النواة المرافقة:

تعريف: ليكن $u_1,u_2: B\to A$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{F}$

نقول أن الثنائية (N,f) هي نواة مرافقة

للمورفيزمين u_1,u_2 إذا تحقق:

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, "g"'] & \\
X & A \arrow[l, "u"] \arrow[u, "f"'] & B \arrow[l, "u_1"'] \\
& B \arrow[u, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

1) لأجل كل $X\in ob(\mathcal{F})$ ولأجل كل مورفيزم $u: A\to X$

يحقق: $u.u_1=u.u_2$

يوجد مورفيزم وحيد $g: N\to X$ بحيث

$g.f=u$

2) لأجل كل $X\in ob(\mathcal{F})$ إذا وجد مورفيزم $u: A\to X$

وآخر $g: N\to X$ بحيث:

$g.f=u$

عندئذٍ: $u.u_1=u.u_2$

ملاحظة: ليس بالضرورة لأجل أي مورفيزمين أن توجد نواة ونواة مرافقة.

نتيجة: إذا كانت الثنائية (N,f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1,u_2 عندئذٍ

$f.u_1=f.u_2$

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, "I_N"'] & \\
N & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, "f"'] & B \arrow[l, "u_1"'] \\
& B \arrow[u, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

مبرهنة: ليكن $u_1,u_2: B\to A$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{F}$.

إذا كانت كل من $(N,f),(M,\mu)$

نواتين مرافقتين للمورفيزمين u_1,u_2 عندئذٍ:

يوجد ايزومورفيزم وحيد $\alpha: N\to M$

بحيث: $\alpha.f=\mu$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[dl, "\alpha"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

البرهان:

لما كانت (N,f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1,u_2

فإن: $f.u_1=f.u_2$

أيضاً لما كانت (M,μ) هي النواة المرافقة للمورفيزمين u_1,u_2

فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta: M\to N$ بحيث:

$\boxed{\beta.\mu=f}$

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\beta"'] & \\
N & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, "\mu"'] & B \arrow[l, "u_1"'] \\
& B \arrow[u, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

من جهة أخرى ، لما كانت (M,μ) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1,u_2

$$\mu.u_1 = \mu.u_2$$

أيضاً لما كانت (N,f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1,u_2 فإنه يوجد مورفيزم وحيد

$$\alpha : N \longrightarrow M$$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ M & A \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "f"'] & B \arrow[l, "u_1"'] \\ & B \arrow[u, "u_2"'] & \end{tikzcd}$$

بحيث: $\boxed{\alpha.f = \mu}$

$$\mu = \alpha.f = \alpha.(\beta.\mu) = (\alpha.\beta).\mu$$

$$f = \beta.\mu = \beta.(\alpha.f) = (\beta.\alpha)f$$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "I_M"', "\alpha.\beta"] & \\ M & A \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\mu"'] & B \arrow[l, "u_1"'] \\ & B \arrow[u, "u_2"'] & \end{tikzcd}$$

ومنه نجد أن $\alpha.\beta = I_M$

وأيضاً $\beta.\alpha = I_N$

وهذا يبين أن المورفيزم α إيزومورفيزم ووحيد

(من التعريف)

مبرهنة: ليكن $u_1,u_2 : B \longrightarrow A$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$:

إذا كانت الثنائية (N,f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1,u_2 عندئذٍ f ابيمورفيزم.

البرهان:

لنفرض أن (N,f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1,u_2 عندئذٍ:

$f : A \longrightarrow N$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$.

لنبرهن على أن التطبيق:

$$\beta : \mathcal{C}(N,X) \longrightarrow \mathcal{C}(A,X)$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{C}(N,X) \quad , \quad \beta(\lambda) = \lambda.f$$

متباين.

ليكن $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}(N,X)$ بحيث:

$$\beta(\lambda_1) = \beta(\lambda_2)$$

عندئذٍ: $\lambda_1.f = \lambda_2.f$

ولما كان $f.u_1 = f.u_2$ فإن $\lambda_1 = \lambda_2$

ومنه: $\lambda_1.(f.u_1) = (\lambda_2.f).u_2$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "{\lambda_1,\lambda_2,g}"'] & \\ X & A \arrow[l, "\lambda_1.f"] \arrow[u, "f"'] & B \arrow[l, "u_1"'] \\ & B \arrow[u, "u_2"'] & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1.f).u_1 = (\lambda_2.f).u_2$$

وحسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $g: N \longrightarrow X$

بحيث: $g.f = \lambda_1.f = \lambda_2.f$

وحسب التعريف نجد أن: $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2} = g$

وهذا يبين أن التطبيق f متباين

وبالتالي المورفيزم f ابيمورفيزم.

مبرهنة: ليكن $u_1, u_2 : B \longrightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{f}$.

عندئذ يوجد دالي مباشر

$$F: \mathfrak{f} \longrightarrow Set's$$

معرف بالشكل:

أياً كان $X \in ob(\mathfrak{f})$ فإن:

$$F(X) = \{ f : f \in \mathfrak{f}(A,X) \; ; \; f.u_1 = f.u_2 \}$$

البرهان:

من خلال التعريف (تعريف F) نجد أن F تطبيق أشياء.

ليكن $w: N \longrightarrow M$

مورفيزم للفئة $\mathfrak{f}$.

$$F(w): \underset{\subset \mathfrak{f}(A,N)}{F(N)} \longrightarrow \underset{\subset \mathfrak{f}(A,M)}{F(M)}$$

$$\forall \lambda \in F(N) \; ; \; \lambda: A \longrightarrow N$$

$$\lambda.u_1 = \lambda.u_2$$

وأن $w.\lambda \in \mathfrak{f}(A,M)$ ويحقق:

$$(w.\lambda).u_1 = w.(\lambda.u_1) = w.(\lambda.u_2) = (w.\lambda).u_2$$

وهذا يبين أن: $w.\lambda \in F(M)$.

لنضع $F(w)(\lambda) = w.\lambda$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "w.\lambda"'] & N \arrow[d, "w"] \\ & M \end{tikzcd}$$

وبالتالي يكون F تطبيق مورفيزمات ...

أياً كان $N \in ob(\mathcal{f})$ فإن:

$$F(I_N) : F(N) \longrightarrow F(N)$$

ومنه أياً كان $\lambda \in F(N)$ فإن:

$$F(I_N)(\lambda) = I_N . \lambda = \lambda$$

$$F(I_N) = I_{F(N)}$$

- ليكن $N \xrightarrow{w} M \xrightarrow{v} K$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{f}$ عندئذٍ:

$$v.w : N \longrightarrow K$$

ومنه:

$$F(v.w) : F(N) \longrightarrow F(K)$$

$$\forall \lambda \in F(N) \; ; \; F(v.w)(\lambda) = (v.w).\lambda = v.(w.\lambda)$$

لدينا:

$$F(v) : F(M) \longrightarrow F(K)$$

ولدينا: $\lambda \in F(N)$

$$\lambda \in \mathcal{f}(A,N) \;,\; \lambda.u_1 = \lambda.u_2$$

وأن: $w : N \longrightarrow M$

ومنه $w.\lambda \in \mathcal{f}(A,M)$

وأن: $w.(\lambda.u_1) = w.(\lambda.u_2)$

$$(w.\lambda).u_1 = (w.\lambda).u_2$$

وهذا يبين أن $w.\lambda \in F(M)$ وأن:

$$F(v)(w.\lambda) = v.(w.\lambda)$$

$$\boxed{F(v.w)(\lambda) = F(v)(w.\lambda)}$$

لدينا أيضاً: $F(w) : F(N) \longrightarrow F(M)$

وأن $\lambda \in F(N)$ ومنه:

$$F(w)(\lambda) = w.\lambda$$

بهذا الشكل نجد أن:

$$F(v.w)(\lambda) = F(v)\big(F(w)(\lambda)\big) = F(v).F(w)(\lambda)$$

$F(v.w) = F(v).F(w)$

وهكذا فإن F دالي مباشر.

علاقات التكافؤ:

تعريف: لتكن M مجموعة غير خالية.

نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $M \times M$ علاقة على M

ونرمز لها ρ

ونقول أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على M إذا حققت:

1. (انعكاسية) $\forall x \in M \quad , \quad (x,x) \in \rho$
2. (تناظرية) $\forall x,y \in M \ , \ (x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$
3. (متعدية) $\forall x,y,z \in M \ , \ (x,y),(y,z) \in \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho$

نسمي الثنائية (M,ρ) بنية.

تمهيدية:

إن الصفين:

1. صف الأشياء: يتألف من جميع الثنائيات الممكنة (M,ρ) حيث M مجموعة غير خالية و ρ علاقة تكافؤ على M
2. صف المورفيزمات: المؤلف من جميع التطبيقات: $f:(M,\rho) \longrightarrow (N,\rho')$ والذي يحقق: لأجل كل $x,y \in M$ إذا كان $(x,y) \in \rho$ فإن: $(f(x),f(y)) \in \rho'$

إن الصفين السابقين يشكلان فئة.

انتهت المحاضرة الثانية عشرة

هبة