3- طرائق حل جمل المعادلات الخطية:

تتمحور الطرائق المستخدمة لحل جمل المعادلات الخطية في قسمين هما :

1. الطرائق المباشرة وسنعرض منها:

1.1. طريقة غاوس المحسنة

2.1. طريقة غاوس جوردان

3.1. تقنيات المرتكز وسندرس منها

1.3.1. تقنية المرتكز الجزئي

2.3.1. تقنية المرتكز الجزئي الدرجي.

4.1. طرائق LU و سندرس منها:

1.4.1. طريقة كروات

2.4.1. طريقة دوليتل.

3.4.1. طريقة تشوليسكي.

2. الطرائق التكرارية وسنعرض منها:

1.2. طريقة جاكوبي.

2.2.طريقة غاوس سيدل.

3.2.طريقة S.O.R.

سنفصل فيما يلي هذه الطرائق.

طريقة غاوس المحسنة

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $A X = b$ حيث $\det(A) \neq 0$ تقوم طريقة غاوس المحسنة لحل هذه الجملة (إيجاد X) على الخطوات التالية:

1) نوسع مصفوفة الأمثال A وذلك بإضافة عمود الثوابت إلى هذه المصفوفة بالشكل:

$$\tilde{A} = \left(\underbrace{A}_{I} \;\; \vdots \;\; \underbrace{b}_{II} \right)$$

حيث A مصفوفة الأمثال، b عمود الثوابت.

2) نحول الجزء I من المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ إلى مصفوفة مثلثيه عليا وذلك بجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية:

$$R_j \overrightarrow{\leftrightarrow} R_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i \quad ; \begin{cases} j = i+1,\ldots,n \\ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ a_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

وبذلك نكون قد حوّلنا المصفوفة الموسّعة لتصبح مكافئة لمصفوفة من الشكل:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & \vdots & a'_{1,n+1} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & \vdots & a'_{2,n+1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a'_{nn} & \vdots & a'_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

أي:

$$(A \mid b) \xrightarrow{Gauss} (U \mid C)$$

3) نحل الجملة الناتجة باستخدام طريقة التعويضات المتتالية التراجعية فنجد:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b'_{n,n+1}}{a'_{n,n}} \\ x_i = \dfrac{a'_{i,n+1} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j}{a'_{ii}} ; \begin{cases} k = n-1,\dots,1 \\ a'_{ii} \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

مثال(12):

حل جمل المعادلات الآتية باستخدام طريقة غاوس المعدّلة:

1-

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

3-

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

الحل:

1-

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & \vdots & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{matrix}$$

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 \to R_4 + 2R_3 \end{matrix}$$

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

فالجملة الناتجة:

$$2x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 2$$
$$x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = 2$$
$$2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \Rightarrow x_1 = -7$$

ومنه حل الجملة

$$X = (-7 \quad 3 \quad 2 \quad 2)^T$$

-2

الحل:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\Leftarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

وهذا مستحيل إذن الجملة مستحيلة الحل.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

-3

الحل:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 2 & 2 & 1 & : & 6 \\ 1 & 1 & 2 & : & 6 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1$$
$$R_3 \to R_3 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 0 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$x_3 = 2 \Leftarrow \begin{cases} -x_3 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

وعليه فإنّ $x_2 = 2 - x_1$ حيثُ x_1 اختياري إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مساوئ طريقة غاوس المعدّلة:

1) الكلفة الحسابية العالية لهذه الطريقة حيثُ تبلغ هذه الكلفة $n^3/3$ من أجل n كبيرة جداً .

2) لا يمكن تطبيقها بشكل مباشر عندما يكون أحد عناصر القطر الرئيسي صفر.

3) تعاني من حساسية عالية لأخطاء التدوير.

ملاحظة:

إذا كان أحد عناصر القطر الرئيسي مساوياً للصفر فإننا نقوم بإعادة ترتيب الأسطر بحيث نجعل جميع عناصر القطر الرئيسي غير مساوية للصفر وذلك قبل البدء بتطبيق غاوس المحسنة.

مثال(13):

حل جملة المعادلات الآتية بطريقة غاوس المحسنة

$$8x_2+2x_3=-7$$
$$3x_1+5x_2+3x_3=8$$
$$6x_1+2x_2+8x_3=26$$

الحل:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & \vdots & -7 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 8 \\ 6 & 2 & 8 & \vdots & 26 \end{pmatrix}$$

بما أنّ $a_{11}=0$ فإنّـه لا يمكن تطبيق غاوس المحسنة بشكل مباشر لـذلك نجـري التحويل $R_i \leftrightarrow R_j$ أي نبادل بين السطرين الأول والثاني وعليه فإننا نحصل على المصفوفة المكافئة.

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 8 & 2 & \vdots & -7 \\ 6 & 2 & 8 & \vdots & 26 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R3-2R_1$$

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 8 & 2 & \vdots & -7 \\ 0 & -8 & 4 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3+R_2$$

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 8 & 2 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 6 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

وبذلك تصبح الجملة بالشكل:

$$3x_1+5x_2+2x_3=8 \Rightarrow x_1=4$$
$$8x_2+2x_3=-7 \Rightarrow x_2=-1$$
$$6x_3=3 \Rightarrow x_3=0.5$$

أي إنّ حل الجملة هو

$$X=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}^T$$

3-1-2- طريقة غاوس جوردان:

بفرض أنه لدينا جملة المعادلات الخطية $AX=b$ حيث $\det(A)\neq 0$ تقوم طريقة غاوس جوردان لإيجاد حل هذه الجملة على الخطوات التالية:

1) توسيع مصفوفة الأمثال

$$\tilde{A}=\left(\underbrace{A}_{I}\ \vdots\ \underbrace{b}_{II}\right)$$

حيث A مصفوفة الأمثال، b عمود الثوابت.

2) نحول الجزء I من المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ إلى مصفوفة قطرية وذلك

- بجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية:

$$R_j \leftrightarrow R_j-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}R_i \quad ;\begin{cases} j=i+1,\dots,n\\ i=1,2,\dots,n-1\\ a_{ii}\neq 0\end{cases}$$

- بجعل العناصر التي فوق القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية:

$$R_j \leftrightarrow R_j-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}R_i \quad ;\begin{cases} j=1,\dots,i-1\\ j=1,2,\dots,i-1\\ a_{ii}\neq 0\end{cases}$$

أي:

$$(A\,|\,b)\xrightarrow{Gauss\ Jordan}(U\,|\,C)$$

3) نحل الجملة الناتجة.

مثال(14):

حل جملة المعادلات الآتية بطريقة غاوس جوردان

$$x - y + 4z = 16$$
$$3x + 2y + z = 18$$
$$x + 4y - 2z = 12$$

الحل:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & \vdots & 16 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 18 \\ 1 & 4 & -2 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

ومنه:

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & \vdots & 16 \\ 0 & 5 & -11 & \vdots & -30 \\ 0 & 5 & -6 & \vdots & -4 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & \vdots & 16 \\ 0 & 5 & -11 & \vdots & -30 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 26 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 \to R_2 + \frac{11}{5}R_3 \\ R_1 \to R_1 - \frac{4}{5}R_3 \end{matrix}$$

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & -4.8 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 27.2 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 26 \end{pmatrix} \qquad R_1 \to R_1 + \frac{1}{5}R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0.64 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 27.2 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 26 \end{pmatrix}$$

وبذلك نحصل على الجملة

$$x = 0.64$$
$$5y = 27.5 \Rightarrow y = 5.44$$
$$5z = 26 \Rightarrow z = 5.2$$

مساوئ طريقة غاوس جوردان:

أبرز مساوئ هذه الطريقة الكلفة الحسابية العالية جداً والتي لا يبررها إلا كون هذه الطريقة تساعدنا وبشكل كبير جداً على إيجاد معكوس مصفوفة غير شاذة.

3-1-3- تقنيات المرتكز Pivoting Strategies:

تُدعى العناصر $\{a_{ii}\}_{1\le i\le n}$ في مصفوفة موسعة $\tilde{A}$ موافقة لجملة معادلات خطية بالعناصر الرائدة (Pivots).

إذا كان أحد العناصر الرائدة على الأقل صغيراً نسبياً بالنسبة لعناصر عموده فإنّ طريقة غاوس المعدلة تفشل الأمر الذي يمكن توضيحه من خلال المثال التالي:

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} E_1 : 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2 : 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \end{cases} \tag{16}$$

من الواضح أنّ حل هذه الجملة وفق الطرائق المباشرة هو $x_1 = 10, x_2 = 1$.

سنقوم فيما يلي بحل هذه الجملة باستخدام طريقة غاوس مع ملاحظة أنّ العنصر الرائد في العمود الأول 0.003 صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده.

إنّ المصفوفة الموسعة الموافقة للجملة السابقة هي

$$R_2 \to R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & \vdots & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \end{pmatrix} \qquad m = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.6\bar{6} \approx 1764$$

ومنه:

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & \vdots & 59.17 \\ 0 & -104300 & \vdots & -104400 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$0.003x_1 + 59.14x_2 \approx 59.17$$
$$-104300x_2 \approx -104400 \Rightarrow x_2 \approx 1.001$$

ومنهُ

$$x_1 \approx \frac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003} = -10$$

يُمكننا بسهولة ملاحظة أنّ القيمة التقريبية لـ x_2 قريبة من القيمة الفعلية لـ x_2 بينما

قيمة x_1 التقريبية بعيدة جداً عن قيمة x_1 الفعلية وذلك لأنّ العنصر الرائد a_{11} صغير نسبياً بالنسبة إلى a_{21}

مما يعني أنّ طريقة غاوس المعدلة تفشل.

وللتخلص من هذه المشكلة(الفشل الناتج عن كون أحد العناصر الرائدة صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده) يتم تطبيق

3-1-3-1- تقنيات المرتكز الجزئي Partial Pivoting:

والتي تقوم على تطبيق الخطوات التالية على كل عمود يكون عنصره الرائد صغيراً نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده

1) نختار أكبر عنصر(بالقيمة المطلقة) من العناصر الواقعة تحت العنصر الرائد لمصفوفة موسعة موافقة لجملة معادلات الخطية أي:

$$|a_{ik}| = \max_{k \le j \le n} |a_{jk}|$$

حيث k رقم سطر العنصر الرائد، n عدد أسطر المصفوفة الموسعة.

2) نبدل السطر (i) والسطر (k) أي $R_i \leftrightarrow R_k$.

سنقوم فيما يلي بتطبيق تقنية المرتكز الجزئي لحل جملة المعادلات الخطية السابقة (16).

وجدنا أنّ المصفوفة الموسعة الموافقة للجملة السابقة هي:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & \vdots & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \end{pmatrix}$$

ولاحظنا أنّ العنصر الرائد في العمود الأول $a_{11} = 0.003$ صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده وعليه

$$\max\{|a_{11}|, |a_{21}|\} = \max\{|0.003|, |5.291|\} = |5.291| = |a_{21}|$$

وعليه

$$R_2 \leftrightarrow R_1$$

وبذلك تصبح المصفوفة الموسعة بالشكل:

$$A' = \begin{pmatrix} 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & \vdots & 59.17 \end{pmatrix}$$

لنطبق الآن طريقة غاوس المعدلة

$$R_2 \to R_2 - \frac{a'_{21}}{a'_{11}} R_1$$

$$\frac{a'_{21}}{a'_{11}} = \frac{0.003}{5.291} = 0.000567$$

وعليه:

$$\begin{pmatrix} 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \\ 0 & 59.14 & \vdots & 59.14 \end{pmatrix}$$

بالمتابعة نجد أنّ الحل التقريبي

$$(x_1 = 10 , x_2 = 1)$$

الأمر الذي يعني أنّ تقنية المرتكز الجزئي قد ساعدتنا في تحسين طريقة غاوس المعدلة وذلك في حال كان أحد العناصر الرائدة صغيراً نسبياً بالنسبة لبقية العناصر. أمّا الآن فإننا سنستعرض تقنية أخرى من تقنيات المرتكز الجزئي لتحسين غاوس المعدلة وهي تقنية

2-3-1-3- تقنيات المرتكز الجزئي الدرجي Scaled Partial Pivoting:

بفرض أنه لدينا جملة المعادلات الخطية

$$AX = b$$

تُدعى $\tilde{A} = (A \mid b)$ المصفوفة الموسعة الموافقة لهذه الجملة التي عدد أسطرها n.

تقوم تقنية المرتكز الجزئي الدرجي على تطبيق الخطوات التالية وذلك من أجل $j = 1,2,\ldots,n-1$:

1) نوجد المجموعة

أكبر عنصر في كل سطر بالقيمة المطلقة

$$\left\{S_i\ ;S_i=\max_{j\le k\le n}\left\{\left|a_{ik}\right|\right\}\right\}_{j\le i\le n}$$

2) نوجد

$$\max_{j\le i\le n}\left\{\frac{\left|a_{ij}\right|}{S_i}\right\}$$

العمود الأول نقسمه على S_1
ثم العمود الثاني على S_2
ثم نقارن بينهم نختار العنصر القائد الذي يكون من أجله المقدار أكبر ما يكون

ومنه

$$\exists\omega\in Z^{+}\quad ;\max_{j\le i\le n}\left\{\frac{\left|a_{ij}\right|}{S_i}\right\}=\frac{\left|a_{\omega j}\right|}{S_\omega}$$

3) نجري التحويل

$$R_j\leftrightarrow R_\omega$$

4) نطبق طريقة غاوس المعدلة على المصفوفة الناتجة عن التحويل.

مثال(15):

حل جملة المعادلات التالية باستخدام طريقة غاوس المعدلة وتقنية المرتكز الجزئي:

$$3x_1-4x_2+5x_3=-1$$
$$-3x_1+2x_2+x_3=1$$
$$6x_1+8x_2-x_3=35$$

الحل

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3&-4&5&\vdots&-1\\-3&2&1&\vdots&1\\6&8&-1&\vdots&35\end{pmatrix}$$

الخطوة الأولى (من أجل $j=1$): العمود الأول

نوجد المجموعة

$$\left\{S_i \; ; S_i = \max_{1\le k\le 3}\left\{|a_{ik}|\right\}\right\}_{1\le i\le 3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\max\limits_{1\le k\le 3}\left\{|a_{1k}|\right\}=5\\ \max\limits_{1\le k\le 3}\left\{|a_{2k}|\right\}=3\\ \max\limits_{1\le k\le 3}\left\{|a_{3k}|\right\}=8\end{array}\right\}\Rightarrow\{5,3,8\}$$

نوجد

$$\max_{j\le i\le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}$$

بدايةً نوجد المجموعة

$$\left\{\frac{|a_{i1}|}{S_i}\right\}_{1\le i\le 3}$$

نتيجة إلى كاسور الثوابت تتقيد بتقيد الأسطر

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{|a_{11}|}{S_1}=\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{|a_{21}|}{S_2}=\dfrac{3}{3}=1\\ \dfrac{|a_{31}|}{S_3}=\dfrac{6}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\frac{3}{5},1,\frac{6}{8}\right\}$$

نوجد الآن العنصر الأعظمي للمجموعة الأخيرة

$$\max\left\{\frac{3}{5},1,\frac{6}{8}\right\}=1$$

نجري التحويل $R_1 \leftrightarrow R_2$ وعليه تصبح المصفوفة $\tilde{A}$ بالشكل:

$$\tilde{A}^{*}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1 & \vdots & 1\\ 3 & -4 & 5 & \vdots & -1\\ 6 & 8 & -1 & \vdots & 35\end{pmatrix}$$

نطبق غاوس المعدلة على المصفوفة الأخيرة فنجد

بإجراء التحويلين

$R_2 \rightarrow R_2 + R_1$

$R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1$

$$\tilde{A}^* \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & +6 & \vdots & 0 \\ 0 & 12 & 1 & \vdots & 37 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثانية(من أجل $j = 2$):

العمود الثاني

نوجد المجموعة

$$\left\{S'_i \,; S'_i = \max_{2\le k\le 3}\left\{\left|a^*_{ik}\right|\right\}\right\}_{2\le i\le 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{2\le k\le 3}\left\{\left|a^*_{2k}\right|\right\} = 6 \\ \max\limits_{2\le k\le 3}\left\{\left|a^*_{3k}\right|\right\} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \{6,12\}$$

نوجد

$$\max_{2\le i\le n}\left\{\frac{\left|a^*_{ij}\right|}{S_i}\right\}_{2\le i\le 3}$$

بدايةً نوجد المجموعة

$$\left\{\frac{\left|a^*_{i2}\right|}{S'_i}\right\}_{2\le i<3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\left|a^*_{22}\right|}{S'_2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\left|a^*_{32}\right|}{S'_3} = \dfrac{12}{12} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$$

نوجد الآن العنصر الأعظمي للمجموعة الأخيرة

$$\max\left\{\frac{1}{3}, 1\right\} = 1 = \frac{\left|a^*_{31}\right|}{S'_3}$$

نجري التحويل $R_2 \leftrightarrow R_3$ وعليه تصبح المصفوفة $\tilde{A}^*$ بالشكل:

نجري التحويل : $R_3 \to R_3 + \frac{1}{6} R_2$

فتنتج المصفوفة:

$$\frac{37}{6} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 12 & 1 & : & 37 \\ 0 & -3 & 6 & : & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{37}{6}$$

نطبق غاوس المعدلة على المصفوفة الأخيرة فنحصل على الجملة

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$12x_2 + x_3 = 37$$

$$\frac{37}{6} x_3 = \frac{37}{6}$$

بتطبيق طريقة التعويضات التراجعية على الجملة الأخيرة نجد

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 1$$

وعليه:

$$X = (2 \quad 3 \quad 1)^T$$

مثال:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$3x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 3$$
$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 10$$

لحل هذه الجملة بطريقة المرتكز الجزئي الدرجي نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: $s_1 = 2$ ، $s_2 = 4$ ، $s_3 = 10$

s_1: أكبر عدد من المعادلة الأولى دون الأمثال

s_2: أكبر عدد من المعادلة الثانية دون الأمثال

s_3: أكبر عدد من المعادلة الثالثة دون أمثال

الخطوة الثانية: $\left|\frac{a_{11}}{s_1}\right| = \frac{1}{2}$ ، $\left|\frac{a_{21}}{s_2}\right| = \frac{3}{4}$ ، $\left|\frac{a_{31}}{s_3}\right| = \frac{2}{10}$

إن $\left|\frac{a_{21}}{s_2}\right| = \frac{3}{4}$ هي الأكبر لذا نبدل بين السطر الأول والثاني

$$3x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 10$$

الآن نطبق طريقة غاوس: حيث نقوم بحذف الـ x_1 من السطر الثاني والثالث ا

$$3x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 3$$

4) $\cancel{\frac{2}{3}}\, 0x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 = 2$

5) $0x_1 + \frac{22}{3}x_2 + 4x_3 = 8$

الخطوة الرابعة :

$$\left|\frac{a_{12}}{s_1}\right| = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{a_{32}}{s_3}\right| = \frac{\frac{22}{3}}{10} = \frac{22}{30} \Rightarrow$$

وهي الأكبر من $\frac{1}{3}$

يمكن الحل باختيار s جديدة وتطبيق ما سبق نجد أنه أصل a_{12} و a_{23} ونصل إلى نفس النتيجة بتبديل بين 4) و 5)

الخطوة الخامسة :

$$3x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 3$$
$$\frac{22}{3}x_2 + 4x_3 = 8$$

$$\frac{2}{3}x_2 + x_3 = 2$$

تطبيق غاوس :

$$3x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 3$$
$$\frac{22}{3}x_2 + 4x_3 = 8$$
$$\frac{7}{11}x_3 = \frac{14}{11}$$

نجد : $x_1 = 1$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 2$

طريقة جاكوبي :

$$5x_1-2x_2+3x_3=2$$
$$-3x_1+9x_2+x_3=2$$
$$2x_1-x_2-7x_3=3$$

الخطوة الاولى :

$$5x_1-2x_2+3x_3=-2$$
$$-3x_1+9x_2+x_3=-2$$
$$2x_1-x_2-7x_3=3$$

الخطوة الثانية :

نقسم على الامثال مع الترتيب :

$$x_1^{(n+1)} = \frac{-2}{5} + 0x_1^{(n)} + \frac{2}{5}x_2^{(n)} - 3x_3^{(n)}$$

$$x_2^{(n+1)} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9}x_1^{(n)} + 0x_2^{(n)} - \frac{1}{9}x_3^{(n)}$$

$$x_3^{(n+1)} = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(n)} - \frac{1}{7}x_2^{(n)} + 0x_3^{(n)}$$

((عناصر قطر الرئيسي للمصفوفة ليست موجودة))

الخطوة الثالثة : علماً أن نقطة البدء (٠ ، ٠ ، ٠)

نعوض :

$$x_1^{(1)} = -\frac{2}{5} \qquad x_3^{(1)} = -\frac{3}{7}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{2}{9}$$

الخطوة الرابعة :

$$x_1^{(2)} = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{2}{9}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{-3}{7}\right) = \ldots$$

$$x_2^{(2)} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9}\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{3}{7}\right) = \ldots$$

$$x_3^{(2)} = \frac{-3}{7} + \frac{2}{7}\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{2}{9}\right) = ..$$

طريقة غاوس سيدل : الخطوة الاولى هي نفسها تبع جاكوبي

الخطوة الثانية

$$x_1^{(n+1)} = -\frac{2}{3} + 0x_1^{(n)} + \frac{2}{5}x_2^{(n)} - \frac{3}{5}x_3^{(n)}$$

$$x_2^{(n+1)} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9}x_1^{(n+1)} + 0x_2^{(n)} + \frac{-1}{9}x_3^{(n)}$$

$$x_3^{(n+1)} = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(n+1)} - \frac{1}{7}x_2^{(n+1)}$$

الخطوة الثالثة : علماً أن نقطة البدء (0,0,0)

$$x_1^{1} = \frac{-2}{5} \quad ,$$

$$x_2^{1} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9}\left(\frac{-2}{5}\right) - \frac{1}{9}(0) = (\ldots)$$

$$x_3^{1} = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{1}{7}(\ldots) = \ldots$$

ونكمل