المحاضرة الثالثة علم احصاء 2016/4/20

لكن X متغير عشوائياً أسياً بالوسيط $\lambda=2$

استخدم متباينة تشيبشيف للحصول على حد راجح

للاحتمال $P[|X-E(X)|>1]$ وقارن ذلك مع القيمة

العملية لهذا الاحتمال.

الحل: إن متراجحة تشيبشيف:

$$\forall \varepsilon>0 : P[|X-\mu|\geqslant \varepsilon] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad *$$

إن $X \sim exp(\lambda=2)$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2} \quad , \quad V(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4}$$

من أجل $\varepsilon=1$ بتعويض في *

$$P[|X-E(X)|\geqslant 1] \leq \frac{\frac{1}{4}}{1}$$

$$P[|X-E(X)|\geqslant 1] \leq 0.25$$

القيمة العملية:

$$P[|X-E(X)|\geqslant 1]$$

$$1-P[|X-\frac{1}{2}|\leq 1]$$

$$1-P(-1\leq X-\frac{1}{2}\leq +1)$$

$$1 - P\left(-1 + \frac{1}{2} \le X \le 1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$1 - P\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{3}{2}\right) + F_X\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$= 1 - \left[1 - e^{-2\left(\frac{3}{2}\right)}\right] + 0 = 1 - 1 + e^{-3} = e^{-3}$$

$$= 0.0498$$

$$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0}$$

وبالمقارنة مع الحد الراجح نجد أن المتباينة محققة.

ج- ليكن X متغيراً عشوائياً ومعلماته $n = 10$ و $P = 0.5$

احسب $P(2 \le X \le 4)$

باستخدام:

1) التوزيع الحداني.

2) تقريب التوزيع الطبيعي.

الحل:

$$X \sim b(n = 10, P = 0.5)$$

$$P(X = x) = f_X(x) = C^{10}_x (0.5)^x \cdot (0.5)^{10-x}$$

$$= C^{10}_x (0.5)^{10}$$

$$q = 1 - P = 1 - 0.5 = 0.5$$

[1

$P(2 \le X \le 4)$

$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$= (0.5)^{10}\left[C_2^{10} + C_3^{10} + C_4^{10} \right] = 0.3662$

$np = 10(0.5) = 5 \geq 5$ [2

$nq = 10(0.5) = 5 \geq 5$

ثنائي

$P(x_1 < X < x_2)$

للتحويل من الثنائي إلى الطبيعي

$P(x_1 - \frac{1}{2} < Y < x_2 + \frac{1}{2})$

طبيعي

معامل التصحيح

$Y \sim N(np, npq)$

$\mu = np = 5$

$\sigma = \sqrt{n.p.q} = 1.58$

$P(2 \le X \le 4)$

$\cong P(2 - \frac{1}{2} \le Y \le 4 + \frac{1}{2})$

$= P(1.5 \le Y \le 4.5)$

$P\left(\frac{1.5-5}{1.58} \le \frac{Y-\mu}{\sigma} \le \frac{4.5-5}{1.58}\right)$

$= P(-2.25 \le Z \le -0.316)$

$= 1 - \Phi(0.316) - 1 + \Phi(2.215)$

$= \Phi(2.215) - \Phi(0.316)$

$= 0.9864 - 0.6217 = 0.3647$

٢- اخترنا عينة عشوائية حجمها 1000 قطعة الكترونية من انتاج مصنع معين فإذا كان %98 من انتاج المصنع يعد صالحاً للعمل.

احسب احتمال الحصول على 27 قطعة الكترونية غير صالحة للعمل ضمن العينة على الأقل.

الحل: نفرض X: عدد القطع غير الصالحة.

فإن X يتبع التوزيع الحداني.

$$X \sim b(n = 1000, p = 0.02)$$

احتمال القطعة غير صالحة.

$$P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 27)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{27} C_x^{1000} (0.02)^x \cdot (0.98)^{n-x}$$

وحساب مثل هذا الاحتمال ليس سهلاً لذلك يفضل استخدام تقريب التوزيع الطبيعي.

$$X \sim b(1000, 0.02)$$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$$\Rightarrow Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = n \cdot p = 1000(0.02) = 20$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(1000)(0.98)(0.02)} = 4.43$$

$$P(X \geq 27) \cong P\left(Y > 27 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= P(Y > 26.5) = 1 - P(Y \leq 26.5)$$

$$= 1 - P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{26.5-20}{4.43}\right) = 1 - P(Z \leq 1.4)$$

$$= 1 - 0.9192$$

$$= 0.0708$$

وظيفة: يتضمن امتحان 50 سؤال من النوع متعدد الخيارات
ولكل سؤال 3 اجوبة مقترحة وواحدة منها
هو الجواب الصحيح ولكي ينجح الطالب لابد من الاجابة بصورة
صحيحة عن 20 سؤال على الاقل والمطلوب:

1- احسب احتمال نجاح طالب غير مؤهل يختار جوابه عن كل سؤال عشوائياً

2- مع ثبات عدد الاسئلة ودرجة النجاح كما هي، كم يجب أن يكون عدد الاختيارات المطروحة أمام كل سؤال ليصبح احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائياً أقل من 0.01

3- بحالة وجود اختيارين فقط كم يجب أن تكون درجة النجاح بحيث لا يزيد احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائياً عن 0.01