23/5/2016 الاثنين — المحاضرة 15

(حل تمارين عن القياس)

تمرين [1]

إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءً قياساً

برهن أن:

1) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \; : \mu(A \Delta B) = 0$

$\Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$

3) إذا كانت $B \subseteq X$ وكان التابع:

$\mu_B : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

فبرهن أن μ_B يمثل قياساً على $\mathcal{A}$ معرفاً بالعلاقة:

$\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$

4) إذا كانت $A \subseteq R$ في فضاء بوريل حيث:

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + 4^{-n}, n + 2^{-n}]$

والمطلوب:

احسب قياس لوبيغ لـ A مع رسم المجالات عندما $n = 1, 2, 3$

تمرين [2]

إذا كان التابع f متزايداً (متناقصاً) على $[a, b]$ و g متزايد (متناقص) أيضاً على $[a, b]$

والمطلوب:

① برهن أن $f + g$ تابع متزايد

② وضح بمثال على أن $f \cdot g$ ليس بالضرورة أن يكون تابعاً متزايداً (متناقصاً) على $[a, b]$

③ وضح بمثال على أن $f.g$ ليس بالضرورة أن يكون تابعاً متزايداً على $[a,b]$
④ 〃 〃 〃 〃 f/g 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $[a,b]$

تمرين $\boxed{3}$

إذا كان لدينا التابع البسيط والممثل بالشكل:

$$g(x)=\begin{cases}2 & : 0\le x<1\\ 4 & : 1\le x<2\\ 8 & : 2\le x\le 3\end{cases}$$

① مثّل هذا التابع بدلالة الدالة الدرجية $X(x)$
② وإذا كانت $f(x)=x^2+1$ فأوجد تكامل استيلجس ثم استنتج

$$\int_0^2 f(x)\,dg(x) \longrightarrow \int_0^3 g(x)\,d f(x)$$

③ احسب تكامل لوبيغ:

$$\int_{[0,3]} g(x)\,d\mu$$

تمرين $\boxed{4}$

إذا كانت لدينا الدالة $f(x)=x-[x]$
والمطلوب

① ارسم هذه الدالة على $[0,4]$
② بين أن الدالة $f(x)$ د.ت.م على $[0,4]$
③ أوجد التغير الكلي للدالة f على $[0,1]$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f=?$$

④ استنتج قيمة التغير الكلي للدالة f على $[0,4]$

$$\overset{4}{\underset{0}{V}} f=?$$

حل التمارين

حل تمرين 4 :

$$[x] = \begin{cases} 0 & : 0 \le x < 1 \\ 1 & : 1 \le x < 2 \\ 2 & : 2 \le x < 3 \\ 3 & : 3 \le x < 4 \\ 4 & \quad x \end{cases}$$

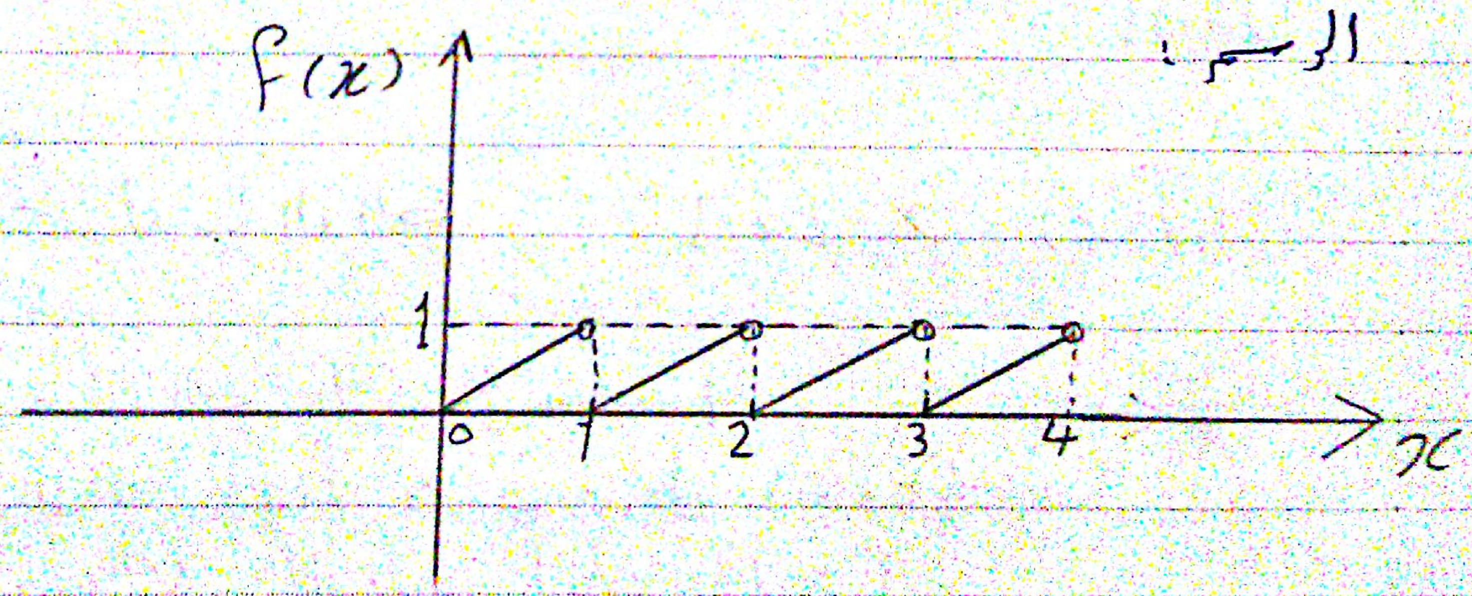
مثلاً لدي :

$$\left.\begin{aligned} [3.\overset{\text{فاصلة}}{4}] &= 3 \\ [3.2] &= 3 \end{aligned}\right\}$$

إن الحل : 1

$$f(x) = \begin{cases} x & : 0 \le x < 1 \\ x-1 & : 1 \le x < 2 \\ x-2 & : 2 \le x < 3 \\ x-3 & : 3 \le x < 4 \\ 0 & : x = 4 \end{cases}$$

الرسم :



2 إن x دالة متزايدة على المجال المغلق $[0, 4]$

$[x]$ دالة متزايدة على المجال $[0, 4]$

$f(x)$ هي فرق لدالتين متزايدتين فهي دالة ذات تغير محدود لأن الشرط ---

3 P تجزئة منتظمة لـ $[0,1]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{1}{n}$$

ومنه :

$$P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1\}$$

$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$, $x_2 = \frac{2}{n} \Rightarrow f(x_2) = \frac{2}{n}$

$x_1 = \frac{1}{n} \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{n}$

$\vdots$

, $x_{n-1} = \frac{n-1}{n} \Rightarrow f(x_{n-1}) = \frac{n-1}{n}$

$\vdots$

$x_n = 1 \Rightarrow f(x_n) = 0$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \left|\frac{1}{n} - 0\right| + \left|\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right| + \left|\frac{3}{n} - \frac{2}{n}\right| + \cdots + \left|0 - \frac{n-1}{n}\right|$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} = \frac{2n-2}{n}$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n-2}{n}\right) = 2$$

$$\overset{4}{\underset{0}{V}} f = 2(4) = 8$$

4 حسب 3

تمرين [1] طلب 3

$$\mu_B : \underset{}{\overset{\text{جبر تام}}{A}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$$

① $\mu_B(\phi) = 0 \qquad \forall A_i \in \mathcal{A} \; : i \in \mathbb{N}$

لازم تحقق شروط القياس

② $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \; : \; A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j$

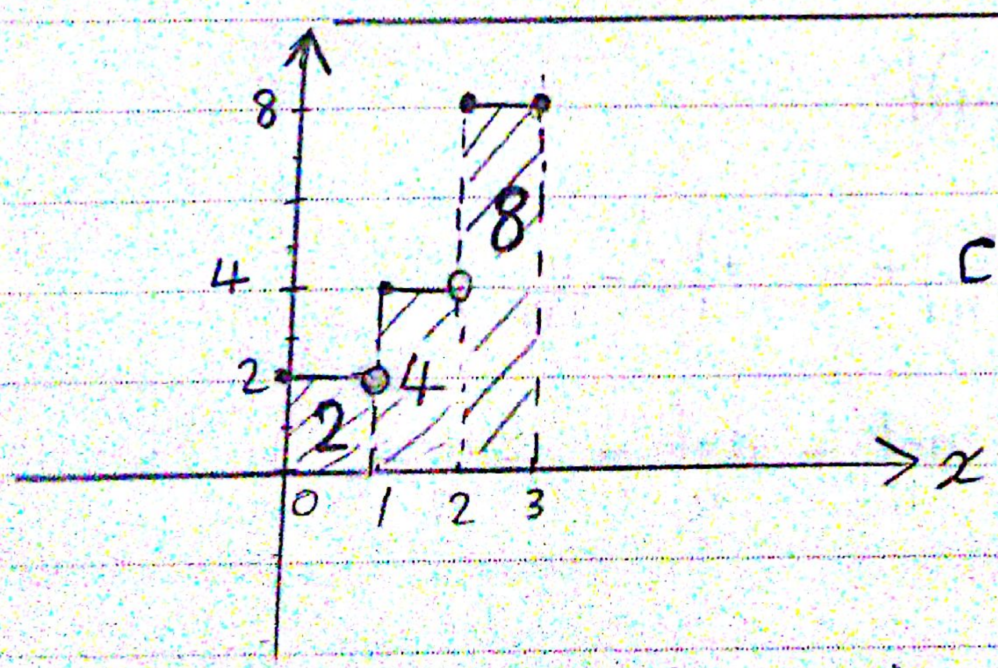
$$\mu_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i)$$

لنثبت ① و ②

$$\mu_B(\phi) = \mu(\phi \cap B) = \mu(\phi) = 0$$

$$\mu_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i)$$



حل التمرين 3

$c_1 = 1 \quad , \quad c_2 = 2$

$[0, 3]$

$$g(x) = 2\,\chi_{[0,1[} + 4\,\chi_{[1,2[} + 8\,\chi_{[2,3]}$$

$$\int_0^3 (x^2+1)\, d\, g(x) = f(c_1) \cdot \left[g(c_1+0) - g(c_1-0)\right]$$

$$+ f(c_2)\left[g(c_2+0) - g(c_2-0)\right]$$

$$= f(1)\cdot[g(1+0)-g(1-0)] + f(2)\cdot[g(2+0)-g(2-0)]$$

$$= (2)[4-2] + 5[8-4] = (2)(2) + 5(4) = 4 + 20 = 24$$

$$\underbrace{[(10)(8)-(1)(2)]-24}_{78-24=54} = \int_0^3 g(x)\,df(x) = [f(x)\cdot g(x)]_0^3 - 24$$

$f(3)=10$, $f(0)=1$, $g(0)=2$

$$[f(x)\cdot g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x)$$

$$f(x) = x^2+1$$

حساب تكامل لوبيغ :

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot\mu(A_i) = c_1\mu(A_1) + c_2\mu(A_2) + \dots + c_n\mu(A_n)$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X \quad , A_i \underset{i\neq j}{\cap} A_j = \Phi$$

(متناقصاً) c_i قيم التابع الوسيط

$$\int_{[0,3]} g\,d\mu = 2\mu([0,1]) + 4\mu([1,2[) + 8\mu([2,3])$$

$$= 2(1) + 4(1) + 8(1) = 14$$