$$m_2 = M_2 \Rightarrow \boxed{\mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

بالحل المشترك نجد أن

μ وهو مقدر للوسط $\hat{\mu} = \bar{X}$

σ^2 " " $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

المحاضرة الثانية عشرة

٤- طريقة الاحتمالية العظمى في التقدير:

إحدى أقوى الطرائق الإحصائية وأهمها وقد جاء بها العالم Fisher وتتم كما يلي: لنفرض أنه لدينا عينة عشوائية لمتغير عشوائي X دالة كثافة الاحتمالية $f_X(x)$ تتبع وسيط مجهول θ عندئذ تكون الدالة:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

التي تعطي قيمة عظمى لدالة الكثافة الاحتمالية المشتركة

$$L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

قيمتها العظمى مقدراً للوسيط θ وتكون قيم $\hat{\theta}$ حلاً لجملة المعادلات

$$\frac{dL\theta}{d\theta} = 0 \quad , \quad \frac{d^2L(\theta)}{d\theta^2} < 0$$

وبما أن الدالة $K(\theta) = \log L(\theta)$

Subject.

تبلغ نهايتها العظمى عند النقطة نفسها التي تبلغها الدالة $L(\theta)$ فاننا سنبحث عن $\hat{\theta}$ التي تعطي حلاً لجملة المعادلات

$$\frac{\partial k(\theta)}{\partial \theta} = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 k(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

وفي الحالة التي تكون فيها $f(x)$ تابعة لعدة وسطاء $\theta_1, \dots, \theta_k$ فان المقدرات $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$ هي احصاءات العينة التي تعطي حلول لجملة المعادلات:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \,, \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \,, \dots \,, \frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} < 0 \,, \dots \,, \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k^2} < 0$$

أو لجملة المعادلات:

$$\frac{\partial k}{\partial \theta_1} = 0 \,, \frac{\partial k}{\partial \theta_2} = 0 \,, \dots \,, \frac{\partial k}{\partial \theta_k} = 0$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \theta_1^2} < 0 \,, \frac{\partial^2 k}{\partial \theta_2^2} \,, \dots \,, \frac{\partial^2 k}{\partial \theta_k^2} < 0$$

تمرين: ليكن ~~[illegible]~~ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X أوجد مقدراً لـ μ و σ^2 بطريقة الاحتمالية العظمى

الحل:

$$L(\theta_1, \theta_2) = L(\mu, \sigma^2)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

ويكون:

$$k(\mu, \sigma^2) = \ln L(\mu, \sigma^2)$$
$$= \frac{-n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

وباشتقاق الدالة $k(\mu, \sigma^2)$ جزئياً بالنسبة لـ μ و σ^2 والمطابقة مع الصفر نجد أن

$$\frac{\partial k}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu}{\sigma^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum x_i = n\mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial k}{\partial \sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4}$$

$$= \frac{-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

نتحقق من الشرط الثاني :

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \mu^2} = \frac{-n}{\sigma^2} < 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^4} < 0 \qquad \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

تمرين : (تقدير في المجتمع) :

إذا كان لدينا مجتمع وأردنا أن نقدّر نسبة العناصر
من المجتمع التي تحقق صفة معينة فيمكن ان نمثل هذا المجتمع
بمتغير عشوائي برنولي X يأخذ القيمة $\boxed{0}$ إذا لم تحقق
العنصر الصفة والقيمة 1 إذا كان تحقق فإذا كانت $X_1, \dots X_n$
عينة عشوائية لـ X الذي يتبع توزيع برنولي بوسيط P

فإن : $f_{X_i}(x_i) = p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$

ومنه :

$$L(p) = f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i}$$

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\Rightarrow k(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln (1-p)$$

~~الشرط الأول~~

الشرط الأول:

$$\Rightarrow \frac{\partial k}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)}{1-p}$$

$$(1-p) \qquad (p)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np}{p(1-p)} = 0$$

$$\Rightarrow \sum x_i - np = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

الشرط الثاني:

$$\frac{\partial^2 k}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} - \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)^2}$$

نلاحظ أن $\frac{\partial^2 k}{\partial p^2} < 0$

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X}$$

مقدر لـ p

ملاحظة: بما أن X يأخذ القيمة 0 أو 1 فإن

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{Y}{n}$$

حيث Y يدل على عناصر العينة التي تحقق هذه الصفة

خواص المقدرات: إذا كان $\hat{\theta}$ مقدراً للوسيط θ وكما لاحظنا فإن $\hat{\theta}$ متغير عشوائي بينما θ مقدار ثابت وبالتالي من أجل كل عينة لـ $\hat{\theta}$ نحصل على قيمة واحدة تدعى بالمقدر

أو التقدير المقدر لـ θ من الطبيعي ان نفتش كل المقدرات $\hat{\theta}$ الذي تكون قيمته قريبة جداً من θ كأن نضمن $\hat{\theta}$ بحيث يكون

$$E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \min$$

تعريف: إذا كان $\hat{\theta}$ مقدراً للوسيط θ فاننا ندعوه بالمقدر المنصف (غير منحاز) إذا حقق الشرط التالي $E(\hat{\theta}) = \theta$

تعريف: إذا كان $\hat{\theta}$ مقدراً منصفاً لـ θ وكان $Var(\hat{\theta}) = \min$ فاننا ندعو المقدر المنصف ذي التشتت الاصغري.

مبرهنة: إذا كانت $x_1, \dots, x_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X فان عزوم العينة هي تقديرات منصفة لعزوم المتغير X

البرهان: إن عزم العينة من المرتبة r هو:

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^r$$

$$\Rightarrow E(M_r) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right) = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^{n} x_i^r$$

$$= \frac{1}{n} \sum (E x_i^r) = \frac{1}{n} \sum (m_r) = m_r$$

تمرين: أثبت أن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لعينة عشوائية هو مقدر منصف لمتوسط المجتمع (التوقع) μ

الحل: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

تمرين (دورة) : أثبت أن:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

هو مقدر غير متحيز لتباين المجتمع σ^2

ثم اوجد المقدار المتحيز لـ σ^2 حيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

الحل: $$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \bar{X})^2$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E X_i^2 - n E\bar{X}^2\right) \quad \bigstar$$

لكن لدينا:

$$E X_i^2 = \sigma^2_{X_i} + \mu^2_X = \sigma^2 + \mu^2$$

وكذلك:

$$E\bar{X}^2 = \sigma^2_{\bar{X}} + \mu^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\mu}\right)$$

نعوض في $(\bigstar)$ نجد:

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} (\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2\right]$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} \neq \sigma^2$$

$\Leftarrow$ $\hat{\sigma}^2$ مقدر غير متحيز لـ σ^2

لإيجاد المقدر الغير متحيز لـ σ^2 نبدأ من العلاقة الأخيرة

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \Rightarrow \frac{n}{n-1}E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2 \Rightarrow E\left[\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{X})^2\right] = \sigma^2$$

$$\Rightarrow E\Big[\underbrace{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}_{=s^2}\Big] = \sigma^2$$

أي أن

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

هو المقدر الغير متحيز لـ σ^2

المحاضرة الثالثة عشر

تمرين: إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ عينة لمتغير عشوائي X له التوزيع البواسوني بوسيط λ، أوجد بطريقة الامكانية العظمى مقدر للوسيط λ وهل هذا المقدر متحيز أم لا.

الحل:

$$X \sim Poiss(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad ; x = 0, 1, \dots$$

$$\Rightarrow L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n}\left[e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right]$$

$$= \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)}$$

Subject:

$$\Rightarrow K(\lambda) = \ln(L(\lambda))$$

$$K(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \sum \ln(x_i!)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} < 0$$

أي أن $\hat{\lambda} = \bar{X}$ مقدر للوسيط λ

<u>منحاز أو غير منحاز</u>:

$$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{=\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda = \lambda$$

إذن هذا المقدر $\hat{\lambda}$ منحاز.

تمرين: إذا كانت القيم 2, 1, 1, 2, 3 عينة عشوائية حجمها $n=5$ من مجتمع له التوزيع الحداني (الثنائي) $X \sim b(10, P)$

أوجد بطريقة العزوم تقديراً للوسيط P

<u>الحل</u>: نعلم أن:

$$m_1 = EX = nP = 10P$$

ولكن: $$M_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$= \frac{1}{5}[2+1+1+2+3] = \frac{9}{5} = 1.8$$

بالمطابقة : $m_1 = M_1$

نجد أن : $10p = 1.8 \rightarrow p = 0.18$

أي أن $\hat{p} = 0.18$ مقدر للوسيط p

الفصل الثامن : التقدير المجالي - مجالات الثقة :

أ- تعريف : ليكن X متغير عشوائياً توزيعه الاحتمالي تابع وسيطاً مجهولاً θ ولنفرض : $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X وأن L_1 و L_2 احصاءان محسوبان على أساس العينة المفروضة اننا نقول عن المجال $[L_1, L_2]$ انه مجال ثقة لـ θ عند مستوى $100(1-\alpha)\%$ من الثقة إذا كان :

$$P(L_1 \leq \theta \leq L_2) = 1-\alpha$$

$100(1-\alpha)\% = 95\%$ ، $1-\alpha = 0.95$ ، $\alpha = 0.05$

ملاحظة :

إن طرفي المجال $[L_1, L_2]$ هما متغيران عشوائيان يتغيران من عينة لأخرى فيمكن أن نسمي هذا المجال بالمجال العشوائي ومن اجل كل عينة لـ X نستطيع حساب كل من L_1 و L_2 ونختار المجال الذي يكون طوله أصغرياً قدر الامكان

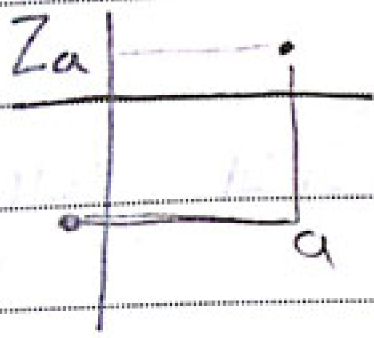
أ- مجال الثقة لمتوسط متغير عشوائي طبيعي تباينه معلوم.

مبرهنة: إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ حيث μ مجهول و σ^2 معلوم فإن المجال :

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

هو مجال ثقة لـ μ بثقة $100(1-\alpha)\%$.

حيث $Z \sim N(0,1)$ و Z_a تحسب من جدول التوزيع الطبيعي المعياري و $\boxed{a}$ هو احتمال بين الصفر والواحد.



ملاحظة: بفضل مبرهنة النهاية المركزية فإن المبرهنة السابقة محققة من أجل العينات العشوائية من مجتمعات غير طبيعية ذات التباين المعلوم σ^2 عندما يكون حجم العينات $n \leq 30$

نتيجة 1:

من المبرهنة أن: $P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

نتيجة 2: نلاحظ أننا عندما نقدر متوسط المجتمع μ بمتوسط العينة $\bar{X}$

نرتكب خطأ فإذا رمزنا بـ ε للخطأ الأعظمي المرتكب في التقدير المجالي لـ μ عند مستوى الثقة $1-\alpha$ فإن

$$\varepsilon = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right|$$

وبالتالي فإن ε يتناقص بازدياد n وبالتالي يمكن التحكم به بواسطة حجم العينة

نتيجة 2: إذا أردنا تعيين حجم العينة بحيث لا يتجاوز الخطأ المقدار بثقة $(1-\alpha)100\%$ نحسب من المتراجحة:

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Subject:

تمرين: من مجتمع طبيعي متوسطه μ مجهول وتباينه $\sigma^2 = 16$ سحبنا عينة عشوائية حجمها $n = 20$ فكان متوسطها $\bar{X} = 9$

والمطلوب:

1) اوجد مجال ثقة 95% لمتوسط المجتمع μ

2) كم ينبغي أن يكون حجم العينة بحيث وبثقة 95% المقدار $\boxed{\varepsilon = 0.75}$

الحل:

$$\alpha = 0.05 \Leftarrow 1 - \alpha = 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

أن يكون مجال الثقة لـ μ

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[9 - (1.96)\frac{4}{\sqrt{20}} , 9 + (1.96)\frac{4}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= [7.247 ; 10.753]$$

2) $$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{1.961 \cdot 4}{0.75}\right)^2 = 109.272$$

أي ينبغي أن يكون حجم العينة $n \geq 110$

تمرين: أجريت دراسة لمعرفة محتوى خضاب الدم لعينة مؤلفة من 36 طفلاً فكان متوسط كمية الخضاب لديهم 11.3غ فإذا كانت العينة عشوائية من مجتمع الانحراف المعياري لكمية خضاب الدم فيه 2.5 غ عين مجال ثقة تقريبي لمتوسط كمية خضاب الدم لمجتمع الأطفال الذي أخذت منه العينة بمعامل ثقة 98%.

الحل:

$$1-\alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.99$$

$$\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.99} = 2.33$$

$\Leftarrow$ مجال الثقة لـ μ

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[11.3 - 333\frac{2.5}{6} ; 11,3 + 2.33\frac{2.5}{6}\right]$$

$$= [10,329 ; 12,271]$$

- ما هو الخطأ الأعظمي لهذا التقدير:

$$\varepsilon = \left|\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right| = \left|\pm (3.33) \cdot \frac{2.5}{6}\right| \simeq 0.97$$

ملاحظة: في الحالة التي يكون فيها تباين المجتمع σ^2 مجهول ومن أجل العينات كبيرة الحجم $n \geq 30$ يكون تباين العينة S^2 مقدراً جيداً لـ σ^2 فيصبح:

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\varepsilon = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right|$$

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} S}{\varepsilon} \right)^2$$

تمرين: مالك سيارة يريد أن يعرف المتوسط الاسبوعي للمسافة التي تقطعها سيارته بالكيلومتر وقد سجل المسافات المقطوعة في 49 اسبوعاً متتالياً ووجد متوسطها 230 كم في الاسبوع بانحراف معياري 80 كم أوجد مجال ثقة 96% لمتوسط ما تقطعه في الاسبوع.

الحل:

$$n = 49 \geq 30$$

$$\bar{X} = 230 \quad , S = 80$$

$$1 - \alpha = 0.96 \Rightarrow \alpha = 0.04$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98$$

$$\Rightarrow \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[230 - (2.05)\frac{80}{7} ; 230 + (2.05)\frac{80}{7}\right]$$

$$= [206.57 ; 253.429]$$

2- مجال الثقة لمتوسط متغير عشوائي طبيعي تباينه مجهول في الحالة التي يكون فيها $n<30$ و σ مجهول فان الاحصاء:

$$\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T(\nu = n-1)}$$

ستيودنت

مبرهنة: إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير طبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ حيث μ و σ مجهولان فان مجال الثقة و $n<30$:

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) . \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

هو مجال ثقة لـ μ بثقة: $(1-\alpha)100\ \%$

تمرين: قسنا ارتفاع خمس عشرة شجرة بأخذنا بعد فترة من زرعها فكان متوسط الارتفاع 83 سم بانحراف معياري 5.8 سم.

أوجد 95% مجال ثقة لمتوسط الارتفاع في المجتمع علماً ان الارتفاع يخضع للتوزيع الطبيعي

الحل:

$n = 15 < 30$

$\bar{X} = 83$ سم

$S = 5.8$ سم

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(14) = 3.145$$

فيكون مجال الثقة 95% لـ μ

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[83 - 2.145 \cdot \frac{5.8}{\sqrt{15}} \,;\, 83 + 2.145 \cdot \frac{5.8}{\sqrt{15}}\right]$$

$$= [79.788 \,;\, 86.212]$$

(المحاضرة 14)

- مجال الثقة للفرق بين متوسطي متغيرين عشوائيين طبيعيين تباينهما معلومان :

إذا كان $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ حيث μ_1 مجهول و σ_1^2 معلوم ،

وإذا كان $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ حيث μ_2 مجهول و σ_2^2 معلوم وليكن $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ متوسطي عينتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 لـ X_1 و X_2 على الترتيب

وبالتالي حسب مبرهنة سابقة سيكون :

$$\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وبالتالي يكون :

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 , \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وبالتالي فإن مجال ثقة $100(1-\alpha)\%$

للفرق $\mu_1 - \mu_2$ هو :

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right.$$

$$\left. ; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

ملاحظة 1 : عندما لا يكون للمتغيرين X_1 و X_2 التوزيع الطبيعي

وعندما يكون $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$

وحسب من هذه النهاية المركزية يبقى مجال الثقة السابق

صحيحاً (بشكل تقريبي)

ملاحظة 2 : إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان وعندما يكون $n_1 \geq 30$

و $n_2 \geq 30$ فيمكننا استبدالها بـ S_1^2 و S_2^2 تباينَي العينة

تمرين : لمقارنة نوعين من المصابيح A و B أخذت عينة

حجمها $n = 150$ مصباحاً من النوع A فكان ~~متوسط عمرها~~

متوسط عمرها $X_1 = 1400$

ساعة بانحراف معياري $S_1 = 120$ ساعة ثم أخذت

عينة حجمها $n_2 = 200$ من النوع B فكان متوسط عمرها

$X_2 = 1200$ ساعة بانحراف معياري : $S_2 = 80$ ساعة أوجد

مجال ثقة 97% للفرق بين متوسطي أعمار مجتمعي المصابيح A و B

الحل:

$A \begin{cases} n_1 = 150 \geq 30 \\ \bar{X}_1 = 1400 \\ S_1 = 120 \end{cases}$ $\quad$ $B \begin{cases} n_2 = 200 \geq 30 \\ \bar{X}_2 = 1200 \\ S_2 = 80 \end{cases}$

بما أن $n_1, n_2 \geq 30$ فيمكن اعتبار $\sigma_1 \approx S_1 = 120$

$\sigma_2 \approx S_2 = 80$

ولدينا:

$$1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$Z_{0.985} = 2.17$$

وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$

هو المجال:

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right.$$

$$\left. ; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$

$$= \left[(1400 - 1200) - (2.17) \sqrt{\frac{(120)^2}{150} + \frac{(80)^2}{200}} \right.$$

$$\left. ; (1400 - 1200) + (2.17) \sqrt{\frac{(120)^2}{150} + \frac{(80)^2}{200}} \right]$$

$$= [175.45 \; ; \; 224.55]$$

وبما أن طرفي المجال موجبان نستنتج أن المصابيح من

النوع A هي الأفضل لأن متوسط عمرها أكبر

Subject:

تمرين: في اختبار تجريبي في مقرر الاحصاء تقدم 75 طالباً و 50 طالبة ودرسا فكان متوسط درجات الطلاب 82 درجة بانحراف معياري 8 درجات بينما كان متوسط درجات الطالبات 76 درجة بانحراف معياري 6 درجات

أوجد 96% مجال ثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ حيث μ_1 متوسط درجات الطلاب و μ_2 متوسط درجات الطالبات

وهل تقدم هذه النتائج دلائل كافية على وجود فرق بين مستوى الطلاب ومستوى الطالبات.

الحل:

$$\underbrace{S_1 = 8 ,\quad \bar{X}_1 = 82 ,\quad n_1 = 75 \geq 30}_{\text{طلاب}}$$

$$\underbrace{S_2 = 6 ,\quad \bar{X}_2 = 76 ,\quad n_2 = 50 > 30}_{\text{طالبات}}$$

ولدينا أيضاً

$$1 - \alpha = 0.96 \Rightarrow \alpha = 0.04$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98$$

$$\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.98} = 2.05$$

من أجل $n_1, n_2 \geq 30$

نجد أن مجال الثقة 96% لـ $\mu_1 - \mu_2$ هو

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \; ; \; (\bar{X} - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$

$$= \left[(82 - 76) - 305 \sqrt{\frac{64}{75} + \frac{36}{50}} \; ; \; (82 - 76) + 305 \sqrt{\frac{64}{75} + \frac{36}{50}} \right]$$

$$= [3,43 \; ; \; 8,79]$$

وبما أن طرفي المجال موجبان هذا يدل على أن مستوى الطلاب أفضل بثقة 96%

- مجال الثقة بالنسبة في المجتمع: من المسائل المهمة تقدير نسبة العناصر من المجتمع المحققة لصفة معينة

مثال: نسبة المدخنين من بين طلاب جامعة دمشق فإذا كانت نسبة العناصر المحققة لصفة A هي النسبة $\boxed{p}$ فإن احتمال أن نختار عنصراً يحقق هذه الصفة يساوي p.

وبالتالي يمكن أن نمثل المجتمع المدروس بمتغير عشوائي X له توزيع برنولي بوسيطه p (التي هي النسبة في المجتمع)

وقد وجدنا سابقاً أن

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{Y}{n}$$

حيث Y يدل على عدد عناصر المحققة للصفة في العينة من المجتمع المدروس

ووجدنا أن $\hat{p}$ مقدر منصف لـ p ، وعندما يكون حجم العينة كبيراً $(n \geq 30)$ فإنه حسب مبرهنة النهاية المركزية:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \approx N(0,1)$$

وبالتالي نجد أن مجال الثقة $(1-\alpha)100\%$ للنسبة (للوسيط) p هو المجال:

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} \; ; \; \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} \right]$$

ولكننا يمكن استبدال الـ p و q بمقدراتها $\hat{p}$ و $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ فيصبح مجال الثقة

Subject:

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \;;\; \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

الخطأ الأعظمي المطلق في تقدير P :

$$e = \left[\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

وحجم العينة الواجب أخذها كي لا تتجاوز الخطأ المقدار ع
وبثقة $(1-\alpha)100\%$ هو :

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{\hat{p}\hat{q}})}{2\varepsilon}\right)^2$$

$$\boxed{n \geq \frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \hat{p}\hat{q}}{4\ \varepsilon^2}}$$

تمرين : لدى تخدير 100 شخص من المرضى الكبار السن
تبين أن 36 منهم حصلت لهم مضاعفات جراء تخديرهم
والمطلوب :

1) أوجد 95% مجال ثقة لنسبة الذين يعانون من مضاعفات
جراء التخدير

2) عين الخطأ المطلق الأعظمي المرتكب عندما نفترض أن $\boxed{p = \hat{p}}$
بثقة 98 %

3) ماهو حجم العينة التي ينبغي دراستها لكي لايتجاوز الخطأ
في تقدير P المقدار 0.04 وبثقة 99%

الحل: $n = 100$ ، $Y = 36$ (الذين لديهم مضاعفات تخدير)

ونجد أن:

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{Y}{n} = \frac{36}{100} = 0.36$$

$$\Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.64$$

1) لدينا:

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow Z_{0.975} = 1.96$$

ويكون مجال الثقة 95% لـ P هو

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \; ; \; \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

$$= \left[0.36 - 1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{100}} \; ; \; 0.36 + 1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{100}}\right]$$

$$= [0.266 \; ; \; 0.454]$$

2)

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow Z_{0.99} = 2.33$$

والخطأ الأعظمي المطلق المرتكب في تقدير النسبة P هو:

$$e = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right| = \left| \pm 2.33 \sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{100}} \right|$$

$$\Rightarrow \boxed{e = 0.112}$$

Subject:

(3

$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$

$\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow Z_{0.995} = 2.57$

وحجم العينة n التي ينبغي دراستها هي:

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{2\varepsilon} \right)^2 \Rightarrow n \geq \left(\frac{2.37 \cdot \sqrt{(0.36)(0.64)}}{\varepsilon\ (0.04)} \right)^2$$

وبالتالي:

$n \geq 1036{,}0351$

أي أن حجم العينة يجب أن يكون: $n \geq 1037$

مجال الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين: $P_1 - P_2$

نُعطى مجال الثقة $P_1 - P_2$

بثقة $(1-\alpha)\,100\%$ بـ:

$$\left[(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}} \right.$$

$$\text{و} \quad \left. (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}} \right]$$

وذلك من أجل عينتين حجمهما n_1 و n_2 أكبر من 30

تمرين لمقارنة نسبة المدخنين في مدينتي دمشق وحلب أُخذت عينة من سكان دمشق حجمها 1000 شخص

ووجد من بينهم 700 مدخن وأخذت عينة من سكان حلب حجمها 600 شخص ووجد من بينهم 38 مدخن أوجد

92% مجال ثقة للفرق بين نسبتي المدخنين في المدينتين

الحل: نلاحظ أن:

$$\hat{P}_1 = \frac{Y_1}{n_1} = \frac{700}{1000} = 0.7$$

$$\hat{P}_2 = \frac{Y_2}{n_2} = \frac{438}{600} = 0.73$$

وبالتالي: $\hat{q}_1 = 0.30$ ، $\hat{q}_2 = 0.27$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 = 0.70 - 0.73 = -0.03$$

ويكون:

$$\sqrt{\frac{\hat{P}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2 \hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.70)(0.30)}{1000} + \frac{(0.73)(0.27)}{600}}$$

$$= 0.0232$$

$$1 - \alpha = 0.92 \Rightarrow \alpha = 0.08 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.96$$

$$\Rightarrow Z_{0.96} = 1.75$$

فيكون مجال الثقة لـ $P_1 - P_2$ هو:

$$\left[(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\hat{P}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2 \hat{q}_2}{n_2} \right) ; (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\hat{P}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2 \hat{q}_2}{n_2} \right] \right] = [0.03 - 1.75(0.0232) ; -0.03 + 1.75(0.0232)]$$

$$= [-0.075 ; 0.01]$$

وهذه النتيجة لا تدل على انه هناك فرق جوهري في نسبة المدخنين في المدينة بمستوى ثقة 92%

وذلك لأن طرفي مجال الثقة من اشارتين مختلفتين

Subject: المحاضرة 15

تمرين: أدعى باحث أن 10% من الأشخاص عراويون ولاختبار هذا الادعاء، اخترنا 400 شخص فوجدنا أن 48 منهم عراويون فهل يمكننا قبول هذا الادعاء عند مستوى ثقة 97% من الثقة؟

الحل: لنشكل 97% مجال ثقة للنسبة p نسبة الأشخاص العراويون

لدينا $n=400$ و $Y=48$

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{Y}{n} = \frac{48}{400} = 0.12$$

ولدينا: $1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015$

$\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985 \Rightarrow Z_{0.985} = 2.17$

فيكون مجال الثقة 97% لـ p:

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \,;\, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

$$\Rightarrow \left[0.12 - 2.17\sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{400}} \,;\, 0.12 + 2.17\sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{400}}\right]$$

$$= [0.085 \,;\, 0.155]$$

وبما أن النسبة المدعاة 10% تقع ضمن مجال الثقة 97% فيمكننا قبول ادعاء الباحث بمستوى ثقة 97%

تمرين: أخذت عينة:

$1.0 \,,\, 1.1 \,,\, 0.7 \,,\, 2.3 \,,\, 1.7$

من مجتمع طبيعي أوجد 99% مجال ثقة لتباين المجتمع σ^2 والانحراف المعياري σ

الحل: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$= \frac{1}{5}(1.7 + 2.3 + 0.7 + 1.1 + 1.0)$

$= \frac{6.8}{5} = 1.36$

$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{4}\left[(0.36)^2 + (0.26)^2 + (-0.66)^2 + (0.06)^2 + (0.34)^2\right]$

$\Rightarrow s^2 = 0.408$

ولدينا $1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$

$X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = X^2_{0.005}(4) = 0.207$

$X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = X^2_{0.995}(4) = 14.860$

فيكون مجال الثقة 99% لـ σ^2 :

$\left[\frac{(n-1)s^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} ; \frac{(n-1)s^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] = \left[\frac{(4)(0.408)}{14.860} ; \frac{(4)(0.408)}{0.207}\right]$

$= [0.11 ; 7.88]$

وبالتالي مجال الثقة 99% لـ σ :

$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} ; \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right] = \left[\sqrt{0.11} ; \sqrt{7.88}\right]$

$= [0.33 ; 2.81]$

مجال الثقة لتباين متغير عشوائي طبيعي وسيطاه مجهولان :

إذا كان $\bar{X}$ و S^2 متوسط وتباين عينة حجمها n لمتغير عشوائي طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ حيث μ و σ^2 مجهولان عندئذ يكون مجال ثقة $(1-\alpha)100\%$ لتباين المتغير العشوائي الطبيعي هو :

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \; , \; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$$

ومجال الثقة $(1-\alpha)100\%$ للانحراف المعياري σ هو :

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} \; , \; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} \right]$$

تمرين $\left[\frac{4}{247} \right.$ آلة لتعبئة زجاجات الحليب المبستر . أخذت عينة عشوائية تتضمن 36 زجاجة من انتاج هذه الآلة فكان متوسط وزن الحليب في الزجاجة هو 495 غراماً بانحراف معياري قدره 4 غرامات .

المطلوب :

أ] أوجد مجال ثقة 95% لمتوسط وزن الحليب μ الذي تفرغه الآلة في الزجاجة الواحدة .

ب] كم ينبغي أن يكون حجم العينة من الزجاجات الواجب أخذها بحيث لا يتجاوز الخطأ غراماً واحداً في تقدير المتوسط μ وبثقة 98% .

الحل: أ] لدينا $n = 36 \geq 30$ فيمكن وضع مجال ثقة تقريبي حسب مبرهنة النهاية المركزية ولدينا

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

فيكون مجال الثقة بـ 95% لـ μ.

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

وبما أن $n = 36 \geq 30$ فإن $\boxed{\sigma = S = 4}$

$$\Rightarrow \left[495 - (1.96)\frac{4}{6} \,;\, 495 + (1.96)\frac{4}{6}\right]$$

$$= [493.69 \,;\, 496.31]$$

ب] $1-\alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01$

$$\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.99} = 2.33$$

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma}{\varepsilon}\right)^2 \Rightarrow n \geq \left(\frac{(2.33)4}{1}\right)^2$$

$$\geq 9.32$$

ومنه ينبغي أن يكون حجم العينة $n \geq 10$

تمرين: إذا كانت كميات الإنتاج لشجيرات الزيتون تتوزع وفق التوزيع الطبيعي، قمنا بدراسة عينة عشوائية مؤلفة من 9 شجيرات زيتون فكان انتاجها مقيساً بالكيلوغرام كما يلي:

$50 ; 60 ; 81 ; 79 ; 55 ; 62 ; 68 ; 58 ; 72$

أ] أوجد 95% مجال ثقة لمتوسط انتاج شجرة الزيتون.

ب] أوجد 90% مجال الثقة للتباين كميات انتاج شجرة الزيتون.

الحل: لدينا $n = 9 < 30$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{9}[60+81+79+55+62+68+58+72+50]$$

$$= \frac{1}{9}[585] = 65 \text{ كغ}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\cdot\bar{X}^2\right] = \frac{959}{8} \simeq 120$$

$$\Rightarrow S \simeq 11$$

أ) $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(8) = 2.31$$

فيكون مجال ثقة 95% لـ μ :

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[65 - (2.31)\frac{11}{3} ; 65 + (2.31)\frac{11}{3}\right] = [56.53 ; 73.$$

ب) $1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$

$$\Rightarrow \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.95}(8) = 15.5$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.05}(8) = 2.73$$

فيكون مجال الثقة 90% للتباين:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

Subject: 7

$$= \left[\frac{(8)(120)}{15.5} ; \frac{(8)(120)}{2.73}\right] = [61.94 ; 351.63]$$

ويكون مجال الثقة 90% للانحراف المعياري σ :

$$\left[\sqrt{61.94} ; \sqrt{351.63}\right]$$

تمرين: أخذت عينة من 20 شخصاً وقيست أوزانهم فوجد ان انحرافها المعياري $\boxed{9}$ كغ فإذا كان للأوزان التوزيع الطبيعي

أوجد 95% مجال ثقة لتباين الأوزان في المجتمع.

الحل:

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = X^2_{0.025}(19) = 8.907$$

$$X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = X^2_{0.975}(19) = 38.582$$

فيكون مجال الثقة 95% لـ σ^2 هو:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} ; \frac{(n-1)S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] = \left[\frac{(19)(81)}{38.582} ; \frac{(19)(81)}{8.907}\right]$$

$=$

انتهى المقرر

بالتوفيق للجميع

زينة البني

Zeina Brown