المحاضرة الثالثة

الرياضيات عند الإغريق

أخذ اليونان عن المصريين الضرب والقسمة، وعن البابليين الجداول الحسابية والقسمة الستينية (أي إن المقسوم والمقسوم عليه والناتج جميعها تكتب بالأساس الستيني). لكن بالعموم لم يُعنَ اليونان القدماء بالعمليات الحسابية المعروفة من جمع وطرح وضرب وقسمة، لأن ذلك بالنسبة لهم أعمال صبية يتقنونها في الكتاتيب. في حين كانت آرائهم الهندسية تعتمد على خصائص الأعداد. ولأن نظام الأعداد عندهم يعتمد على الحروف فقد كانت عملياتهم الحسابية معقدة وطويلة. وكان شائعاً بين اليونانيين أن الإله هرميس Hermes هو من اخترع الحروف والأعداد.

وقد عثر علماء الآثار على بعض الألواح الخاصة بالعد والعدد التي استخدمت في عمليات الحساب، وكان أشهرها لوح منحوت من الرخام مخصص للعد يعود للقرن الرابع قبل الميلاد وهو محفوظ الآن في متحف أثينا. كما عثر علماء الآثار على مزهرية إغريقية عليها مشهد معبر وجميل يصور جامع ضرائب ومعه لوح حساب، وقام هذا الجابي بحساب الضرائب بدقة متناهية بالليرة اليونانية (الدراخما) وأجزائها.

- **طاليس:**

يُعد طاليس الملطي Thles الذي عاش بين سنتي (٦٢٤-٥٤٥ق.م)، أول الفلاسفة الطبيعيين عند الإغريق، وكان أحد الحكماء السبعة الملطيين، ويدَّعي هيرودوت "أبو التاريخ" أن طاليس من أصل فينيقي. على أية حال إن تعطشه البالغ للعلم والمعرفة دفعه نحو الرحيل إلى مصر حيث تعلم الرياضيات والفلك، وتعلم دورة الكسوف المتعاقبة، كما تعلم جملة من الحقائق الهندسية، وبذلك كان أول الرياضيين عند اليونان كما كان أول الفلكيين. مع ضرورة الانتباه إلى أن الفلك قد رافق الراضيات والجغرافيا زمنا طويلا.

- فيثاغورث:

كان فيثاغورث Pythagoras الذي عاش بين سنتي (٥٤٦-٤٩٧ق.م)، أشهر علماء الإغريق في الرياضيات، ارتبط اسمه بنظرية هندسية مشهورة هي أن مربع الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين. طبعا ليس فيثاغورث من وضع هذه النظرية، فقبله بقرون كان المهندسون المصريون يستخدمون نسبة ٣: ٤: ٥ في تعيين الزاوية القائمة في البناء. وكان البابليون قبله يتفننون في إيجاد ثلاثيات فيثاغورث، تكون في ما بينها مثلثات قائمة. وكما أسلفنا في المحاضرة السابقة أن فيثاغورث قد زار مصر في شبابه وقضى بها زمننا طويلا، وتعلم منها الكثير من أفكاره الرياضية. التي شكلت القاعدة الصلبة لتطور الرياضيات عند الإغريق مما وضعه الفكر الإغريقي عن الأعداد وأنواعها، من فردية، وزوجية، ومركبة، وناقصة، وزائدة، وتامة، ومتحابة، ومن متواليات عددية وهندسية وتأليفية وتشكيلية.

اكتسب فيثاغورث سمعةً طيبةً، حيث يصفه هيراقليطس بأنه على علمٍ غزير وحكمة قليلة، وعده هيرودوت أنه من أعظم فلاسفة الإغريق الأقدمين. في الواقع لم يكن فيثاغورث رياضياً وحسب رغم شهرته الفائقة في الرياضيات، بل كان عالم فلكٍ كذلك، وقد قال بكروية الأرض، وكانت تلك النظرية في عصره ثورةً حقيقةً، ولاسيما أن رأيه كان مدعماً بحجج وأدلة منطقية. والمحزن في الأمر أن فيثاغورث لم يترك وراءه كتابات، إلا أنه ما لبث أن صار شخصيةً أسطوريةً تنسب لها كافة الاكتشافات المتفقه مع مذهبه، لدرجه أنه ليس من المؤكد إن كانت هذه التعاليم أو النظريات في حقيقتها صادره عنه، فـ أرسطو يروي عنه قصصاً مسهبةً يبدو أنه هو نفسه غير متأكدٍ منها، لذلك كان يفضل استخدام مصطلح الفيثاغورثيين أو الرياضيين على وجه العموم.

إن ما نعرفه عن فيثاغورث أنه ولد في جزيرة ساموس ونشأ فيها، وعندما بلغ سن الشباب زار مصر وبابل، ثم عاد إلى جزيرته مشبعاً بطموحات وتطلعات عديدة، وكانت هذه الجزيرة تحكم من قبل أحد الطغاة، فخاف فيثاغورث على نفسه وهرب منها سنة ٥٣٠ق.م إلى كروتون، إحدى المدن اليونانية في جنوب إيطاليا. وهناك أنشأ مدرسة ثقافية انتسب لها أتباعه، وقد قسمهم إلى فئتين؛ فأما الأحداث المستجدون فكان عليهم حسن الاستماع والإصغاء، لا يسألون ولا يجادلون، فإذا هم تدربوا طويلاً وواظبوا واستوعبوا تعاليمه، انظموا إلى فئة (الماثماتيكاي) وكان هذا اللقب في البدء يعني المتعلمين

والعارفين، ثم أصبح يعني الرياضيين. إلا أن أهل كروتون ارتابوا منه، ثم اجبروه على مغادرة مدينتهم في سنة ٥٠٠ق.م، فرحل إلى مدينة ميتابنتوم وبقي هناك إلى أن توفي.

رأى فيثاغورث أن العدد يبدأ بالواحد (أو الوحدة) وبتجميع الوحدات بعضها بعض تزيد الأعداد. ورأى فيثاغورث أن المنظومة العددية، أو ما نسميه اليوم مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، نظام كامل متكامل، يمتد كما تمد الحياة البشرية إلى لا نهاية. ورأى أن دراسة هذا النظام ومعرفة أسراره قد تفضي إلى معرفة أسرار الحياة وسر هذا الكون العجيب. وأخذ فيثاغورث وأصحابه يدرسون الأعداد وخصائصها، فصنفوها فردية وزوجية، وميز فيثاغورث بين الأعداد الزوجية والفردية عن طريق تجارب حسابية مرتبطة بالحصى، فإذا أمكن قسمة الحصى إلى جزأين متساويين كان عددها زوجياً، وإذا لم يمكن فعددها فردي. كما ميز الفيثاغورثيون بين الأعداد الأولية والمركبة، وعرفوا الأعداد الزائدة (أو فوق التامة) وهي التي يزيد مجموع قواسمها عنها، فالعدد ١٢ مثلاً هو عدد فوق التام ١+٢+٣+٤+٦>١٢. وعرفوا الأعداد الناقصة (أو دون التامة) وهي الأعداد التي يقل مجموع أجزائها عنها، فالعدد ٨ دون التام وذلك لأن ١+٢+٤<٨، وعرف الفيثاغورثيون الأعداد المتحابة فالعددان متحابان إذا كان مجموع قواسم كل واحد يكون العدد الآخر، مثل ٢٤٨ و ٢٢٠ لأن ٢٤٨ يساوي مجموع قواسم العدد ٢٢٠ التي تقل عنه وهي١، ٢، ٥، ١٠، ١١، ٢٠، ٢٢، ٤٤، ٥٥، ١١٠. كما أن العدد ٢٢٠ يساوي قواسم العدد ٢٨٤ التي تقل عنه وهي ١، ٢، ٤، ٧١، ١٤٢. والتامة إلى غير ذلك من تصنيفات. ودرسوا المتوالية ١، ٢، ٣، .... والمتواليتين الفردية والزوجية والمتوالية الهندسية، والتأليفية،... واهتموا بالمتوالية الفردية التي تتركب منها متولية الأعداد المربعة، وكان اكتشافهم للسلم الموسيقي في مثل أوتار العود أروع انجازاتهم، وسموا كل واحد من الأوتار الأربعة الرئيسية بعدد يدل عليه، فجعلوها ٦، ٨، ٩، ١٢. لا بل إنهم ذهبوا إلى أبعد من ذلك حيث صرحوا أن لكل شيء عدداً يدل عليه، ووصل بهم الأمر للقول أن كل شيء هو عدد، فالسماء ما هي إلا توافق وعدد. وعندهم أن الأعداد التامة كروية ومستديرة، ولما كانت الأجرام السماوية مستديرة الشكل كما هو الحال بالنسبة للشمس والقمر فلا بد أن تكون الأرض كرة، ومن جهة أخرى فإن الدائرة هي خير الأشكال لكمال انتظام جميع أجزائها بالنسبة للمركز.

وأحب فيثاغورث وأصحابه العدد ١٠ لأنه يتكون من الأعداد الأربعة الطبيعية ١+٢+٣+٤، كما أنه حاصل على خصائصها جميعا، فالواحد هو نقطة والاثنان خط، والثلاثة مثلث، والأربعة هرم. وأحبوا العدد سبعة لأن عدد الكواكب مع الشمس والقمر سبعة. وأحبوا الخمسة لأنها رؤوس المخمس المنتظم، إن فيه أسرارا عظيمة فإذا مدت أضلاعه تولد منها مخمس جديد، وإذا مدت أضلاع هذا المخمس الجديد تكون مخمس ثالث، وهكذا دواليك، كما يتولد الابن من أبيه، والحفيد من الابن. هذه الخصائص العجيبة التي ينطوي عليها المخمس جعلتهم يتخذونه شارة يتعارفون بها.

في يوم شؤم منحوس تنبهوا إلى أن قطر المربع، ولم يكن له عدد صحيح يميزه، ولا حتى النسبة بين عددين صحيحين، إن طول القطر بلغة الرياضيات المعاصرة هو $\sqrt{٢}$، وهذا عدد غير نسبي ألحقه من بعد خلفوا الفيثاغورثيين بالأعداد الصم. وبالتالي فالمنظومة العددية التي ظنوا أنها كاملة، لم تكن كذلك، وبالتالي فالكون ليس أعدادا كما اعتقدوا، وشكّلَ هذا صدمةً نفسيةً كبيرةً لأتباع هذه المدرسة، ويقال أن أحدهم خرج ممتعضاً وأفشى بالسر فطردوه ثم قتلوه وادعوا أن موج البحر ابتلعه وأن الحوت أكله. وبعد أن هدأت مشاعر فيثاغورث وأصحابه تابعوا وعادوا للدراسة لكن دون أن ينظروا للأرقام نظرة تقديسٍ، وما أن مات فيثاغورث حتى مضى الرياضيون من أتباعه يطورون أبحاثهم.

- **إقليدس:**

عاش إقليدس Euclid في الإسكندرية حوالي سنة ٣٥٠ ق.م، وكان أعظم رياضي في عصره، ولعله أول من لقب بالرياضي، ومن أهم منجزاته كتاب وضعه في ثلاثة عشر جزءاً سماه العرب كتاب الأصول، وسماه الأوائل كتاب الاسطقسات أو الأصطقصات، وفي هذا الكتاب أخذ على عاتقه أن يعرض جميع الحقائق الرياضية التي تجمعت في عصره، سواء منها ما ابتكره الإغريق أو ما اكتشفوه، وما أخذوه عن المصريين والبابليين وسواهم، لكنه توخّى أن يظم كتابه الحقائق المثبتة بمنعزل عن غيرها، مما يثبت له بطلانها، أو يعجز عن إثبات صحتها. وقُدّر لإقليدس أن يبني لأول مرة في تاريخ العلم منهجاً منطقياً يسري على الرياضيات في جميع مراحلها. وللقيام بهذا العمل، رأى إقليدس متأثراً بفلسفة أرسطو أن لابد له من منطلقات أولية ليبني عليها كل المفاهيم، والمنطلقات الثابتة التي بدأ منها إقليدس هي (النقطة – والخط – والسطح). أما النقطة فقد تصورها شيئاً ليس له أبعاد: لا طول ولا عرض ولا عمق. وأما الخط فقد تصوره شيئاً ذا بعد واحد لا غير. وأما السطح فذو بعدين. وبدلالة هذه المفاهيم

الثلاثة عرف الصور والأشكال الهندسية المختلفة كالزاوية والمثلث والمربع والدائرة.... وهذه المفاهيم الثلاثة لا تكفي لإقامة منهاج برهاني استنتاجي. إنما ينبغي أن تسندها مجموعة من الأفكار تُعتبر حقائق مسلمة بلا برهان. ثم بدلالة هذه المفاهيم والمسلمات والبديهيات يبنى البرهان الرياضي.

وقد وضع إقليدس عشر بديهيات؛ خمسة عامة تسري على كل فروع الرياضيات والعلوم المنطقية، وخمسا تختص بالهندسة وحدها، أما الخمسة العامة فهي:

- الأشياء التي تساوي شيئا واحدا، أو تساوي أشياء متساوية، تكون متساوية.
- إذا أضيفت أشياء متساوية إلى أشياء متساوية كانت النواتج متساوية.
- إذا طرحت أشياء متساوية إلى أشياء متساوية كانت البواقي متساوية.
- الكل أكبر من كل جزء من أجزائه.
- الأشياء المتطابقة متساوية.

والخمس الخاصة بالهندسة:

- هناك خط واحد يصل بين أي نقطتين، والخط عنده هو الخط المستقيم.
- كل خط يمكن أي يمتد من إحدى طرفيه دون حد.
- يمكن رسم دائرة حول أي مركز مفروض بأي بعد مفروض.
- الزوايا القائمة متساوية.
- إذا قطع قاطع مستقيمين يلتقيان إذا مدا في الجهة التي يكون فيها مجموع الزاويتين الداخليتين المحصورتين بينهما وبين القاطع أقل من قائمتين.

على هذه المسلمات العشرة استطاع إقليدس أن يقيم كل المعارف الرياضية النظرية من هندسة وحساب وجبر، وعلى هذا النظام قام ما أضافته فيما بعد الهندسة الكروية والهندسة التحليلية وهندسة القطوع المخروطية، ونظرية التحليل، بل على هذا النظام قامت كل الرياضيات التقليدية، وقلد بلغ منهج إقليدس حداً من الكمال ما جعل كتابه يعيش أكثر من ألفي سنة وهو يعد أعظم كتاب علمي أنتجه العقل البشري، ولا شك أن إقليدس عندما قرر أن لا يضع في كتابه إلا ما يقوم عليه برهان استنتاجي؛ قد خلّص الرياضيات من شوائب كثيرة علقت بها بصيغة قواعد عملية تقريبية. وربما أنه استبعد من كتابه

حقائق لم يستطع أن يثبتها. فالمرجح أن بعض ما أثبته أرخميدس عن مساحة سطح الكرة كان معرفاً عند المصريين، وقد توفي إقليدس عندما كان أرخميدس لا يزال طفلا صغيرا.

عندما نلقي نظرة على المنجزات العلمية عند المصريين والبابليين سنرى أن هذه المنجزات كانت من الكثرة والأهمية إلى حدٍ يجعلنا أن نكون على يقين بأن الإغريق قد اقتبسوا عن غيرهم أكثر مما ابتكروا، والحق يقال أن ما وجدوه عند غيرهم كان ينقصه الترابط المنطقي الذي نجده في منهج إقليدس، حيث نجد نظرية تفضي إلى ثانية وهاتان النظريتان يفضيان إلى ثالثة فرابعة وهلمّ جرا.

ولم يكن إقليدس أول من وضع هذه المسلمات والمنطلقات، ولا أول من نحا هذا النحو، إن هذا المنحى رسمه الفكر الإغريقي، وإليه يعزى ما يسمى بالمعجزة الإغريقية. ومنذ القرن السادس قبل الميلاد كان فيثاغورث، رائد الرياضيات الإغريقية، يمضي في هذا الاتجاه، فكان معاصره بروتاغورياس يعيب عليه أنه يبني تصوره للكون على مفاهيم لا وجود لها. ومن الانتقادات التي وجهت لإقليدس تساؤلات متعددة؛ فأين النقطة التي لا أبعاد لها؟.. وأين الخط الذي يخلو إلا من بعد واحد؟ إن أيَ خط نرسمه أو نتخيله لا يخلو من عرض وسمك، وإن تقاطع أي خطين هو في الواقع ذو مساحة وحجم صغيرين.

إن إتقان إقليدس لتطبيق نظرية أرسطو هو الذي جعل كتابه يتبوأ في الفكر العلمي مكانةً لم يتبوأها كتاب غيره، ولكن رغم هذه المكانة ظلَّ الرياضيون على مَر العصور، يثيرون الاعتراضات على كتاب إقليدس. وقد انصب أكثر اعتراضاتهم على البديهية الخامسة التي تسمى بديهية التوازي. كما وجهت له انتقادات أخرى بأن منهجه ليس استنتاجياً بحتاً كما أريد له أن يكون؛ فهو يعتمد على النظر، ويبيح اللجوء إلى عمليات يدوية، وينطوي على التسليم بأوليات كثيرة. ورغم الدفاع القوي الذي قدمه ديكارت عن منهج إقليدس بأنه ليس في العالم من حقائق مطلقة إلا في رياضيات إقليدس، وصرَّحَ بأن رياضيات إقليدس هي وحدها من فروع العلم التي لا تعتمد على الحواس. وإنما تعتمد على الاستنتاج المنطقي المجرد.

في الواقع لم يكن كلام ديكارت دقيقاً تماماً لأن منهج إقليدس يعتمد على الحواس، ولاسيما البصر، فمن دون المشاهدة لن يكون بوسعنا ذلك. كما أن منطق إقليدس يبيح اللجوء إلى العمليات اليدوية، وينطوي على التسليم بأوليات كثيرة. والانتقاد الأكبر أنصب على البديهية الهندسية الخامسة، (إذا قطع قاطع مستقيمين يلتقيان، إذا مدا في الجهة التي يكون فيها مجموع الزاويتين الداخليتين

المحصورتين بينهما وبين القاطع أقل من قائمتين)، والتي تعرف في أوساط علماء الرياضيات باسم بديهية التوازي. وكان اعتراض الرياضيين عليها بأنها ليست كأخواتها حقيقة فطرية يقبلها العقل دون برهان. ويبدو أن إقليدس في أعماق نفسه كان يتحرج من تقبلها، فقد أقام بنيانه الرياضي على البديهيات الأربع الأولى، ولم يلجئ إلى البديهية الخامسة إلا بعد أن استنتج سبع وعشرين نظرية، واضطراره بعدها إلى الالتفات إلى توازي الخطوط.

لقد توارث الرياضيون الاعتراض على هذه البديهية، جيلاً بعد جيل. من إغريق وعرب وأوربيين. وكانت محاولاتهم تنصب على إقامة برهان عليها، باعتبارها نظرية لا بديهية. ولكن كل برهان مُقترح كان واضعه يفترض -من حيث يشعر أو لا يشعر- بديهية أخرى بديلة تعتبر بعرف المنطق مكافئة للبديهية الخامسة. وأشهر هذه البديهيات بديهية بلايفر Playfair: "إذا فرضنا مستقيم ونقطة فإن هناك مستقيم واحد يمكن رسمه ماراً في النقطة وموازيا للمستقيم المفروض".

وكذلك فعل ساكيري (١٦٦٧-١٧٣٣م) الذي اعتبر بديهية التوازي نظريةً لا بديهية وحاول أن يقيم عليها البرهان، ولكن النتيجة كانت بداية انطلاق تفكير جديد، الطريقة التي أراد أن يعتمدها ساكيري هي نقض الفرض (بمعنى اعتبارها خاطئة ومن ثم التوصل إلى تناقض يثبت بأنها صحيحة).

وقبل أن تتبلور فكرة تعديل منطقه وعرض الرياضيات بأساليب الرياضيات الحديثة، ذهب بعض الرياضيين إلى سد ما يلقونه في منطق إقليدس من ثغرات واحده بعد واحده. ومن أجل ثغرات كهذه أخذت هندسة إقليدس تفقد مكانتها بمقاييس المنطق الحديث.

ولا بد من الإشارة إلى أن عدداً من علماء الرياضيات العرب البارزين، فعلوا ما فعله جون واليس J. Wallis وبلايفر بعد عصر النهضة، عندما حاولوا أن يضعوا مكافئاً لنظرية التوازي، أو أن يبرهنوا عليها أو يصوغوها في حجج باطلة، وكان من أشهر المشتغلين في هذا الميدان ابن الهيثم، وعمر الخيام، والعباس بن سعيد الجوهري، وثابت بن قرة، ونصير الدين الطوسي، وشمس الدين السمرقندي.

- أرخميدس:

من سكان مدينة سيراكوزة عاصمة جزيرة صقلية، مات في سنة ٢١٢ ق.م. فبعد أن اجتاح القائد القرطاجي الشهير هانيبال، شبة جزيرة ايطاليا واستولى عليها، إلا عاصمتها روما، وقف حاكم سيراكوزة في صفه، وعندما مالت الكفة لصالح الرومان أرسلوا فرقةً عسكريةً إلى صقلية تمكنت من القضاء على جيشٍ قرطاجي بأكمله والاستيلاء على الجزيرة وعاصمتها، وسقط أرخميدس Archimedes دفاعاً عن مدينته في وجه جحافل الرومان.

يرجع الفضل إلى أرخميدس في معرفة الروافع، وتنسب إليه قوانينها، ومن مأثور كلامه؛ أنه إذا هيئ له مكان ما ليقف عليه خارج الأرض فإنه باستخدام رافعه ما سيتمكن من رفع الأرض عن مكانها. كما ينسب إلى أرخميدس قانون الوزن النوعي Specific Gravity. وإلى جانب تضلعه في الطبيعيات كان متضلعا في الرياضيات أيضا.

لا بل كان من أكثر العلماء الرياضيات تميزا، إذا أن جميع مؤلفاته العلمية الباقية حتى الآن، معروفةٌ عند العرب ومنها: كتاب الكرة والأسطوانة، وكتاب مساحة الدائرة، وكتاب توازن السطوح، وكتاب الاجسام الطافية، وكتاب المأخوذات في أصول الهندسة، وكتاب المفروضات. بالإضافة إلى هذه المصنفات نسب العرب إلى أرخميدس حوالي عشرة كتب ونقلوا نصوصها، وبعض هذه الكتب معروف لدينا أيضا من خلال مقتبسات قديمة. وتكمن الصعوبة في قبول مثل نسبة هذه المصنفات (مثل كتاب المثلثات، وكتاب الدوائر المتماسة... الخ) قد استعملها مرة بعد أخرى مؤلفون مختلفون، كما تكمن الصعوبة أيضا أن هناك نصوص منقولة بين الواحد والآخر من هذه الكتب، مما يجعل أمر تمحيصها والتوصل إلى نتيجة مؤكدة نسبيا بشأنها.

انتهت المحاضرة

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

الأستاذ الدكتور أحمد الخضر