ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بياناً بسيطاً وترابطاً ، $|V|=n$

وليكن $x \in V$ نظرف العقدة x هو أطول مسافة

$$e(x) = \max \{ d(x,y) \; ; \; y \in V \}$$

eccintricity Vert

القطر الداخلي Internal radus ingraph: هو أصغر تظرف

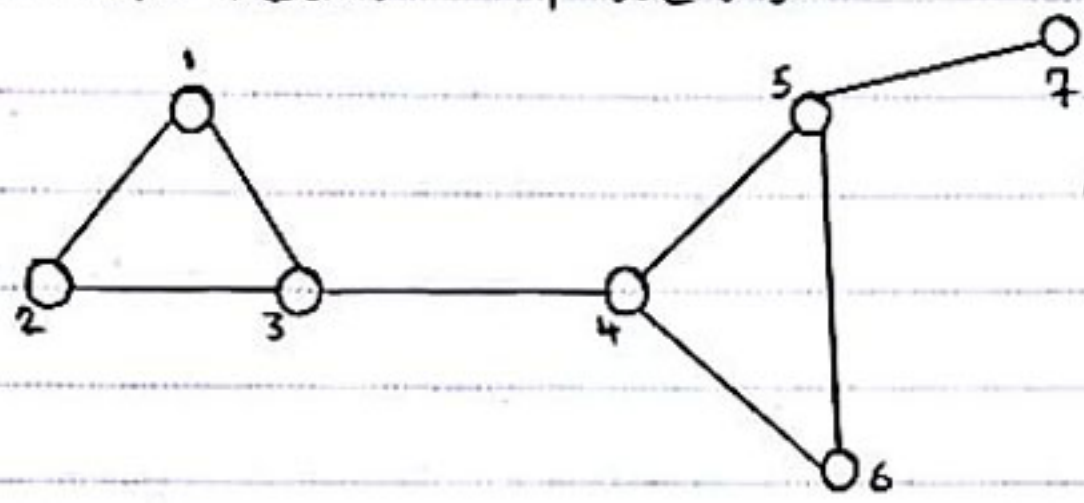
$$r = \min \{ e(x) \quad , \quad x \in V \}$$

القطر الخارجي external radus ingraph:

$$R = \max \{ e(x) \quad , \quad x \in V \}$$

مثال:

ليكن لدينا البيان التالي:



$e(1)=4 \; , \; e(2)=4 \; , \; e(3)=3 \; , \; e(4)=2$

$e(5)=3 \; , \; e(6)=3 \; , \; e(7)=4$

$R=4 \quad , \quad r_G=2$

"انظر الأمثلة من الكتاب"

العقدة المركزية /نواة البيان/ هي مجموعة العقد التي تحقق الشرط التالي

$$e(x) = r_G$$

مجموعات العقد التي تظرفها = القطر الداخلي للبيان تسمى النواة ،

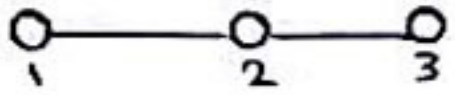
عقد مركزية .

/نتيجة/ كل شجرة تملك عقدة مركزية أو عقدتين مركزيتين على الأكثر .

البرهان: يتم بالاستقراء الرياضي.

مثال:

شجرة



$e(1)=2$, $e(2)=1$, $e(3)=2$

$r_G=1$

شجرة

$e(1)=3$, $e(2)=2$, $e(3)=2$, $e(4)=3$

$r_G=2$ عقدة مركزية (2,3)

$R=3$

العلاقة صحيحة من أجل $n=1$.

العلاقة صحيحة من أجل $n=2$.

نفرض أنّ العلاقة صحيحة من أجل $n=K$.

ونثبت صحتها من أجل $n=K+1$ وذلك من خلال حذف أوراق الشجرة المعطاة بشكل متتالي لحين الوصول إلى نواة البيان.

مثال (1)

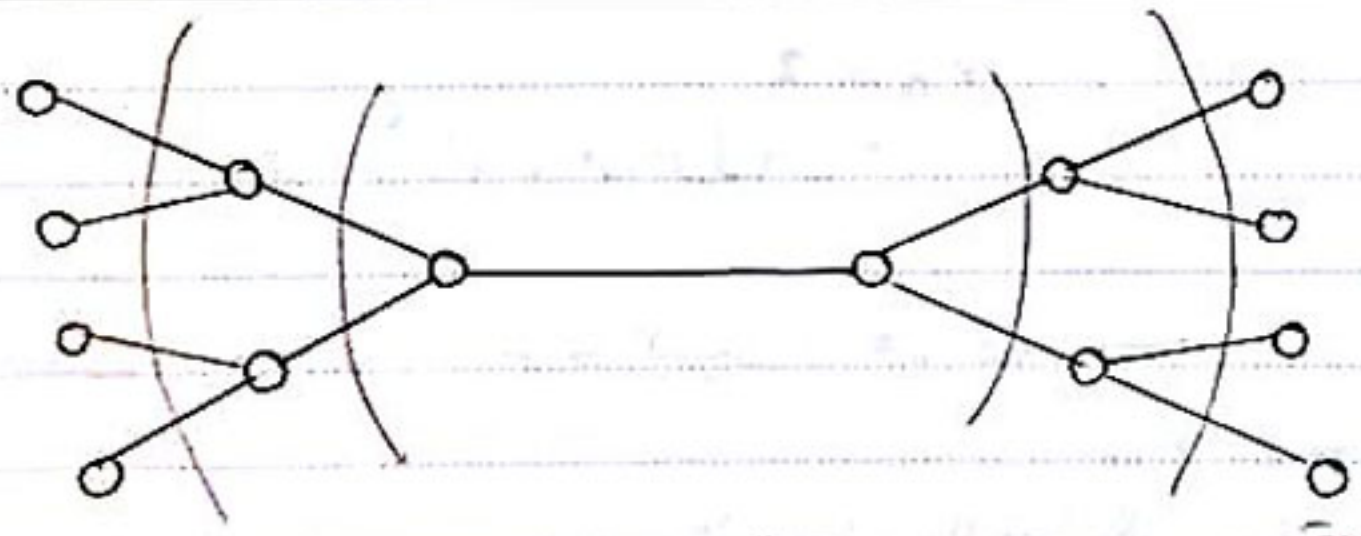
شجرة

نحذف

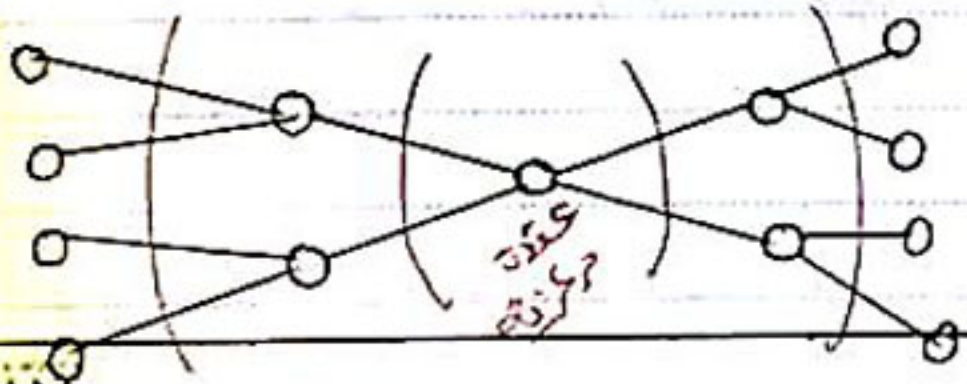
الأوراق

حتى نصل

على العقد المركزية



(2)



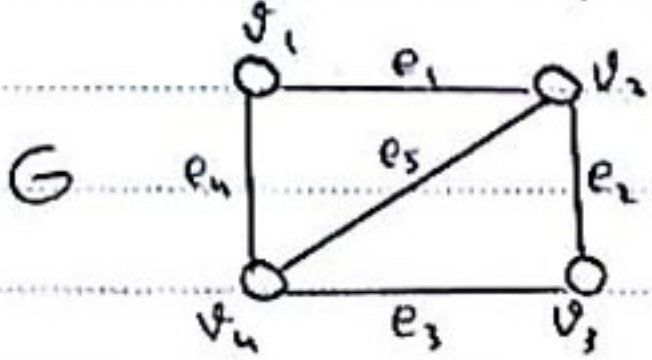
SHAM

مصفوفات البيان (مصفوفة الدوائر الأساسية ومصفوفات القطع الأساسية)

- مصفوفة الدوائر، نرمز لها بـ $C=(c_{ij})$ حيث

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & , e_{ij}\in E\\ 0 & , otherw\end{cases}$$

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:



مصفوفة الدوائر لهذا البيان G هي مصفوفة أسطرها دوائر وأعمدتها أضلاع.

لدينا ثلاث دوائر:

$$c_1=\langle e_1,e_5,e_4\rangle$$
$$c_2=\langle e_2,e_3,e_5\rangle$$
$$c_3=\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$$

$$\Rightarrow C_G=\begin{array}{c} \\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}_{(3,5)}$$

ملاحظة: الدائرة كدالة بسيطة

خصائص هذه المصفوفة:

- العمود الذي جميع عناصره أصفار يقابل ضلع لا ينتمي لأي دائرة.
- مجموع عناصر أي سطر من (يمثل) طول الدائرة.
- التبديل بين أي سطرين يعني التبديل بين ترقيم الدوائر.
- التبديل بين أي عمودين يعني التبديل بين ترقيم الأضلاع.

- جداء مصفوفة التأثير بمنقول مصفوفة الدوائر يساوي صفر على مصفوفة جميع عناصرها تقبل القسمة على 2 (بدون باقي).

$$B * C^T = 0 \bmod 2$$

مصفوفة التأثير

- جداء مصفوفة الدوائر بمنقول مصفوفة التأثير يساوي صفر على مصفوفة جميع عناصرها تقبل القسمة على 2.

$$C * B^T = 0 \bmod 2$$

- مثال السابق: مصفوفة التأثير هي علاقة بين الأضلاع والعقد.

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}_{(4,5)}$$

$$\Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow B * C^T =$ أوجدها "وفيه c"

مفهوم الدوائر الأساسية:

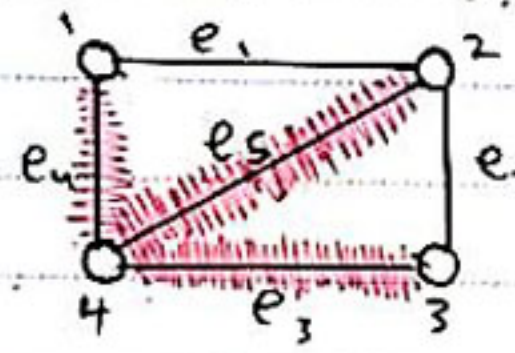
- الدائرة الأساسية البسيطة: هي دائرة تملك وتر واحد فقط وبقية الأضلاع هي أضلاع تنتمي للشجرة المتدودة على السيار

ومنه: مصفوفة الدوائر الأساسية: هي مصفوفة أسطرها الدوائر الأساسية وأعمدتها الأضلاع، نرمز لها بـ

$$C_{fG} = (c_{f_{ij}})$$

$$c_{f_{ij}} = \begin{cases} 1 & , e_{ij} \in C_f \\ 0 & , \text{otherw} \end{cases}$$

نطبق ذلك على المثال السابق بعد أخذ شجرة محددة على البيان.



لدينا دارتين أساسيتين

$$C_{f_1} = \langle e_2, e_3, e_5 \rangle$$

$$C_{f_2} = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$$

$$C_{fG} = \begin{matrix} \\ C_{f_1} \\ C_{f_2} \end{matrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- الشكل بين أعمدة مصفوفة الدوائر الأساسية وأسطرها يمكن تجزئة المصفوفة إلى جزئين: الجزء الأول هو مصفوفة الوحدة، الجزء الآخر هو مصفوفة الشجرة المحددة على البيان.
- رتبة مصفوفة الدوائر الأساسية هي

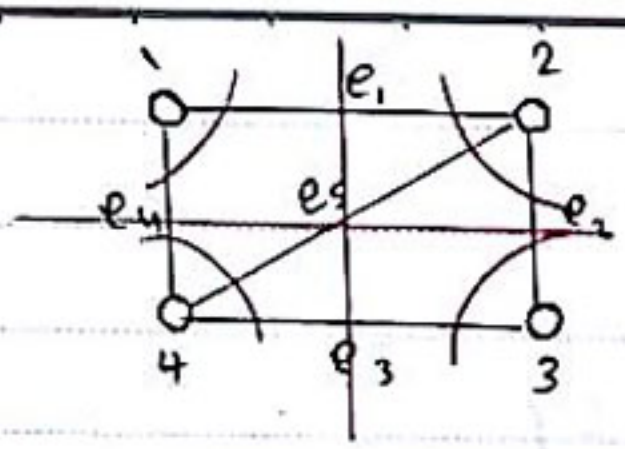
$$\text{rank}(C_{fG}) \leq m - n + 1$$

حيث $|V| = n$, $|E| = m$

خاصيات مجموعات القطع

- مجموعة القطع: هو أقل عدد من الأضلاع التي إذا حذفناها حصل على بيان غير مترابط.

مثال: لنوجد مجموعات القطع الممكنة لكل البيان التالي:



لزمر لهذا الـ Z

$Z_1 = \langle e_1, e_4 \rangle$

$Z_2 = \langle e_1, e_2, e_5 \rangle$

$Z_3 = \langle e_2, e_3 \rangle$

$Z_4 = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$

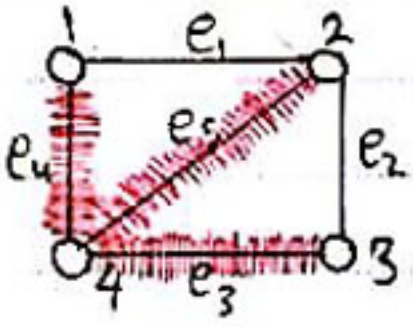
$Z_5 = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle$

$Z_6 = \langle e_2, e_4, e_5 \rangle$

وصفوفة مجموعات القطع هي وصفوفة أعمدتها مجموعات القطع وأعمدتها الأضلاع مرتبة لهذا الـ S_G

$$S_G = \begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مجموعات القطع الأساسية: هي أصغر عدد من الأضلاع إذا حذفناها حصل على بيان غير مترابط وهذه المجموعة تسمى مضلع حاصر من الشجرة المشددة.



مثال: نطبق على البيان من المثال السابق.

- أخذنا شجرة مشددة على البيان
- مجموعات القطع الأساسية:

$$Z_{f_1} = \langle e_1, e_4 \rangle$$
$$Z_{f_2} = \langle e_1, e_2, e_5 \rangle$$
$$Z_{f_3} = \langle e_2, e_3 \rangle$$

لدينا ثلاث مجموعات قطع فقط.

وهيئة مجموعة القطع الأساسية:

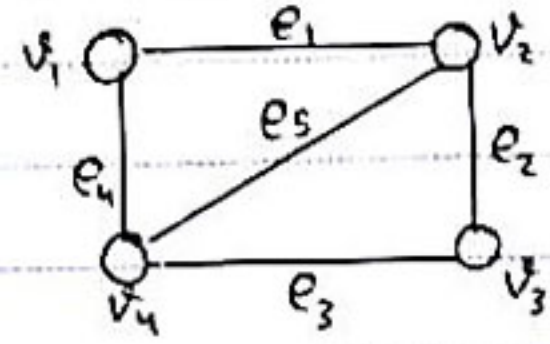
هي وهيئة أسطرها مجموعات القطع الأساسية وأعمدتها الأضلاع.

$$S_{fG} = \begin{array}{c} \\ Z_{f_1} \\ Z_{f_2} \\ Z_{f_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ملاحظة: بإجراء تبديلات بين أسطر وأعمدة وهيئة القطع الأساسية حصل على وهيئة مختلفة، الوهيئة الأولى هي وهيئة الوحدة، والثانية تمثل الأوتار بالنسبة للشجرة المحددة.

- وهيئة الممرات: هي وهيئة أسطرها ممرات وأعمدتها أضلاع.

مثال: أوجد وهيئة الممرات بين العقدتين v_1 و v_3 في البيان:



$$P_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$$
$$P_2 = \langle e_1, e_5, e_3 \rangle$$
$$P_3 = \langle e_4, e_3 \rangle$$
$$P_4 = \langle e_4, e_5, e_2 \rangle$$

وهيئة الممرات ستكون كالآتي: "نرمز لها" P_G "

$$P_G = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

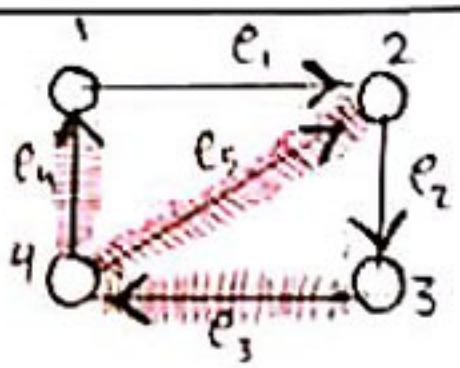
ملاحظة: يمكنه إيجاد مصفوفات الدوائر الأساسية و مصفوفات القطع و إيجاد مصفوفات مجموعات القطع الأساسية و مصفوفات مجموعات القطع في البيان الموجه على أن نعتبر الاتجاه الموجب هو عكس دوران عقارب الساعة و الاتجاه السالب مع عقارب الساعة ، فالقوس الذي جهته عكس عقارب الساعة نمثله بـ $\boxed{1+}$ و الذي يكون مع عقارب الساعة $\boxed{1-}$

- ملاحظة: يمكنه للمستخدم أن يحدد الاتجاه أيضاً وفق رغبته.

- مصفوفة المرات في البيان الموجه: أيضاً بنفس الطريقة مع الانتباه ، في المركبة الأقواس جميعها بنفس الاتجاه.

- نعرف أيضاً جميع الخواص التي تم تعريفها بالنسبة للدوائر في البيان غير الموجه في البيان الموجه.

مثال: لدينا البيان الموجه التالي:



$$\overrightarrow{C_{f_1}} = \langle e_1, e_5, e_4 \rangle$$
$$\overrightarrow{C_{f_2}} = \langle e_2, e_3, e_5 \rangle$$

$$\overrightarrow{C_{f_G}} = \begin{matrix} \overrightarrow{C_{f_1}} \\ \overrightarrow{C_{f_2}} \end{matrix} \begin{bmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & \vec{e_4} & \vec{e_5} \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

أعطِ بنفس الطريقة عكسية تطبيق ذلك على مجموعات القطع ومجموعات القطع الأساسية

- التشفير:

من أهم تطبيقات نظرية البيان وله تطبيقات مختلفة في مجال نقل المعلومات وتسمى أيضاً (الترميز) .

- التشفير في الواقع هو عبارة عن تطبيق مطلقه C (مجموعة محارف) ، ومستقره R .

$$f : C \longrightarrow R$$

$$C = \{ a, b, c, \dots \}$$

- كل عنصر من C سميناه حرف أو عنصر من عناصر اللغة .
- يجب أن تكون مجموعة عناصر اللغة هي مجموعة منتهية .
- الترتيب بين مجموعة أحرف من مجموعة عناصر اللغة يطلق على ما يسمى كلمة .
- لكل لغة قاعدة ترتيب للعناصر من خلالها نستطيع تحديد الكلمات التي تنتمي إلى اللغة .
- بعض اللغات لا تسمح بتكرار المحارف (اللغة العربية تسمح بتكرار الحرف مرتبط) .
- يوجد عدة أنواع للتشفير - ذات الطول الثابت (عندما يكون لدينا طول متبدل عندها نضيف محارف عشوائية) .
  - ذات الطول المتغير .
- لكل تشفير يوجد مفتاح .

- أهم تشفير في العالم هو تشفير "هوفمان"

1. نرتب العقد ترتيب تصاعدي وفق قيمها المعطاة بواسطة الدالة f .
2. نبدأ أسفل الشجرة بعمليات جمع أول عقدتين .
3. نعدل الشجرة وفق القيم الجديدة لـ f .

نكرر الخطوتين السابقتين حتى نصل إلى عقدة واحدة سميها الجذر، إن الشجرة التي حصلنا عليها هي شجرة ثنائية حيث نضع للفرع اليساري صفر 0 للفرع اليميني واحد 1

لكل شفرة وزنه ، ونمثل بيانيا عملية التشفير وفك التشفير وفق المثال التالي :

نلاحظ لدينا مجموعة المحارف

$$\Sigma = \{d, e, r, s, t\}$$

$$f: \Sigma \longrightarrow R$$

وفق مايلي:

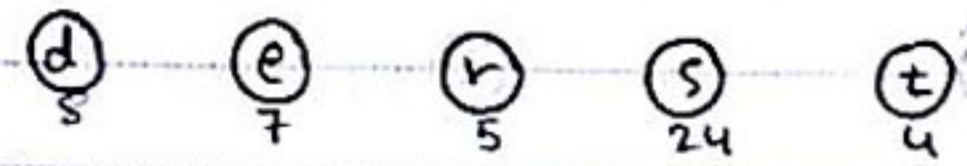
$f(d) = 8$, $f(e) = 7$, $f(r) = 5$,

$f(s) = 24$, $f(t) = 4$

المطلوب مايلي:

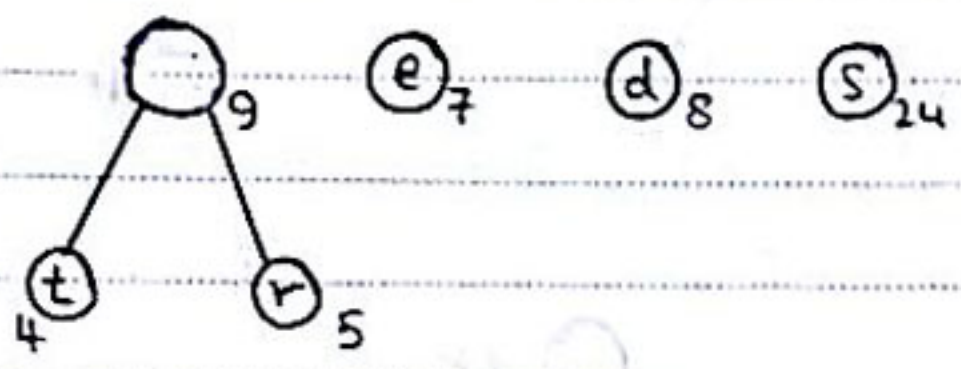
- أوجد شجرة هوفمان الثنائية ، ثم أوجد الشفرة للجملة Σ
- أوجد وزنه الشفرة
- شفر الرسالة التالية "desert"
- فك تشفير الرسالة الثنائية 00 1010 1000

الحل: إنشاء شجرة هوفمان.

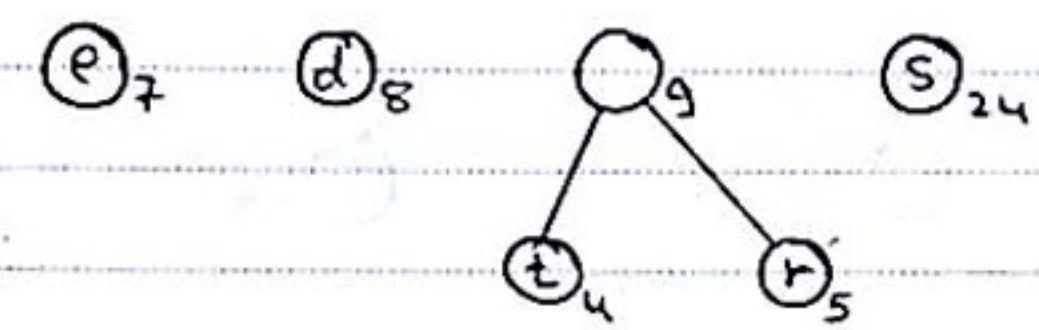


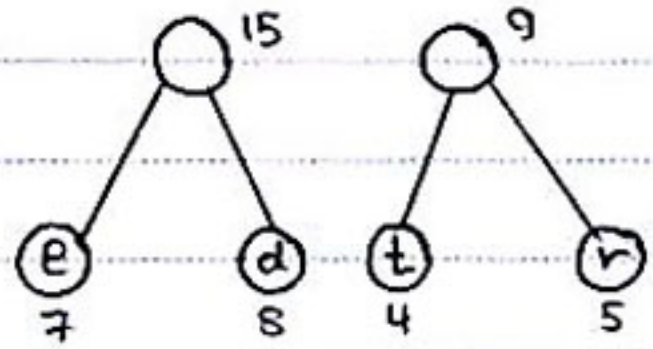
أعد ترتيبها ترتيب تصاعدي

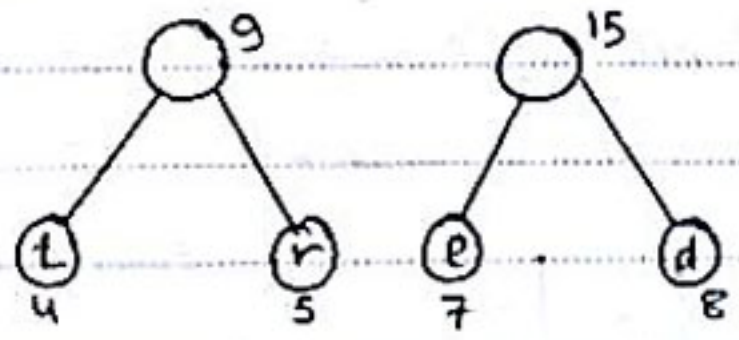
ضمها العقدتين
t, r

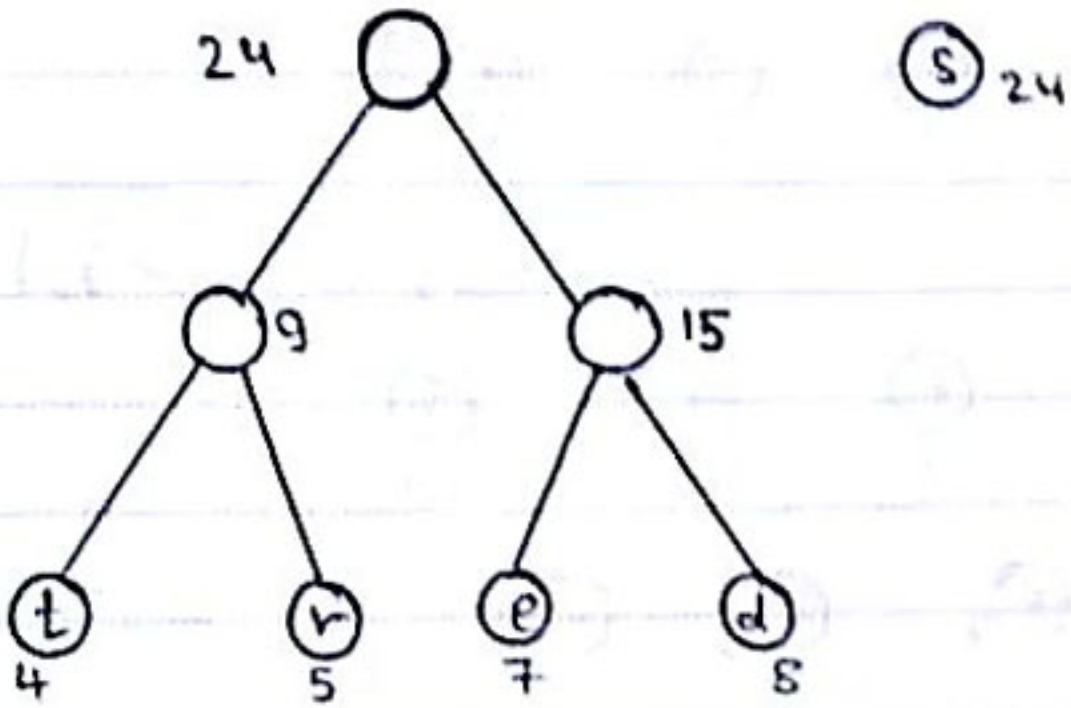


ترتيب تصاعدي

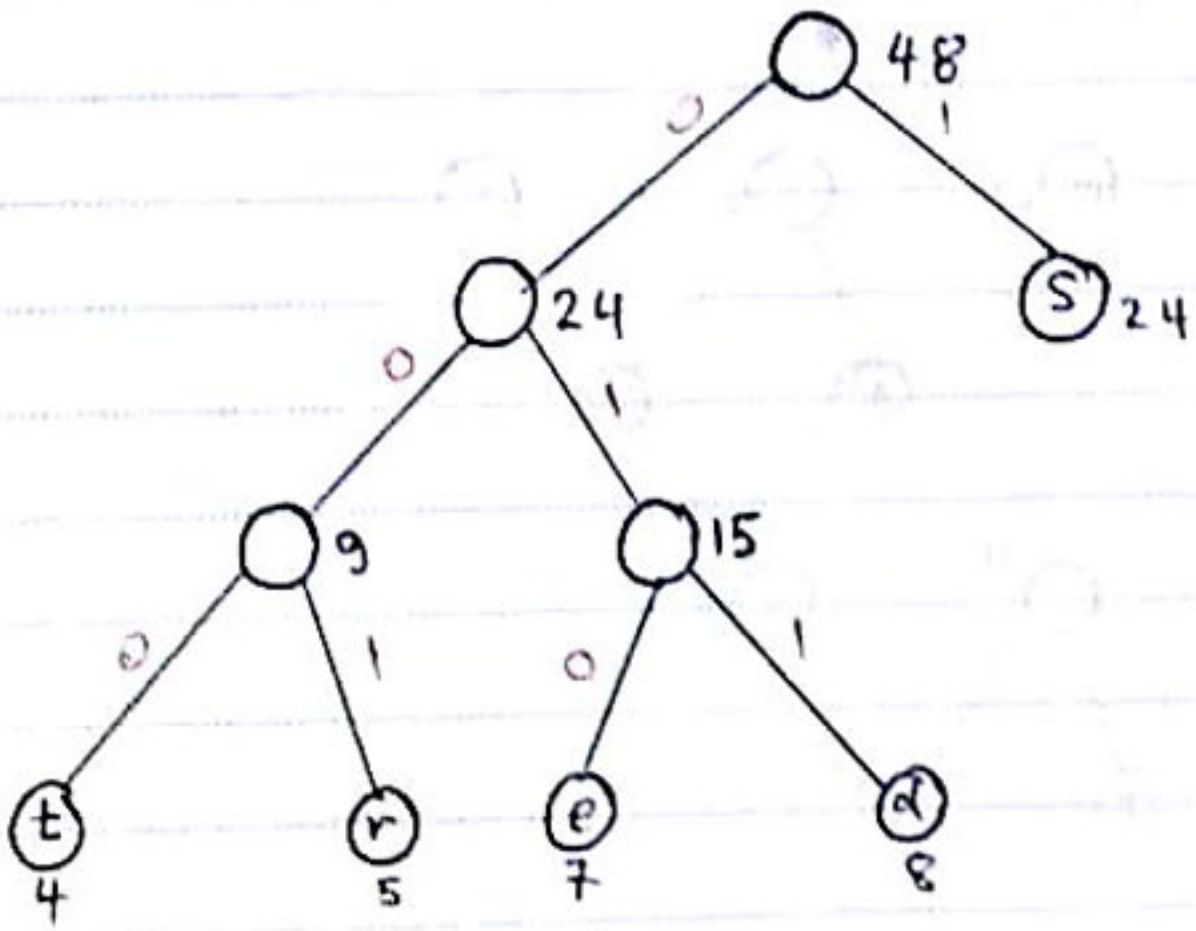








S 24



ملاحظة: إذا غيرنا الترتيب نحصل على تشفير جديد.

شجرة هوفمان ثنائية لكن بالضرورة أن تكون منتظمة (كل عقدة لها 0 أو 2 ابن)

X	t	r	e	d	S
Cod(x)	000	001	010	011	1

/ /

desert

الشفرة كلمة:

oll alo l alo ool ooo

لعلك الشفرة بداية السابع

oolololoooo

r e s t

وزنه الشفرة:

w = 3*4 + 3*5 + 3*7 + 3*8 + 1*24

= 12 + 15 + 21 + 24 + 24

= 96

وزنه الشفرة ناتج مجموع عدد الخانات * (ضرب) قيمة الدالة لكل حرف

ابتهاج

Razan