عملي الإحصاء :

المحاضرة الرابعة :

تمرين

ليكن $X \sim \chi^2 (v=5)$

1] اوجد : $P(1.145 \le X \le 12.83)$

2] اوجد : $P(X > 15.09)$

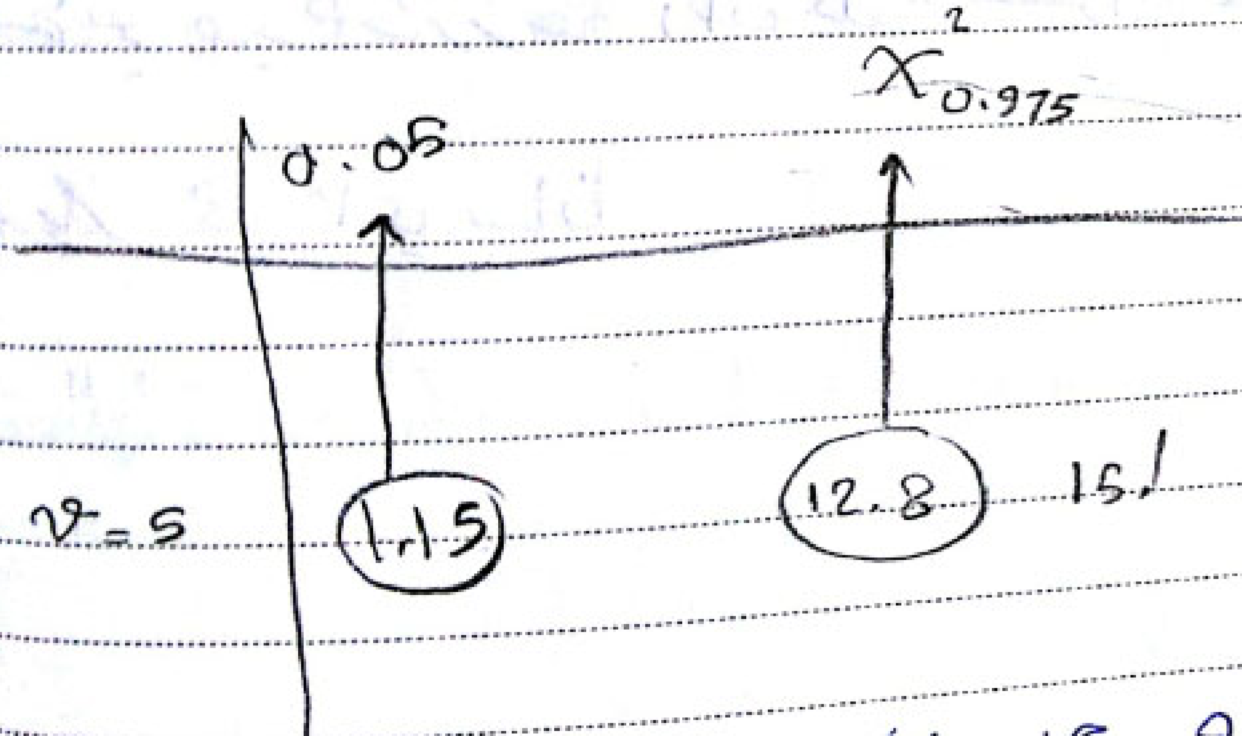
1]

$$P(1.145 \le x \le 12.83)$$

$$= P(X \le 12.83) - P(X \le 1.145)$$

$$= 0.975 - 0.05 = 0.925$$

في الجدول :



2]

$$P(X > 15.09) = 1 - P(X < 15.09)$$

$$= 1 - 0.990 = 0.01$$

تمرين :

$Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi^2(1)$

لو طلب حساب :

$P(|Z| < 1.96)$

$P(-1.96 \leq Z < 1.96)$

$= P(Z < 1.96) - P(Z < -1.96)$

$= P(Z < 1.96) - 1 + P(Z < 1.96)$

$= 2P(Z < 1.96) - 1$

$= 2(0.975) - 1 = - -$

طريقة ثانية :

$P(|Z| < 1.96)$

$= P(Z^2 < (1.96)^2) = P(Z^2 < 3.842)$

من جدول توزيع كاي مربع $\Rightarrow 0.95$

مثال: لتكن $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ عينة عشوائية لـ Z

حيث: $Z \sim N(0,1)$ علماً أن:

$$W = \sum_{i=1}^{7} Z_i^2$$ احسب $P(1.62 \leq W \leq 14.07)$

الحل:

(لحساب هذا الاحتمال يجب معرفة قانون توزيع W)

$$Z_1 \sim N(0,1) \Rightarrow Z_1^2 \sim \chi^2(1)$$

$$Z_2 \sim N(0,1) \Longrightarrow Z_2^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\vdots$$

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_7^2 \sim \chi^2(7)$$

بما أن $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي المعياري فيكون:

$$W = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_7^2 = \sum_{i=1}^{7} Z_i^2 \sim \chi^2(7)$$

$$p(1.62 < w \leq 14.07)$$

$$= p(w \leq 14.07) - p(w \leq 1.62)$$

$$= 0.95 - 0.025 =$$

تمرين : إذا كان T تتوزع وفق توزيع ستودنت ب $v = 14$ ،

عين C من اجل $p(|T| < c) = 0.90$

الحل :

$$p(|T| < c) = p(-c < T < c)$$

$$= p(T < c) - p(T < -c)$$

$$= p(T < c) - 1 + p(T < c)$$

$$= 2p(T < c) - 1$$

نعين C بحيث يكون :

$$2p(T < c) - 1 = 0.90$$

$$p(T < c) = \frac{0.90 + 1}{2} = \frac{1.9}{2}$$

$$p(T < c) = 0.95$$

$$\Rightarrow c = 1.76$$

$t_{0.95}$

$v = 14$ 1.76

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

عندما تكون العينة كبيرة تصبح

تمرين:

اذا كان X متحولاً عشوائياً يمثل اطوال الطلاب في

جامعة دمشق وكان X يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط

$\mu = 170 \, c.m$ اخذت عينة حجمها 16 طالب

فتبين ان الانحراف المعياري لاطوالهم 20

فاحسب احتمال أن يقل متوسط الطول لهذه

العينة عن $175 \, c.m$

الحل: $X \sim N(\mu = 170 , \sigma^2)$ يمثل اطوال طلاب

جامعة دمشق.

الاحتمال المطلوب

$P(\bar{X} < 175)$

للمجتمع $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

للعينة $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

$$P(\bar{X}<175)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq\frac{175-170}{\frac{\sigma}{\sqrt{16}}}\right)$$

$$=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\leq\frac{175-170}{\frac{20}{4}}\right)$$

$$=P\left(T(n-1)\leq 1\right)$$

$$P\left(T(15)\leq 1\right)=0.85$$

مثال: ليكن T متغيرا عشوائيا يتوزع وفق ستيودنت

تباين $\frac{5}{4}$ احسب: $P(-1.812\leq T\leq 1.812)$

الحل:

$$V(X)=\frac{v}{v-2}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{v}{v-2}\Rightarrow v=10$$

$$=2P(T<1.812)-1$$

$$=2(0.95)-1=0.9$$

عملي إحصاء

المحاضرة الخامسة :

تمرين :

اذا كان $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية للمتحول العشوائي X الذي له الكثافة المنتظمة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} , & 0 < x < \theta \\ 0 , & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

اوجد بطريقة العزوم مقدراً للوسيط θ .

الحل : يجب استخدام عزوم العينة $M_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^r}{n}$

عزوم المتغير العشوائي $m_r = E(X^r)$

نوجد :

$$m_1 = E(X^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) = \int_0^{\theta} \frac{x}{\theta}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\theta} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\theta^2}{2} - 0\right] = \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$m_1 = \frac{\theta}{2}$$

PHONE

NOTES

نوجد عزم العينة M_1 :

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^1}{n} = \bar{X}$$

نساوي بين m_1 و M_1

$$m_1 = M_1 \Rightarrow \bar{X} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2\bar{X}$$

تمرين :

لتكن $x_1, x_2, ..., x_n$ عينة عشوائية من مجتمع

له الكثافة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(\theta - x)}{\theta^2} & , \quad 0 < x < \theta \\ 0 & , \quad \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

اوجد بطريقة العزوم مقدراً للمعلمة θ .

الحل: نوجد عزم ~~العينة~~ المتغير :

$$m_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{\infty}^{+\infty} \frac{2x(\theta - x)}{\theta^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\theta} \frac{2}{\theta^2} (\theta x - x^2) dx$$

$$= \frac{2}{\theta^2} \left[\frac{\theta x^3}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\theta} = \frac{2}{\theta^2} \left[\left(\frac{\theta^3}{2} - \frac{\theta^3}{3} \right) - 0 \right]$$

$$= \frac{2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{6} \theta^3 \Rightarrow m_1 = \frac{\theta}{3}$$

نوجد عزم العينة :

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

بمساواة العزمين نجد :

$$m_1 = M_1 \Rightarrow \frac{\theta}{3} = \bar{X} \Rightarrow \theta = 3\bar{X}$$

تمرين : يتضمن امتحان خمسين سؤال من النوع متعدد الاختيارات لكل سؤال ثلاثة اجوبة مقترحة واحدة فقط هو الجواب الصحيح ولكي ينجح الطالب لابد من الاجابة بصورة صحيحة على عشرين سؤالا على الاقل .

1- احسب احتمال نجاح الطالب غير مؤهل يختار جوابه عن كل سؤال عشوائيا :

الحل : اما ان تكون الاجابة صحيحة او خاطئة فنحن امام تجربة برنولية :

X : يدل على الاجابة

صحيحة 1

خاطئة 0

$P(X=1)=\frac{1}{3}$, $P(X=0)=\frac{2}{3}$

$P(X \geq 20)$

عدد الاجابات

والاجابة على 50 سؤال هي تجربة حدانية بالوسيطين $p=\frac{1}{3}$ و $n=50$ ويكون :

X : عدد الاجابات الصحيحة :

الاحتمال المطلوب : $P(X \geq 20)$

بما أن : $n=50>30$

$n.p=\frac{50}{3} \geq 5$

$n.q=50 \times \frac{2}{3} \geq 5$

نستطيع التقريب للتوزيع الطبيعي

$\Rightarrow X \sim N(np, npq)$

$E(X) = M = n.p = \frac{50}{3}$

$Var(x) = \sqrt{n.p.q} = \frac{10}{3}$

$p(X \geq 20) = p\left(X \geq 20 - \frac{1}{2}\right)$

$= P\left(\frac{M - X}{\alpha} \geq \frac{20 - \frac{1}{2} - \frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right)$

$= P(Z \geq 0.85) = 1 - P(Z < 0.85)$

$= 1 - \phi(0.85) = 1 - 0.823 = 0.198$

② مع ثبات عدد الأسئلة ودرجة النجاح كم يجب أن يكون عدد الاختيارات المطروحة أمام كل سؤال ليصبح احتمال نجاح الطالب باختيار إجابة عشوائياً أقل من ٠.٠١.

لا نعلم عدد الاختيارات p مجهولة

الحل: $P(X \geq 20) < 0.01$

نستطيع التقريب للتوزيع الطبيعي:

$$E(X) = \mu = n.p = 50p$$

$$\sqrt{V(X)} = \sigma = \sqrt{50(p)(q)} = \sqrt{50p(1-p)}$$

$$P(X \geq 20) < 0.01$$

$$\Longleftrightarrow P\left(X \geq 20 - \tfrac{1}{2}\right) < 0.01$$

$$\Rightarrow P(x \geq 19.5) < 0.01$$

$$P\left(Z \geq \frac{19.5 - 50p}{\sqrt{50p(1-p)}}\right) < 0.01$$

$$\cancel{P}\ 1 - \Phi\left(\frac{19.5 - 50p}{\sqrt{50p\,(1-p)}}\right) < 0.01$$

$$\phi\left(\frac{19.5-50p}{\sqrt{50p(1-p)}}\right) \geq \phi(2.33)$$

$$\frac{19.5-50p}{\sqrt{50p(1-p)}} \geq 2.33$$

$p > 0.55$ أو $p < 0.248$

نختار p بحيث

يجب أن يكون $19.5 - 50p > 0$

إن $p > 0.55$ تجعل المقدار $19.5 - 50p$ سالباً

مرفوضة ونقبل $p < 0.248$

نأخذ أول نسبة تقل عن 0.248

وبالتالي نأخذ أول نسبة تقل عن 0.248

ويكون جوابها لعدد صحيح مساوياً للواحد

$p = 0.2 \Leftarrow p = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}$ 5

فيجب أن يكون عدد الخيارات 5

اذا يكون عدد الاختيارات المطروحة امام كل سؤال يلي (5)

(3) في حال وجود اختيارين فقط، كم يجب ان تكون درجة النجاح بحيث لا يزيد احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائيا على 0.01 :

الحل: $p = \frac{1}{2}$

$$P(X \geq x) < 0.01$$

$$\mu = n.p = \frac{50}{2} = 25$$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{\frac{50}{4}} = 3.54$$

$$P\left(X \geq x - \frac{1}{2}\right) < 0.01$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{x - \frac{1}{2} - 25}{3.54}\right) < 0.01$$

$$P\left(Z \geq \frac{x - 25.5}{3.54}\right) < 0.01$$

$$1 - \Phi\left(\frac{x - 25.5}{3.54}\right) < 0.01$$

$$\phi\left(\frac{x-25.5}{3.54}\right) > 0.99$$

$$\frac{x-25.5}{3.54} > 2.33$$

$$\Rightarrow x = 34.$$