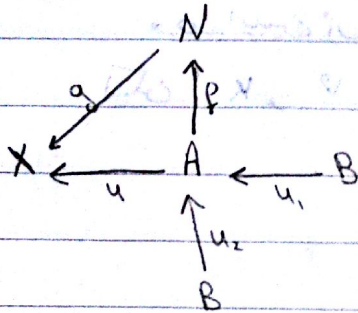




2016/5/10

# المراجعة الثانية عشرة : تطبيقات نظرية الفئات

## النواة المرافقة



تعريف: ليكن  $f: B \rightarrow A$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{C}$

نقول أن القنائية  $(N, f)$  هي نواة مرافقة

للمورفيزمين  $u_1, u_2$  إذا تحققت:

$$u_1: A \rightarrow X \text{ و } u_2: A \rightarrow X \text{ لكل } X \in \text{ob}(\mathcal{C})$$

$$u \cdot u_1 = u \cdot u_2$$

يوجد مورفيزم  $g: N \rightarrow X$  بحيث

$$g \cdot f = u$$

(2) إذا كان  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  إذا وجد مورفيزم  $u: A \rightarrow X$

وآخر  $g: N \rightarrow X$  بحيث

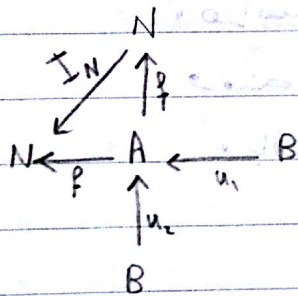
$$g \cdot f = u$$

$$u \cdot u_1 = u \cdot u_2$$

ملاحظة: ليس بالضرورة أن يكون أي مورفيزم  $u$  نواة ونواة مرافقة

نتيجة: إذا كانت القنائية  $(N, f)$  نواة مرافقة للمورفيزمين  $u_1, u_2$  عندئذ:

$$f \cdot u_1 = f \cdot u_2$$



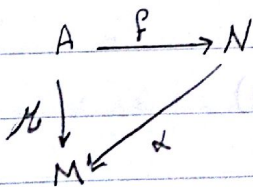
مبرهنة: ليكن  $f: B \rightarrow A$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{C}$

إذا كانت كل من  $(N, f)$  و  $(M, g)$

نواتين مرافقتين للمورفيزمين  $u_1, u_2$  عندئذ:

يوجد ايزومورفيزم  $\alpha: N \rightarrow M$  بحيث

$$\alpha \cdot f = g$$



البرهان:

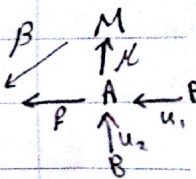
$u_1, u_2$  كانت نواة مرافقة للمورفيزمين  $u_1, u_2$

$$f \cdot u_1 = f \cdot u_2$$

أيضاً كانت  $(M, g)$  هي نواة مرافقة للمورفيزمين  $u_1, u_2$

فإنه يوجد مورفيزم  $\beta: M \rightarrow N$  بحيث

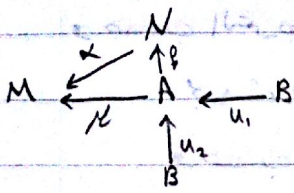
$$\beta \cdot g = f$$



من جهة أخرى، لما كانت  $(M, \mu)$  نواة مرافقة للمورفيزم  $u_1, u_2$

$$\mu \cdot u_1 = \mu \cdot u_2$$

أيضاً لما كانت  $(N, \beta)$  نواة مرافقة للمورفيزم  $u_1, u_2$  فإنه يوجد مورفيزم وحيد



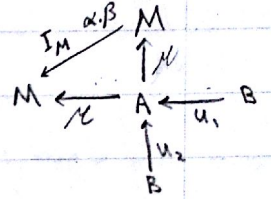
$$\alpha: N \rightarrow M$$

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = \mu}$$

بجيت:

$$\mu = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta \cdot \mu) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mu$$

$$f = \beta \cdot \mu = \beta \cdot (\alpha \cdot f) = (\beta \cdot \alpha) \cdot f$$



ومنه نجد أن  $\alpha \cdot \beta = I_M$

وأيضاً  $\beta \cdot \alpha = I_N$

وهذا يبين أن المورفيزم  $\alpha$  المورفيزم  $\alpha$  هو مورفيزم وحيد من التعريف

مبرهنة: ليكن  $u_1, u_2: B \rightarrow A$  مورفيزمين للفئة  $\mathcal{F}$

إذا كانت التناحية  $(N, \beta)$  نواة مرافقة للمورفيزم  $u_1, u_2$  عندئذٍ  $f$  هو مورفيزم

الرهان:

لنرض أن  $(N, \beta)$  نواة مرافقة للمورفيزم  $u_1, u_2$  عندئذٍ:

$$f: A \rightarrow N \text{ مورفيزم للفئة } \mathcal{F}$$

لنرضن على أن التطبيق:

$$B: \mathcal{F}(N, X) \rightarrow \mathcal{F}(A, X)$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{F}(N, X), B(\lambda) = \lambda \cdot f$$

متباين.

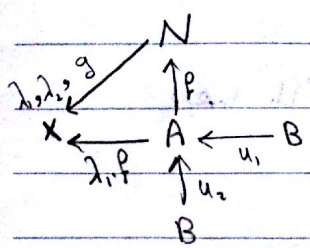
ليكن  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}(N, X)$  بجيت:

$$B(\lambda_1) = \lambda_1 \cdot f$$

$$\lambda_1 \cdot f = \lambda_2 \cdot f$$

عندئذٍ:

ومما كان  $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$   $\lambda_1 = \lambda_2$   $\Rightarrow$



$$\lambda_1 \cdot (f \cdot u_1) = (\lambda_2 \cdot f) \cdot u_2$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 \cdot f) \cdot u_1 = (\lambda_2 \cdot f) \cdot u_2$$

$$g \cdot f = \lambda_1 \cdot f = \lambda_2 \cdot f$$

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2} = g$$

وصب التعريف يوجد مورفيزم واحد

حيث:

وصب التعريف نجد أن:

وهذا يبين أن التطبيق  $\beta$  متباين

وبالتاليه المورفيزم  $f$  ابيومورفيزم.

مبرهنة: ليكن  $f: B \rightarrow A$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{F}$

عندئذ يوجد داليه مباشر

$$F: \mathcal{F} \rightarrow \text{Set's}$$

معرفه بالشكل:

أياً كان  $x \in \text{ob}(\mathcal{F})$

$$F(x) = \{ f: f \in \mathcal{F}(A, x), f \cdot u_1 = f \cdot u_2 \}$$

البرهان:

من خلال التعريف (تعريف F) نجد أن F تطبيقه أشياء

$$w: N \rightarrow M$$

ليكن

مورفيزم للفئة  $\mathcal{F}$

$$F(w): F(N) \rightarrow F(M)$$

$$\forall \lambda \in F(N); \lambda: A \rightarrow N$$

$$\lambda \cdot u_1 = \lambda \cdot u_2$$

وأن  $w \cdot \lambda \in \mathcal{F}(A, M)$  ويحقق:

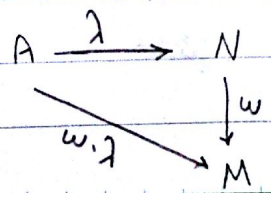
$$(w \cdot \lambda) \cdot u_1 = w \cdot (\lambda \cdot u_1) = w \cdot (\lambda \cdot u_2) = (w \cdot \lambda) \cdot u_2$$

$$w \cdot \lambda \in F(M)$$

وهذا يبين أن:

$$F(w)(\lambda) = w \cdot \lambda$$

لنضع



وبالتالي يكون  $F$  تطبيق مورفيزمات ...

أيضاً كان  $N \in \text{ob}(f)$  فإن:

$$F(I_N) : F(N) \longrightarrow F(N)$$

ومنه أيضاً كان  $\lambda \in F(N)$  فإن:

$$F(I_N)(\lambda) = I_N \cdot \lambda = \lambda$$

$$F(I_N) = I_{F(N)}$$

ليكن - مورفيزمين للفئة  $f$  عندئذ:

$$N \xrightarrow{\omega} M \xrightarrow{\nu} K$$

$$F(\nu \cdot \omega) : F(N) \longrightarrow F(K)$$

$$\forall \lambda \in F(N) ; F(\nu \cdot \omega)(\lambda) = (\nu \cdot \omega) \cdot \lambda = \nu \cdot (\omega \cdot \lambda)$$

لدينا:

$$F(\nu) : F(M) \longrightarrow F(K)$$

$$\lambda \in F(N)$$

$$\lambda \in f(A, N) , \lambda \cdot u_1 = \lambda \cdot u_2$$

$$\omega : N \longrightarrow M$$

$$\omega \cdot \lambda \in f(A, M)$$

$$\omega \cdot (\lambda \cdot u_1) = \omega \cdot (\lambda \cdot u_2)$$

$$(\omega \cdot \lambda) \cdot u_1 = (\omega \cdot \lambda) \cdot u_2$$

$$\omega \cdot \lambda \in f(A, M) \text{ وأن:}$$

$$F(\nu)(\omega \cdot \lambda) = \nu \cdot (\omega \cdot \lambda)$$

$$F(\nu \cdot \omega)(\lambda) = F(\nu)(\omega \cdot \lambda)$$

$$F(\omega) : F(N) \longrightarrow F(M) \text{ لدينا أيضاً}$$

$$\lambda \in F(N) \text{ وأن:}$$

$$F(\omega)(\lambda) = \omega \cdot \lambda$$

بهذا الشكل نجد أن:

$$F(\nu \cdot \omega)(\lambda) = F(\nu)(F(\omega)(\lambda)) = F(\nu) \cdot F(\omega)(\lambda)$$

$$F(v.w) = F(v).F(w)$$

وهكذا فإن  $F$  دالي مباشر.

### علاقات التكافؤ:

تعريف: لتكن  $M$  مجموعة غير فارغة.

نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي  $M \times M$  علاقة على  $M$

ونرمز لها  $\rho$

ونقول أن العلاقة  $\rho$  هي علاقة تكافؤ على  $M$  إذا حققت:

1. (تساوي)  $\forall x \in M, (x, x) \in \rho$
2. (تناظرية)  $\forall x, y \in M, (x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$
3. (متعدية)  $\forall x, y, z \in M, (x, y), (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$

نسمي الثنائية  $(M, \rho)$  بنية.

### تصريدية:

إن الصغين:

1. صنف الأسياء، يتألف من جميع الثنائيات الممكنة  $(M, \rho)$  حيث  $M$  مجموعة غير فارغة و  $\rho$  علاقة تكافؤ على  $M$

2. صنف المورفيزمات، المؤلف من جميع التطبيقات:  $f: (M, \rho) \rightarrow (N, \rho')$

والذي يحققه: لكل  $x, y \in M$

إذا كان  $(x, y) \in \rho$  فإن:

$$(f(x), f(y)) \in \rho'$$

إن الصغين السابقين يشكلان فئة.

انتهت المحاضرة الثانية عشر

صحة