستخدام اختصار تشيبيشيف ومناسبه؟.

$$P_3 = P_4 - \underline{a_4}\, \tilde{T}_4$$

أمثال حدودية a.

نلاحظ أن $a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

$$\tilde{T}_4 = x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \Longrightarrow P_3(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$P_3(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cancel{\frac{x^4}{4!}}\right) - \frac{1}{24}\left(\cancel{x^4} - x^2 + \frac{1}{8}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{24}\right)$$

السؤال: أوجد حدودية P_3 باستخدام ماكلورين ثم أوجد الخطأ المرتكب ثم أوجد حدودية P_3 باستخدام اختصار باستخدام اختصار تشيبيشيف احسب الخطأ المرتكب وقارن بين الخطأين وماذا تستنتج!
ممكن أن يأتي هكذا سؤال في الامتحان .. ع. التكملة في ص3.

[illegible]

الفصل الثاني. الحل العددي لجمل المعادلات الخطية.

حل جملة معادلات خطية.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_2$$

نحلها بأسلوبين: طرائق مباشرة، طرائق تكرارية

طرائق مباشرة:

- طريقة LU: دوليتل، شولسكي، كراوت.
- طريقة غاوس: غاوس جوردان، طريقة الارتكاز الجزئي (تحسين لطريقة غاوس).

طرائق تكرارية: (حل تقريبي)

* الأكثر استخداماً.

يكون لدينا نقطة بدء وبدءاً نطبق الطرائق التكرارية: جاكوبي، غاوس سيدل، SOR

حل فعلي (يدوي)

نكتب الجملة بالشكل المصفوفي.

$$AX = B$$

خطية

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

مصفوفة الثوابت

* كيف يمكن معرفة جودة الحل التقريبي علماً أن الحل الفعلي غير موجود؟ من أجل ذلك سنتطرق إلى عدة مقاربات لتقييم الخطأ.

ص ٩٦

$$(p_n(x) - p_{n-1}(x))/a_n = \tilde{T}_n(x) \tag{79}$$

هذا يعني أننا يجب أن نختار :

$$p_{n-1}(x) = p_n(x) - a_n \tilde{T}_n(x) \tag{80}$$

وبهذا الاختيار يصبح لدينا:

$$\max_{-1 \le x \le 1} |p_n(x) - p_{n-1}(x)| = |a_n| \max_{-1 \le x \le 1} \left| \frac{(p_n(x) - p_{n-1}(x))}{a_n} \right|$$

$$\max_{-1 \le x \le 1} |p_n(x) - p_{n-1}(x)| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}} \tag{81}$$

مثال(13):

ليكن لدينا التابع: $f(x) = e^x$ و المقرب على المجال [1 , 1-] بواسطة حدودية ماك لوران من الدرجة الرابعة:

باستخدام

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

وخطأ الاقتطاع هو:

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi(x))| |x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

أي:

$$|R_4(x)| = \frac{|f^{(5)}(\xi(x))| |x^5|}{5!} = \frac{|e^{\xi(x)}| |x^5|}{120} \le \frac{e}{120} \approx 0.023$$

حيث $-1 \le x \le 1$.

الحدودية من الدرجة الثالثة تعطى بالعلاقة:

$$p_3(x) = p_4(x) - a_4 \tilde{T}_4(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

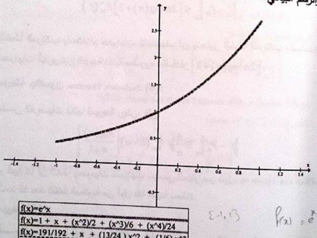
وبهذا يكون:

$$|p_4(x) - p_3(x)| \le \frac{\frac{1}{24}}{2^3} = \frac{1}{192} \le 0.0053$$

والخطأ المرتكب يكون حاصل جمع هذا الأخير مع خطأ الاقتطاع:

$$E = 0.0053 + 0.023 = 0.0283$$

والرسم البياني:



[-1, 1] $f(x) = e^x$

الشكل 19

٢- تمهيد رياضي:

تمارين ٥ و ٦ واجبات على ١٥ للتعاريف
تمارين عليهن وليس نظري

تعريف(1):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **شاذة** إذا كان $\det(A) = 0$ وإنّها غير شاذة إذا كان $\det(A) \neq 0$.

تعريف(2):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **متناظرة** إذا كان $A = A^T$ حيث A^T منقول المصفوفة A.

تعريف(3):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **واحديه** إذا كان

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & ;i \neq j \\ 1 & ;i = j \end{cases} \tag{4}$$

ويرمز لها عادةً بالرمز I_n.

تعريف(4):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **قطرية** إذا كان

$$a_{ij} = 0 \qquad ;i \neq j \tag{5}$$

تعريف(5):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **مثلثية عليا** إذا كان

$$\boxed{a_{ij} = 0} \qquad ;i > j \tag{6}$$

تحت القطر الرئيسي

ويُرمز لها عادةً بالرمز U.

مثال(1):

$$U=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

تعريف(6):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ **إنها مثلثيه سفلى** إذا كان

$$a_{ij} = 0 \qquad ; i \le j \qquad (8)$$

ويرمز لها بالرمز L .

مثال(2):

$$L=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

تعريف(7):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ **إنها مسيطرة قطرياً** Diagonally Dominant إذا كان

مهم (لاتنسى القيمة المطلقة)

$$|a_{ij}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}| \qquad ; i = 1, \dots, n \qquad (10)$$

تعريف(8):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ **إنها مسيطرة قطرياً تماماً** Strictly Diagonally Dominant إذا كان

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}| \qquad ; i = 1, \dots, n \qquad (11)$$

مثال(3):

لتكن لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{pmatrix}7&2&0\\3&5&-1\\0&5&-6\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{pmatrix}6&4&-3\\4&-2&0\\-3&0&1\end{pmatrix} \qquad (12)$$

أي من هاتين المصفوفتين مسيطرة قطرياً؟ 6 4 7 ليست مسيطرة

الحل:

إنّ المصفوفة A تحقق أنّ:

$$\begin{aligned}&|7|>|2|+|0|\\&|5|>|3|+|-1|\\&|-6|>|0|+|5|\end{aligned} \qquad (13)$$

ومنه A مسيطرة قطرياً تماماً.

أمّا بالنسبة للمصفوفة B لأنّ $|6| \ngtr |4|+|-3|$

إذن B ليست مسيطرة قطرياً تماماً.

تعريف(9):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **معرفة إيجابياً**(Positive definite)

إذا كانت:

1) تناظرية

2) إذا كان $x^T A x > 0$ وذلك من أجل كل n وكل شعاع $x \neq 0$.

مثال(4):

أثبت أنّ المصفوفة التالية معرفة إيجابياً

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix} \qquad (14)$$

الحل:

1) من الواضح أنّ $A = A^T$.

2) بفرض أنّ $0 \neq x \in M_{3\times 1}(R)$

$$x^T A x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$$

ما لم يكن $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

مبرهنة(1):

بفرض $A \in M_n(R)$ مصفوفة معرفة إيجابياً عندئذٍ

1) A قابلة للقلب.

2) جميع عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً.

مبرهنة(2):

إنّ حل الجملة $AX = b$ موجود ووحيد إذا كانت مصفوفة الأمثال غير شاذة أي $\det(A) \neq 0$.

تعريف(10):

بفرض $A \in M_n(R)$ ، نسمي مجموعة قيم λ التي تحقق المعادلة:

$$Ax = \lambda x \quad ; x \neq 0$$

بالقيم الذاتية Eigenvalues الموافقة للمصفوفة A أو طيف المصفوفة A Matrix Spectrum ، ونسمي الشعاع x بالشعاع الذاتي Eigenvector الموافق للقيمة

الذاتية λ.

ملاحظة:

يوجد للمعادلة $x \neq 0$; $Ax = \lambda x$ حل غير صفري إذا كان

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

تُسمى المساواة الأخيرة **بالمعادلة المميزة للمصفوفة A أو كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A** ويرمز لها بـ $P_n(\lambda)$ حيثُ n بعد المصفوفة A.

تعريف(11):

بفرض $A \in M_n(R)$، نسمي العدد

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \quad Ax = \lambda x \; ; x \neq 0\}$$

بنصف القطر الطيفي spectral radius للمصفوفة A.

ملاحظة

$\lambda = a + ib$

$|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال(5):

أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ثم عين القيم الذاتية والأشعة الذاتية ونصف القطر الطيفي للمصفوفة A.

الحل:

$$P_2(x) = \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

وعليه فإنّ $\{2,3\}$ هي مجموعة القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A.

لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة لـ A نعوض في العلاقة

$$Ax = \lambda x$$

أي:

$$\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$(4-\lambda)x_1-x_2=0$$
$$2x_1+(1-\lambda)x_2=0$$

بتعويض $\lambda=2$ في العلاقة الأخيرة نجد أنّ:

$$\left.\begin{array}{l}2x_1-x_2=0\\ 2x_1-x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}x_2$$

أي إنّ x_2 اختياري.

نختار $x_2=1$ فيكون $x_1=\frac{1}{2}$ وبناءً عليه فإنّ الشعاع الذاتي الموافق للقيم الذاتية $\lambda=2$ هو $x=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^T$، وبأسلوب مشابه لما سبق نجد أنّ الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda=3$ هو $x=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$.

لنوجد الآن **نصف القطر الطيفي** للمصفوفة A

$$\rho(A)=\max\{|\lambda|;\quad Ax=\lambda x\ ;x\neq 0\}=\max\{2,3\}=3$$

سؤال دورة

مبرهنة جيشغورين (Theorem Gerschgorin's) (3) : مهمة

لتكن λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $A\in M_n(R)$ عندئذٍ من أجل أي عدد صحيح $1\leq j\leq n$ يتحقق أنّ

إذا كان ... أصغر من الواحد ... نطبق الطريقة التكرارية. أما إذا كان ... أكبر ... إلى تعريف القيم الذاتية وكيفية إيجادها

$$|a_{jj}-\lambda|\leq\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|a_{jk}| \qquad (15)$$

ملاحظة:

بفرض $d_j=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|a_{jk}|$ حيث $1\leq j\leq n$ تسمى مجموعة الأقراص $D_j\left(a_{jj},d_j\right)$;$1\leq j\leq n$ بأقراص جيشغورين.

مثال(6):

أوجد أقراص جيشغورين الموافقة للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 5 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

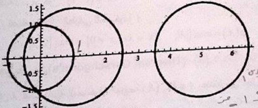
الحل:

$$a_{11}=0 \Rightarrow |a_{11}-\lambda| \le \sum_{k=2}^{3}|a_{1k}|=1 \ \Rightarrow D_1(0,1)$$

$$a_{22}=5 \Rightarrow |a_{22}-\lambda| \le \sum_{\substack{k=1\\k\ne 2}}^{3}|a_{2k}|=\frac{3}{2} \Rightarrow D_2\left(5,\frac{3}{2}\right)$$

$$a_{33}=1 \Rightarrow |a_{33}-\lambda| \le \sum_{k=1}^{2}|a_{3k}|=\frac{3}{2} \Rightarrow D_1\left(1,\frac{3}{2}\right)$$

سؤال دورة



الشكل(1)

ملاحظة:

في المثال السابق نجد بالحساب أنّ طيف المصفوفة A هو المجموعة:

$$\{\lambda_1=-0.209, \lambda_2=5.305, \lambda_3=0.904\}$$

نلاحظ أنّ

$$\lambda_1, \lambda_3 \in D_1 \cap D_3, \lambda_2 \in D_2$$