الرياضيات

التحليل (5)

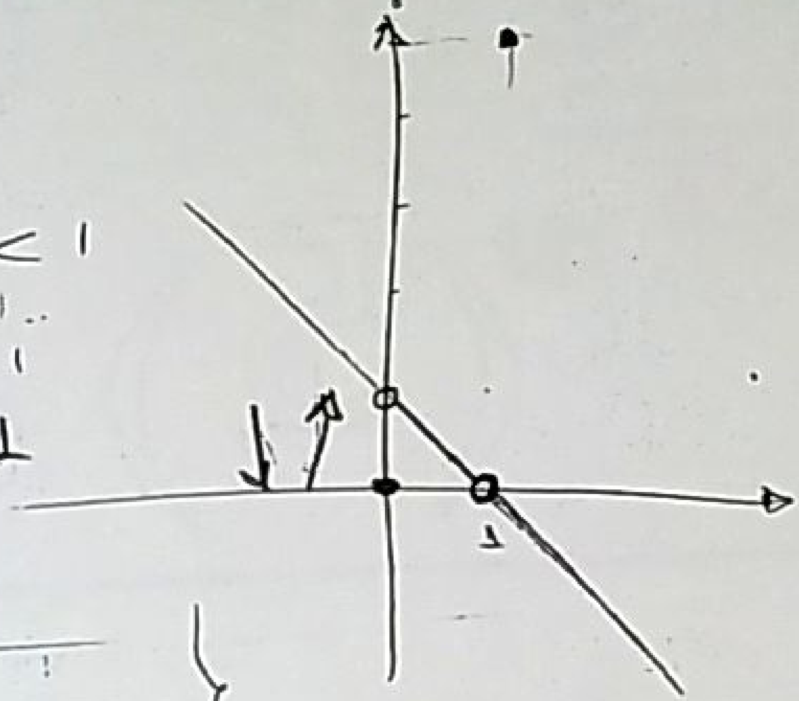
تمارين محلولة وغير محلولة

السنة الثالثة

د. نايف طلي

الفصل الثاني

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$



$$P = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = 1$$

$y = 1 - x$

$$\Delta x = \frac{1-0}{n}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{n}}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \dots \quad x_n = \frac{n}{n}$$

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_3) - f(x_2)| + \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= \left| 1 - \frac{1}{n} - 0 \right| + \left| 1 - \frac{2}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| + \left| 1 - \frac{3}{n} - \left(1 - \frac{2}{n}\right) \right| + \left| 5 - \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \right|$$

$$1, \; 2, \; \dots \; n-3$$

$$\cancel{1}, \cancel{2}, \underline{3, 4, \dots, n-1}, \cancel{n}$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n} + 4 + \frac{n-1}{n}$$

$$= 5 + \frac{n-3}{n} + \frac{n-1}{n} = 5 + \frac{2n-4}{n}$$

حلول تمارين محلولة وغير محلولة د. نايف طلي

ر٣ رياضيات

Scanned by CamScanner

مثال (٢): إذا كانت الدالة f(x) معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & x \in]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

① بين أن f(x) دالة مستمرة على $[0,1]$

② = = الدالة f(x) محدودة.

③ = = f(x) ليست ذات تغير محدود.

① نلاحظ أن الدالة f(x) معرفة ومستمرة عند كل نقطة $x_0 \in]0,1]$ حيث

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x\cos\frac{\pi}{2x} = x_0\cos\frac{\pi}{2x_0} = f(x_0)$$

بقي أن نبين أن الدالة f(x) مستمرة عند الصفر من اليمين.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\cos\frac{\pi}{2x}$$

نلاحظ أن $\left|\cos\frac{\pi}{2x}\right|$ محدودة، $\lim_{x\to 0^+} x = 0$

أي أن x دالة متناهية بالصغر. كل هذا يؤدي إلى أن

$$\lim_{x\to 0^+} x\cos\frac{\pi}{2x} = 0 = f(0)$$

② f(x) دالة محدودة. نلاحظ أن

$$\left|\cos\frac{\pi}{2x}\right| \le 1 \quad , x \in]0,1]$$

$$\Rightarrow \left|x\cos\frac{\pi}{2x}\right| \le 1 \quad , f(0) = 0 \le 1$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le 1 \quad \forall x \in [0,1].$$

وبالتالي f(x) محدودة.

$\boxed{٤-١٢}$ $P_n = \{x_0, x_1, x_2 \cdots x_n\}$: نأخذ تجزئة لها

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \cdots \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < \cdots \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

$$V(f, P_n) = \left|f\left(\tfrac{1}{2n}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\tfrac{1}{2n-1}\right) - f\left(\tfrac{1}{2n}\right)\right| + \cdots$$

$$\cdots + \left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| + \left|f(1) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \lim_{n \to \infty} V(f, P_n)$$

$$V(f, P_n) = \left|\frac{1}{2n}\cos n\pi\right| + \left|\cancel{\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)}{2}\pi} - \frac{1}{2n}\cos n\pi\right|$$

$$\cdots + \left|\frac{1}{2}\cos\pi - \cancel{\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}}\right| + \left|\cancel{\cos\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cos\pi\right|$$

$$V(f, P_n) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \cdots \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \cdots + 1\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

بالتالي $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \sup V(f, P_n)$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$$

أي أن الدالة ليست ذات تغير محدود بالرغم من أنها مستمرة ومحدودة .

تمارين محلولة

س١: أوجد التغير الكلي للدالة $g(x) = [x] = \lfloor x \rfloor$ على المجال $[-2, 2]$

مع العلم . (الجزء الصحيح للعدد $x \in \mathbb{R}$):

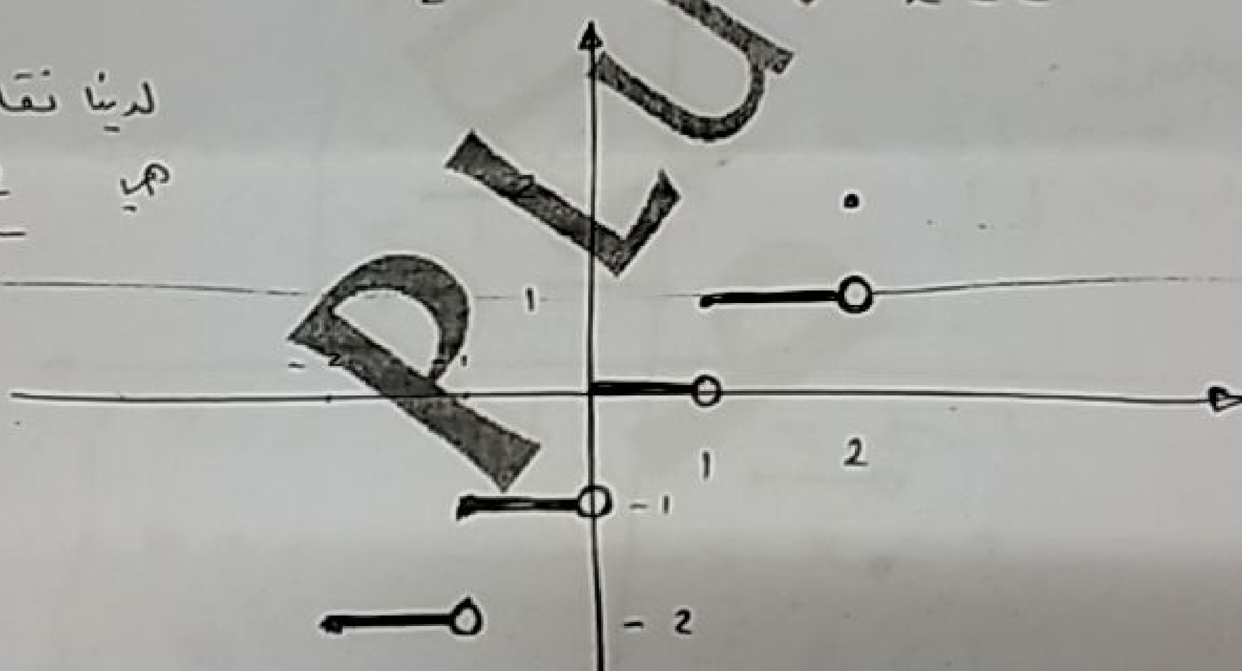
الحل: إن: $n \leq x \lneq n+1 \Leftarrow \lfloor x \rfloor = [x] = n$

أي أن

$$f(x) = \begin{cases} -2 & -2 \leq x \lneq -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

البداية

لدينا نقاط الانقطاع هي $-1, 0, 1, 2$



نلاحظ أن الدالة متزايدة تماماً $\forall x_1 < x_2 \; : \; x_1, x_2 \in [-2, 2]$

$$\Longrightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$$

وبالتالي

$$\bigvee_{-2}^{2} g = \bigvee_{-2}^{2} [x] = |g(2) - g(-2)|$$

$$= |2 - (-2)| = 4 .$$

وفي الحالة العامة

$$\bigvee_{-n}^{n} g = |g(n) - g(-n)| = |n - (-n)| = 2n$$

(S) $\int_{-2}^{2} 1 \, d[x] = f(-1) \cdot 1 + f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 = 4 .$

2/

س: أوجد التغير الكلي للدالة $g(x) = \lceil x \rceil$ على المجال $[-2,2]$

مع الرسم . (i صغر عدد صحيح أكبر أو يساوي x)

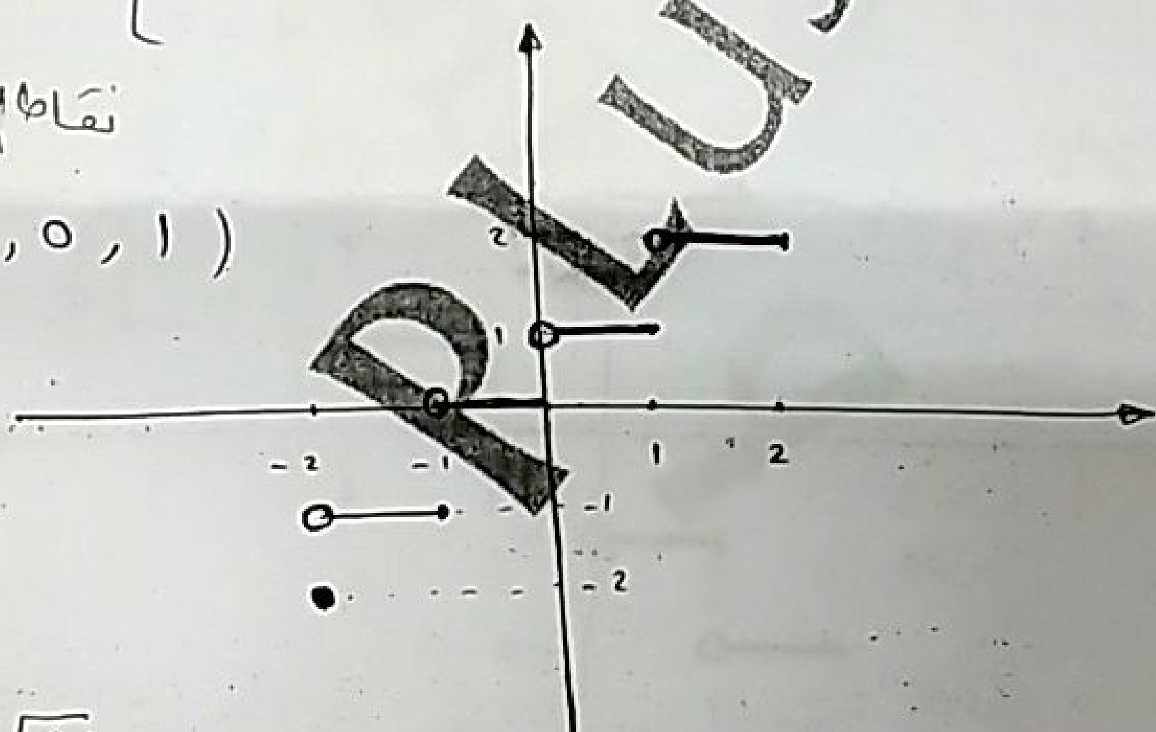
الحل: إذا $n < x \leq n+1 \Longleftarrow g(x) = \lceil x \rceil = n+1$

$$g(x) = \begin{cases} -2 & x = -2 \\ -1 & -2 < x \leq -1 \\ 0 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

البداية

نقاط الانقطاع هي

$(-2, -1, 0, 1)$



نلاحظ أن الدالة $f(x)$ متزايدة على المجال $[-2,2]$ بالتالي

$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} g = \overset{2}{\underset{-2}{V}} \lceil x \rceil = |g(2) - g(-2)| = |2 - (-2)| = 4$$

نلاحظ أن تكامل استيلجس لهذه الدالة إذا كانت $f(x)=1$ هي

$$\int_{-2}^{2} 1 \, d\lceil x \rceil = f(-2) \cdot 1 + f(-1) \cdot 1 + f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1$$
$$= 4$$

القفزة

س٣: بين أن الدالة $f(x) = x - [x]$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ٣/

أوجد التغير الكلي للدالة $f(x) = x - [x]$ على $[-2,2]$

مع الرسم .

الحل: ① نلاحظ أن $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ حيث

$\varphi(x) = x$ دالة متزايدة على أي مجال مغلق $[a,b]$

كذلك $g(x) = [x]$ دالة متزايدة على أي مجال مغلق $[a,b]$

وبالتالي $f(x)$ فرق لداليتين متزايدتين على أي مجال مغلق $[a,b]$

فهي د . ت . م ، و . هـ . م

---

② الرسم نلاحظ أن

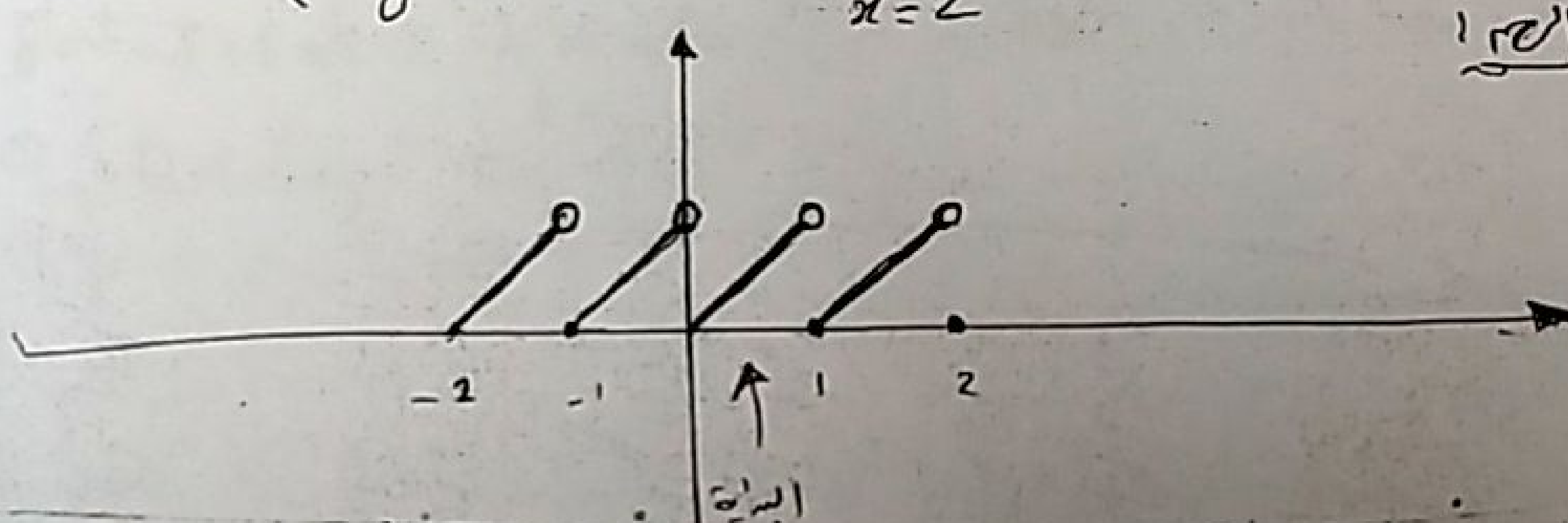
$$f(x) = \begin{cases} x-(-2) & -2 \le x < -1 \\ x-(-1) & -1 \le x < 0 \\ x-0 & 0 \le x \cancel{\le} 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ x-2 & x = 2 \end{cases}$$

البداية

أي أن

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x < -1 \\ x+1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

الرسم



٤/ $\overset{2}{\underset{-2}{V}} f = \overset{-1}{\underset{-2}{V}} f + \overset{0}{\underset{-1}{V}} f + \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{2}{\underset{1}{V}} f .$

لحساب $\overset{-1}{\underset{-2}{V}} f$ نأخذ تجزئة عشوائية نونية منتظمة لـ$[-2,-1]$

$$P = \{-2 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = -1\}$$

$$\Delta x = \frac{-1-(-2)}{n} = \frac{1}{n}$$

$x_0 = -2$ | $f(-2) = -2 + 2 = 0$

$x_1 = -2 + \frac{1}{n}$ | $f(-2 + \frac{1}{n}) = \cancel{-2} + \frac{1}{n} + \cancel{2}$

$x_2 = -2 + \frac{2}{n}$ | $f(-2 + \frac{2}{n}) = \cancel{-2} + \frac{2}{n} + \cancel{2}$

$\vdots$

$x_{n-1} = -2 + \frac{n-1}{n}$ | $f(-2 + \frac{n-1}{n}) = \cancel{-2} + \frac{n-1}{n} + \cancel{2}$

$x_n = -2 + 1$ | $f(-1) = 0$

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n-1} + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n}$$

$$V(f, P) = \frac{2n-2}{n} \Rightarrow \overset{-1}{\underset{-2}{V}} f = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n-2}{n}\right) = 2$$

وبالطريقة ذاتها (أو بنفسها) نحصل على

$\overset{0}{\underset{-1}{V}} f = 2$

$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = 2 \quad , \quad \overset{2}{\underset{1}{V}} f = 2 \Rightarrow \overset{2}{\underset{-2}{V}} f = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

و.ه.م

نظرية القياس (1)

س1: لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ ، والصف $D=\{\{a,b\},\{c\}\}$ من أجزاء X :

① هل D يشكل حلقة ، لماذا ؟ $\Phi \notin D$

② هل D يشكل جبراً ، لماذا ؟

③ هل D يشكل طوبولوجيا ، لماذا ؟ $\Phi, X \notin D$

④ أوجد أصغر حلقة تحوي D . $D=\{\Phi,\{a,b\},\{c\},\{a,b,c\}\}$

⑤ = = جبر يحوي D ؟

⑥ = = طوبولوجيا تحوي D ؟ $\tau=\{\Phi,\{a,b\},\{c\},\{a,b,c\},X\}$

⑦ = أصغر جبر من أجزاء X .

⑧ = أكبر جبر من أجزاء X .

الحل :

① D ليست حلقة لأن $\Phi \notin D$.

② D ليست جبراً لأن $\Phi \notin D$.

③ D ليست طوبولوجيا لأن $\Phi \notin D$.

④ نلاحظ أن $\tau=\{\Phi,\{a,b\},\{c\},\{a,b,c\}\}$ يشكل حلقة

لأن ① $\Phi\in\tau$ ، ② $\forall A,B\in\tau \Rightarrow A\cup B\in\tau$

③ $\forall A,B\in\tau \Rightarrow A\setminus B\in\tau$

⑤ نلاحظ أن $\mathcal{A}=\{\Phi,\{a,b\},\{c\},\{a,b,c\},X,\{c,d\},\{a,b,d\},\{d\}\}$ يشكل جبراً

لأن ① $\Phi\in\mathcal{A}$ ، ② $\forall A,B\in\mathcal{A} \Rightarrow A\cup B\in\mathcal{A}$

③ $\forall A\in\mathcal{A} \Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$

٧) نلاحظ أن: $\mathcal{A}=\{\Phi, X\}$ أصغر جبر

٨) نلاحظ أن: $\mathcal{A}=\mathcal{P}(X)$

$A=\{\Phi, \{a\},\{b\},\{c\},\{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}$

$\{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}$

$\{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\} \Rightarrow |\mathcal{A}| = 2^4 = 16$

٩) $T=\{\Phi, \{a,b\}, \{c\}, \{a,b,c\}, X\}$

س: إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس أثبت أن

$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A\cap B)$$

A

B

$A\cup B = A \cup (B\setminus A)$

$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A)$

$= \mu(A) + \mu(B\setminus(A\cap B))$

$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A\cap B)$

$A\cap(B\setminus A) = \Phi$

س: إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس أثبت أن

$\forall A, B\in\mathcal{A} : \mu(A\Delta B) = 0 \Longrightarrow \mu(A)=\mu(B)$

$\mu(A\Delta B) = \mu((A\setminus B)\cup(B\setminus A)) = 0 \quad ; \quad (A\setminus B)\cap(B\setminus A) = \Phi$

$\mu(A\setminus B) + \mu(B\setminus A) = 0$

$\Rightarrow \mu(A\setminus B) = 0 \Rightarrow \mu(A\setminus(A\cap B)) = \mu(A) - \mu(A\cap B) = 0$

$\mu(B\setminus A) = 0 \Rightarrow \mu(B\setminus(A\cap B)) = \mu(B) - \mu(A\cap B) = 0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mu(A) = \mu(A\cap B)\\ \mu(B) = \mu(A\cap B)\end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$

تمارين الفصل الأول

1 – بين انه على الفترة $(0, \infty)$ الدالة $f(x) = \ln x$ تتكون متزايدة بينما الدالة $g(x) = 1 - e^{2x}$ تكون متناقصة .

2 – بين انه اذا كانت الدالة $f(x)$ مطردة (متزايدة) معرفة على $[a,b]$ و

$$M(x) = \sup_{z \in [a,x]} f(x) = f(x)$$ فليس بالضرورة أن يكون

$$\overline{M}(x) = \sup_{z \in [a,x)} f(z)$$ منطبقاً مع $f(x)$

3 – اثبت ان كل دالة مطردة ومحدودة ومستمرة على $[a,b]$ هي دالـــة مستمرة بانتظام وان شرط محدودية الدالة يمكن إغفالهـــا بينما شرط محدودية الفترة لايمكن إغفالها .

4 – اورد مثالا لدالة مطردة على كل المحور وتعاني انقطاعاً في جميع النقط العادية ، وانه لاية مجموعة عدودة يمكن بناء دالة مطردة وتعاني انقطاعاً فقط على هذه المجموعة .

5 – بين اية من الدوال ذات تغير محدود واوجد لها التغير الكلي في كل من الحالات التالية :

1) $f(x) = x - [x] \qquad x \in [-5,5]$

2) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x+1} \qquad x \in [0,1]$

3) $f(x) = x - e^x \qquad x \in [a,b] \quad (a < 0, b > 0)$

4) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x} & 0 < x \leq 2\pi \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

6. – بفرض ان التغير المحدود للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,1]$ هو L فبين
إن التغير المحدود للدالة

A) $F(x) = k f(x) + m$ (m, k ثابتان) هو $|k| . L$ على $[0,1]$

B) $F(x) = f(ax+b)$ (حيث $a > 0$) على الفترة $\left[-\frac{b}{a} , \frac{1-b}{a} \right]$ يحقق ان

$$\bigvee_{0}^{1} f(x) = \bigvee_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1-b}{a}} F(x)$$

C) بفرض $\varphi(x)$ دالة متزايدة على $[\alpha, \beta]$ وان $\varphi(\alpha)=0 , \varphi(\beta)=1$
فان

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) = L$$

7 — بين ان التغير الكلي للدالة

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 1 \\ 10 & x = 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

هو 23 على الفترة $[0,2]$. كيف نغير الدالة $f(x)$ في $x = 1$ ليكون التغير الكلي اصغريا .

ج : $f(1)$ بين $f(1+0)$ و $f(1-0)$.

8 — هات مثالا لدالة مستمرة على الفترة $[a\ b]$ ذات تغير محدود ولا تحقق شرط ليبشتز من أية مرتبة $\alpha > 0$ واخرى ليس لها تغير محدود وتحقق شرط ليبشتز من المرتبة α حيث $0 < \alpha < 1$.

9 — مثل الدوال التالية ذات التغير المحدود كفرق دالتين متزايدتين

A) $f(x) = \cos^2 x$ والفترة $[0, \pi]$ — $f(x) = 1 - \sin^2 x \quad [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $f(x) = \cos^2 x - 0 \quad [\frac{\pi}{2}, \pi]$

B) $f(x) = \sin x$ والفترة $[0, 2\pi]$

C) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

D) $$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x + 3 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

اوجد للأخيرة $\overset{2}{\underset{1}{V}}(f)$ ، $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)$

وبين أن $\overset{2}{\underset{0}{V}}(f) = \overset{1}{\underset{0}{V}}(f) + \overset{2}{\underset{1}{V}}(f)$

10 – اعط مثالا لدالة ذات تغير محدود على الفترة $[a,b]$ وليس لمقلوبها تغير محدود على الفترة ذاتها .

$n = x \quad [0,1]$

$n = \frac{1}{x} \quad x \in [0,1] \quad x \neq 0$

11 – إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ و $|f(x)|$ لها تغير محدود على $[a,b]$ فاثبت أن الدالة $f(x)$ لها تغير محدود على $[a,b]$.

12 – أثبت أن كل دالة ذات تغير محدود يمكن كتابتها كفرق دالتين متناقصتين .

13 – أثبت ان كل دالة مستمرة ذات تغير محدود يمكن كتابتها كفرق دالتين مستمرتين ومتزايدتين .

* * *

14 – أثبت ان الدالة $F(x)$ ، المعرفة على الفترة $[a,b]$.

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt$$

حيث $f(t)$ كمول اطلاقا على $[a,b]$ ، ذات تغير محدود .

15 – اذا كانت الدالة $f(x)$ مطردة على الفترات المغلقة المحدودة $[k-1,k]$ حيث $k = 1,2,\dots,m$ فاثبت ان $f(x)$ ذات تغير محدود على الفترة $[0,m]$

16 – بين ان المنحنيات التالية مجمعة على الفترات المجاورة :

(A $$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t \,, \quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$$

حيث $c^2 = a^2 - b^2$ و $0 \leqslant t < \pi$ (ناشر القطع الناقص)

(B $$x = ch^3 t \,, \quad y = sh^3 t$$

حيث $0 < t < T$

(C $r = a\varphi$ حيث $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (حلزون ارخميدس)

(D $$x = a\cos\varphi \,, \quad y = a\sin\varphi \,, \quad z = bt$$

حيث $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (لولب دائري) .

* * *

$$g(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 0 & 1/2 < x < 3/2 \\ 2 & x = 3/2 \\ -2 & 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad (2$$

فاثبت أن

$$(a) \int_0^2 x^2 \, dg(x) = \frac{-17}{4}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 2 & -1 < x < 0 \\ x^2 + 3 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \qquad (3$$

فاثبت أن

a) $$(s) \int_{-2}^{2} x \, dg(x) = \frac{17}{6}$$

b) $$(s) \int_{-2}^{2} x^2 \, dg(x) = \frac{34}{3}$$

c) $$(s) \int_{-2}^{2} (x^2+1) \, dg(x) = \frac{301}{20}$$

3 – اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ و $g(x)$ ذات تغير محدود على $[a,b]$ فاثبت أن الدالة

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dg(t)$$

$$\int_0^2 x^2 d\ln(x+1) = \int_0^2 x^2 \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2-1}{x+1}\, dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1}\, dx$$

$\boxed{x+1 > 0 \Rightarrow x > -1}$

$$= \int_0^2 (x-1)\, dx + \Big[\ln(x+1)\Big]_0^2$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 + \ln 3 = 2 - 2 + \ln 3$$

تمارين الفصل الثاني

1 – اثبت أن :

$\ln(x+1)$

(s) $\int_0^2 x^2\, d(\ln(x+1)) = \ln 3$

$\frac{\pi}{2}$

(s) $\int_0^{\pi/2} x\, d\sin x = \frac{\pi}{2} - 1$

(s) $\int_{-1}^1 x\, d\,\mathrm{arctg}\, x = 0$

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx = 0$$

تابع فردي

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$$

$+$	x	$\cos x$
$-$	1	$\sin x$
	0	$-\cos x$

2 – بفرض أن

(1 $g(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & -1 < x < 2 \\ x+2 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

فاثبت أن

(s) $\int_{-1}^{3} x\, dg(x) = -5$

$$\Big[x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] + \Big[0 - 1\Big] =$$

$$\frac{\pi}{2} - 1$$