تعاريف

Michael Abdoush

*** علم الحركة :**

هو أحد أفرع علم الميكانيك الذي يدرس الخواص الهندسية لموضع نقطة مادية أو لمجموعة نقاط مادية بمعزل عن مسببات الحركة وهو من أهم المواضيع التي تؤدي إلى دراسة علم التحليل وفي هذا العلم لا نهتم بالخواص الفيزيائية لحركة نقطة مادية فقط نهتم بالخواص الرياضية.

*** الجسم الصلب :**

هو عبارة عن مجموعة نقاط مادية والتي تحافظ على الأبعاد المتبادلة فيما بينها مع تغيير الزمن.

*** درجات حرية نقطة مادية :**

هي عبارة عن عدد الوسطاء المستقلة التي تحدد موضع النقطة بشكل وحيد ومكاني.

*** درجات حرية جسم صلب :**

هي عبارة عن عدد الوسطاء المستقلة التي تحدد موضع الجسم الصلب.

*** الحركة الانسحابية :**

نقول عن الجسم الصلب أنه تحرك الحركة انسحابية إذا بقي أي متجه (شعاع) من هذا الجسم مسايراً لنفسه أثناء الحركة.

*** الحركة المماسية لحركة انسحابية :**

إذا تساوت سرع جميع نقاط جسم صلب في لحظة واحدة فقط عندئذٍ نقول أن الحركة للجسم هي مماسة في هذه اللحظة إلى حركة انسحابية.

*** الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت :**

هي حركة جسم صلب تثبت فيه نقطتان ونسمي المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين بمحور الدوران.

*** الحركة المماسية لحركة دورانية :**

إذا انعدمت سرع جميع نقاط مستقيم متماسك مع الجسم في لحظة واحدة فقط نقول أن حركة هذا الجسم في هذه اللحظة تكون مماسة لحركة دورانية حول محور ثابت.

*** السرعة الزاوية في الحركة الدورانية حول محور ثابت :**

هي مشتقة الزاوية بالنسبة للزمن ونرمز لها ب

$$\omega = \theta' = \frac{d\theta}{dt}$$

*** شعاع الدوران في الحركة الدورانية حول محور ثابت :**

هو الشعاع المحمول على محور الدوران وقيمته تساوي السرعة الزاوية وجهته تكون بحيث الدوران حول المحور يكون بالاتجاه الموجب أو حسب قاعدة اليد اليمنى، ونكتب :

$$\vec{\omega} = \omega . \vec{u}$$

حيث $\vec{u}$ شعاع واحدة المحور.

*** التسارع الزاوي في الحركة الدورانية حول محور ثابت :**

هو مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن ونرمز له ب :

$$\varepsilon = \omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

*** شعاع التسارع في الحركة الدورانية حول محور ثابت :**

هو مشتقة شعاع الدوران بالنسبة للزمن أي : $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ وهو شعاع محمول على محور الدوران ولكن جهته ليس بالضرورة أن تكون من جهة $\vec{\omega}$ أي يمكننا أن نكتب $\vec{\varepsilon} = \varepsilon . \vec{u}$ حيث $\vec{u}$ هو شعاع واحدة الدوران وهنا نلاحظ :

- $\vec{\omega}$ و $\vec{\varepsilon}$ لهما نفس الجهة فالحركة متسارعة.
- $\vec{\omega}$ و $\vec{\varepsilon}$ لهما جهتين مختلفتين فالحركة متباطئة.
- $\vec{\varepsilon} = 0$ فإن $\vec{\omega}$ ثابت فالحركة منتظمة.
- $\vec{\varepsilon}$ ثابت فإن الحركة متغيرة بانتظام.

*** الحركة اللولبية لجسم صلب :**

هي حركة جسم صلب ينسحب فيه مستقيم محدد على حامله بحيث ترسم كل نقطة فيه لولب دائري ويكون هنا لدينا حركتان انسحابية ودورانية.

*** الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة لجسم صلب :**

هي حركة جسم صلب تثبت فيه نقطة واحدة وبالتالي له ثلاث درجات من الحرية أي له ثلاث معادلات للحركة.

*** القاعدة في الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة لجسم صلب :**

هي المحل الهندسي للمحور الآني للدوران في الجملة الثابتة.

*** المتدحرج في الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة لجسم صلب :**

هو المحل الهندسي للمحور الآني للدوران في الجملة المتماسكة مع الجسم.

*** الحركة العامة للجسم الصلب :**

هي حركة جسم صلب طليق غير مقيد.

*** محور الفتل الآني :**

هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الجسم الصلب التي تكون سرعتها موازية لشعاع الدوران.

*** الحركة المستوية للجسم الصلب :**

هي حركة جسم صلب بحيث تتحرك كل نقطة منه في مستوي واحد يوازي مستوي ثابت في الفراغ ندعوه المستوي الأساسي للحركة ويسمى π_1

*** القاعدة في الحركة المستوية لجسم صلب :**

هي المحل الهندسي للمركز الآني للدوران في الجملة الثابتة.

Michael Abdoush

* المتدحرج في الحركة المستوية لجسم صلب :

هو المحل الهندسي للمركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة مع الجسم

* المركز الآني للدوران :

هو نقطة من المستوي المتحرك تنعدم سرعتها بالنسبة للمستوي الثابت في لحظة معينة نرمز لها بـ I .

* مركز التسارع الآني (مركز التسارع المعدوم) :

هو نقطة من المستوي المتحرك ينعدم تسارعها في لحظة ما بالنسبة للمستوي الثابت نرمز لها بـ Q أي أن : $\vec{\Gamma}(Q) = \vec{0}$ بالنسبة للمستوي الثابت .

* الحركة النسبية :

هي حركة النقطة المادية M بالنسبة للجملة المتحركة XYZ ونرمز لها بـ S

* الحركة الجرية :

هي حركة نقطة مادية M متماسكة مع S وتتحرك معها بالنسبة بالنسبة لـ S وتتحرك معها بالنسبة لـ S_1 .

* الحركة المطلقة :

هي حركة نقطة مادية بالنسبة لـ S_1 دون أن تكون متماسكة مع S وتسمى أيضاً بالحركة المحصلة للحركة النسبية والحركة الجرية

● توزع السرع في الحركة الانسحابية :

ليكن S جسم صلب ولتكن O_1 نقطة من الفراغ .

$$\forall\, O,M \in S :\ \vec V_M = \frac{d\vec{O_1M}}{dt} = \frac{d[\vec{O_1O}+\vec{OM}]}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt}+\frac{d\vec{OM}}{dt}$$

ولكن $\vec{OM}$ ثابت فإنّ: $\vec V_M = \frac{d\vec{O_1O}}{dt}+0$

وبالتالي العبارة الشعاعية للسرعة هي: $\vec V_M=\vec V_O$

● توزع التسارعات في الحركة الانسحابية :

باشتقاق العبارة الشعاعية للسرعة والتي هي: $\vec V_M=\vec V_O$

نحصل على: $\vec\mu_M=\vec\mu_O$

● توزع السرع في الحركة الدورانية حول محور ثابت :

لتكن M نقطة ما من الجسم الصلب S، إنّ مسار هذه النقطة دائرة يقع مركزها على محور الدوران Δ .

ولتكن m المسقط القائم لـ M على محور الدوران Δ

ومنه: $\vec V_M=\vec\omega\wedge\vec{mM}$

بفرض O نقطة ما من Δ فإنّ:

$$\vec V_M=\vec\omega\wedge[\vec{mO}+\vec{OM}]=\vec\omega\wedge\vec{mO}+\vec\omega\wedge\vec{OM} = \vec\omega\wedge\vec{OM}$$

وذلك لأنّ $\vec{mO}\parallel\vec\omega$ ومنه يكون $\vec\omega\wedge\vec{mO}=\vec 0$

● توزع التسارعات في الحركة الدورانية حول محور ثابت :

نشتق العلاقة $\vec V_M=\vec\omega\wedge\vec{OM}$ بالنسبة للزمن t فنجد:

$$\vec\mu_M = \vec\varepsilon\wedge\vec{OM}+\vec\omega\wedge\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec\varepsilon\wedge\vec{OM}+\vec\omega\wedge\vec V_M$$
$$= \vec\varepsilon\wedge\vec{OM}+\vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec{mM})$$

وبتطبيق علاقة جيبس نجد:

$$\vec\mu_M=\vec\varepsilon\wedge\vec{OM}+(\vec\omega\cdot\vec{mM})\vec\omega-(\vec\omega\cdot\vec\omega)\vec{mM}$$

$$\Rightarrow \vec\mu_M=\vec\varepsilon\wedge\vec{OM}-\omega^2\vec{mM}$$

وذلك لأنّ $\vec\omega\perp\vec{mM} \Leftarrow \vec\omega\cdot\vec{mM}=0$

نسمي $\vec\mu_T(M)=\vec\varepsilon\wedge\vec{OM}$ بالتسارع المماسي .

ونسمي $\vec\mu_N(M)=-\omega^2\vec{mM}$ بالتسارع الناظمي .

وبالتالي: $\vec\mu_M=\vec\mu_T(M)+\vec\mu_N(M)$

● توزع السرع في الحركة اللولبية :

M نقطة من الجسم الصلب، سرعتها هي عبارة عن مجموع سرعتين: سرعة مسقط M على محور الدوران M_1، وسرعة مسقط M في المستوي M_2، أي أنّ: $\vec V_M=\vec V_{M_1}+\vec V_{M_2}$

بما أنه يوجد حركتان الأولى انسحابية أي: $\vec V_{M_1}=\dot s\cdot\vec k=b\cdot\dot\theta\cdot\vec k$ والثانية دورانية أي: $\vec V_{M_2}=\vec\omega\wedge\vec{O_1M_2}$ وبإدخال النقطة M نجد:

$$\vec V_{M_2}=\vec\omega\wedge(\vec{O_1M}+\vec{MM_2})$$
$$=\vec\omega\wedge\vec{O_1M}+\vec\omega\wedge\vec{MM_2}$$
$$=\vec\omega\wedge\vec{O_1M}$$

وذلك لأنّ $\vec{MM_2}\parallel\vec\omega \Leftarrow \vec\omega\wedge\vec{MM_2}=\vec 0$

ومما سبق نجد أنّ: $\vec V_M=b\cdot\dot\theta\cdot\vec k+\vec\omega\wedge\vec{O_1M}$

● توزع التسارعات في الحركة اللولبية :

نشتق العلاقة $\vec V_M=b\cdot\dot\theta\cdot\vec k+\vec\omega\wedge\vec{O_1M}$ بالنسبة للزمن t فنجد:

$$\vec\mu_M=b\cdot\ddot\theta\cdot\vec k+\vec\varepsilon\wedge\vec{O_1M}-\omega^2\cdot\vec{M_1M}$$

حيث أنّ: $b\cdot\ddot\theta\cdot\vec k$ هو تسارع انسحابي .

و $\vec\varepsilon\wedge\vec{O_1M}$ هو تسارع مماسي

و $-\omega^2\cdot\vec{M_1M}$ هو تسارع ناظمي .

● شعاع السرعة في الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة:

لتكن M نقطة ما من جسم صلب يتحرك بحركة دورانية حول نقطة ثابتة O فإنّ: $\vec{OM}=x\vec i+y\vec j+z\vec k$

حيث x,y,z مقادير ثابتة و $\vec i,\vec j,\vec k$ مقادير متغيرة بالنسبة للزمن، وبالاشتقاق نجد شعاع السرعة

$$\vec V_M=\vec\omega_M\wedge\vec{OM}$$

لأنّ الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية حول محور آني يمر من تلك النقطة .

● شعاع التسارع في الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة:

باشتقاق علاقة السرعة بالنسبة للزمن t نجد:

$$\vec\mu_M=\vec\varepsilon\wedge\vec{OM}+\vec\omega\wedge\vec V_M=\vec\varepsilon\wedge\vec{OM}+\vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec{OM})$$

O ثابتة، وبتطبيق علاقة جيبس نجد:

$$\vec\mu_M=\vec\varepsilon\wedge\vec{OM}-\omega^2\cdot\vec{mM}$$

حيث m هو مسقط M على محور الدوران، $\vec\omega$ و $\vec\varepsilon$ آنيان في كل لحظة ويتبعان للزمن t .

$$\Rightarrow \vec{\omega} = (\theta'.\cos\psi + \varphi'.\sin\theta.\sin\psi)\vec{i_1} + (\theta'.\sin\psi - \varphi'\sin\theta.\cos\psi)\vec{j_1} + (\psi' + \varphi'.\cos\theta)\vec{K_1}$$

فتكون مركبات $\vec{\omega}$ على الجملة الثابتة :

$$p_1 = \theta'.\cos\psi + \varphi'\sin\theta.\sin\psi$$

$$q_1 = \theta'\sin\psi - \varphi'\sin\theta.\cos\psi$$

$$r_1 = \psi' + \varphi'\cos\theta$$

السرعة في الحركة العامة للجسم الصلب :

بفرض A قطب الحركة $\Leftarrow$ $\forall M \in S : \vec{V_M} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \wedge \vec{AM}$

محور الفتل الآني في الحركة العامة للجسم الصلب :

إذا كان Δ محور فتل آني وكان $O' \in \Delta$ $\Leftarrow$ $\dfrac{\vec{V_x}(O')}{p} = \dfrac{\vec{V_y}(O')}{q} = \dfrac{\vec{V_z}(O')}{r}$

وهذا يعني أن : $\vec{V_{O'}} \parallel \vec{\omega}$

ويدل التوازي على الارتباط الخطي بين الشعاعين أي : $\vec{V_{O'}} = b.\vec{\omega}$

ويكتب شعاع سرعة نقطة كيفية M إذا افترنا O' قطب بالشكل :

$$\vec{V_M} = b.\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M}$$

تعيين عناصر الفتل الآني في الحركة العامة للجسم الصلب :

■ نعيّن $\vec{\omega}$ ، ■ نعيّن Δ من علاقة التوازي : $\dfrac{\vec{V_x}(O')}{p} = \dfrac{\vec{V_y}(O')}{q} = \dfrac{\vec{V_z}(O')}{r}$: $\vec{V_{O'}} \parallel \vec{\omega}$

ثم نعيّن O' ، ■ نعيّن b من العلاقة : $\vec{V_M} = b.\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M}$

نضرب الطرفين بـ $\vec{\omega}$ سلمياً فنجد : $\vec{\omega}.\vec{V_M} = b.\omega^2$

$$\Rightarrow b = \frac{\vec{\omega}.\vec{V_M}}{\omega^2}$$

التسارع في الحركة العامة للجسم الصلب :

$\forall O, M \in S$ و $\forall O_1 \in$ الفراغ بحيث O قطب للحركة فإن :

$$\vec{V_M} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \xRightarrow{\text{الاشتقاق}} \vec{\mu_M} = \vec{\mu_O} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\mu_M} = \vec{\mu_O} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt} - \frac{d\vec{O_1O}}{dt}\right)$$

$$= \vec{\mu_O} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{V_M} - \vec{V_O})$$

$$= \vec{\mu_O} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

بتطبيق علاقة جيبس فنجد :

$$\vec{\mu_M} = \underbrace{\vec{\mu_O}}_{\text{تسارع انسحابي}} + \underbrace{\vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \vec{\omega}.\vec{OM}}_{\text{تسارع دوراني}}$$

وبالتالي نلاحظ أن التسارع مكون من تسارعين الأول انسحابي مع القطب والثاني دوراني حول القطب ومنه :

$$\vec{\mu_M} = \vec{\mu_O} + \vec{\mu_O}(M)$$

تعيين شعاع الدوران على الجملة المتماسكة تحليلياً في الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة زمنياً ثم على الجملة الثابتة :

ψ	$\vec{u}$	$\vec{v_1}$	$\vec{K_1}$
$\vec{i_1}$	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
$\vec{j_1}$	$\sin\psi$	$\cos\psi$	0
$\vec{K_1}$	0	0	1

θ	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{K}$
$\vec{u}$	1	0	0
$\vec{v_1}$	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
$\vec{K_1}$	0	$\sin\theta$	$\cos\theta$

φ	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{K}$
$\vec{u}$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\vec{v}$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{K}$	0	0	1

■ شعاع الدوران : $\vec{\omega} = \psi'\vec{K_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'.\vec{K}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \psi'(\sin\theta.\vec{v} + \cos\theta.\vec{K}) + \theta'(\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}) + \varphi'.\vec{K}$$

$$= \psi'.\sin\theta.\vec{v} + \psi'\cos\theta.\vec{K} + \theta'\cos\varphi\,\vec{i} - \theta'.\sin\varphi\,\vec{j} + \varphi'.\vec{K}$$

$$= \psi'.\sin\theta(\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) + \psi'\cos\theta.\vec{K} + \theta'.\cos\varphi\,\vec{i} - \theta\sin\varphi\,\vec{j} + \varphi'.\vec{K}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \psi'.\sin\theta.\sin\varphi\,\vec{i} + \psi'.\sin\theta.\cos\varphi\,\vec{j} + \psi'.\cos\theta.\vec{K} + \theta'.\cos\varphi\,\vec{i} - \theta'.\sin\varphi\,\vec{j} + \varphi'\vec{K}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = (\psi'.\sin\theta.\sin\varphi + \theta'\cos\varphi)\vec{i} + (\psi'.\sin\theta.\cos\varphi - \theta'\cos\varphi)\vec{j} + (\psi'\cos\theta + \varphi')\vec{K}$$

فتكون مركبات $\vec{\omega}$ على الجملة المتماسكة :

$$p = \psi'\sin\theta.\sin\varphi + \theta'.\cos\varphi$$

$$q = \psi'\sin\theta.\cos\varphi - \theta'.\cos\varphi$$

$$r = \psi'.\cos\theta + \varphi'$$

■ شعاع الدوران : $\vec{\omega} = \varphi'.\vec{K_1} + \theta'.\vec{u} + \varphi'.\vec{K}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \varphi'.\vec{K_1} + \theta'(\cos\psi\,\vec{i_1} + \sin\psi\,\vec{j_1}) + \varphi'(-\sin\theta\,\vec{v_1} + \cos\theta\,\vec{K_1})$$

$$= \varphi'.\vec{K_1} + \theta'\cos\psi\,\vec{i_1} + \theta'.\sin\psi\,\vec{j_1} - \varphi'\sin\theta.\vec{v_1} + \varphi'\cos\theta.\vec{K_1}$$

$$= \varphi'.\vec{K_1} + \theta'\cos\psi\,\vec{i_1} + \theta'.\sin\psi\,\vec{j_1} - \varphi'.\sin\theta(-\sin\psi\,\vec{i_1} + \cos\psi\,\vec{j_1}) + \varphi'.\cos\theta.\vec{K_1}$$

$$= \varphi'.\vec{K_1} + \theta\cos\psi\,\vec{i_1} + \theta'\sin\psi\,\vec{j_1} + \varphi'\sin\theta.\sin\psi\,\vec{i_1} - \varphi'\cos\psi\sin\theta.\vec{j_1} + \varphi'.\cos\theta.\vec{K_1}$$

● تعيين المركز الآني للدوران هندسياً في الحركة المستوية لجسم صلب:

نختار النقطتين A,B في مستوي الحركة ونميز الحالات التالية:

[1] $\vec{v}(A) \not\parallel \vec{v}(B)$.

نرسم مستقيم d_1 يعامد $\vec{v}(A)$ ونرسم مستقيم d_2 يعامد $\vec{v}(B)$
ولتكن $A_1 \in d_1$ و $B_1 \in d_2$ ، ولنطبق نظرية المساقط على A, A_1

$$Proj_{d_1}\vec{v}(A) = Proj_{d_1}\vec{v}(A_1)$$

وبما أنّ $\vec{v}(A) \perp d_1$ فإنّ: $Proj_{d_1}\vec{v}(A) = Proj_{d_1}\vec{v}(A_1) = 0$

أي أنّ: $\vec{v}(A_1) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_1 \end{cases}$

ولنطبق نظرية المساقط على B, B_1 :

$$Proj_{d_2}\vec{v}(B) = Proj_{d_2}\vec{v}(B_1)$$

وبما أنّ $\vec{v}(B) \perp d_2$ فإنّ: $Proj_{d_2}\vec{v}(B) = Proj_{d_2}\vec{v}(B_1) = 0$

أي أنّ: $\vec{v}(B_1) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_2 \end{cases}$

وبما أنّ $\vec{v}(A)$ و $\vec{v}(B)$ غير متوازيين فإنّ d_1 لا يوازي d_2 ومنه d_1 و d_2 متقاطعين في المستوي π بنقطة واحدة ولتكن I
ونلاحظ أنّ $I \in d_2$ و $I \in d_1$ ومنه:

$$\vec{v}(I) = \begin{cases} 0 \\ \perp d_1 \text{ و } \perp d_2 \end{cases}$$

إنّ $\vec{v}(I) \perp d_1 , \perp d_2$ غير ممكن لأنه لا يمكن أن يعامد شعاع شعاعين متقاطعين في مستويه ومنه $\vec{v}(I) = 0$ ومنه I مركز آني للدوران.

[2] $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ ولكن $\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$:

في هذه الحالة لا تتحقق نظرية المساقط إلا إذا كان المسقط معدوم أي $\vec{AB}$ عامود على المنحني المشترك للسرعتين أي: d_1 ينطبق على d_2 وينطبق على AB ، في هذه اللحظة إن المركز الآني للدوران يقع على AB حتماً ويحقق العلاقة:

من تشابه المثلثات: $\dfrac{|\vec{v}(A)|}{|\vec{IA}|} = \dfrac{|\vec{v}(B)|}{|\vec{IB}|}$

[3] $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$

نلاحظ أنّ نظرية المساقط محققة دوماً، فإذا رسمنا d_1, d_2 بحيث: $\vec{v}(A) \perp d_1$ ، $\vec{v}(B) \perp d_2$ ، نحصل على مستقيمين متوازيين في المستوي مما يدل على أن المركز الآني للدوران يبتعد إلى اللانهاية ونلاحظ من جهة أخرى بأن الحركة هي انسحابية للمستوي π في المستوي π_1 مما يدعونا للقول أن الحركة الانسحابية هي حركة دورانية حول مركز آني يقع في اللانهاية.

● السرعة في الحركة المستوية لجسم صلب:

[1] إذا كان O قطب الحركة:

$$\forall M \in S : \vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

[2] إذا كان I (المركز الآني للدوران) قطب الحركة،

$$\forall M \in S : \vec{v}(M) = \vec{v}(I) + \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$$

ولكن $\vec{v}(I) = 0$ ومنه: $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$

● التسارع في الحركة المستوية لجسم صلب:

[1] إذا كان O قطب الحركة:

باشتقاق علاقة السرعة $\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ نجد:

$$\vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)$$

حيث $\vec{\omega} \parallel \vec{\varepsilon}$ لأنّ $\vec{\omega}$ دوماً عمودي على مستوي الحركة،

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt} - \frac{d\vec{O_1O}}{dt}\right); \; O_1 \in \text{الفراغ الثابت}$$

$$= \vec{\gamma}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}(M) - \vec{v}(O))$$

ولكن من علاقة السرعة $\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ نجد أنّ:

$$(\vec{v}(M) - \vec{v}(O)) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \omega \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

وحسب علاقة جيبس نجد:

$$\vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + (\vec{\omega} \cdot \vec{OM}) \cdot \vec{\omega} - \omega^2 \cdot \vec{OM}$$

لدينا $\vec{\omega}$ عمودي دوماً على مستوي الحركة $\Leftarrow \vec{\omega} \perp \vec{OM} \Leftarrow \vec{\omega} \cdot \vec{OM} = 0$

وبالتالي:

$$\vec{\gamma}_M = \underbrace{\vec{\gamma}_O}_{\text{تسارع انسحابي}} + \underbrace{\underbrace{\vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM}}_{\text{تسارع مماسي}} \underbrace{- \omega^2 \cdot \vec{OM}}_{\text{تسارع ناظمي}}}_{\text{تسارع دوراني}}$$

[2] I (المركز الآني للدوران) هو قطب الحركة:

باشتقاق العلاقة: $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$ نجد:

$$\vec{\gamma}_M = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{IM}}{dt}\right) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt} - \frac{d\vec{O_1I}}{dt}\right)$$

حيث أنّ O_1 نقطة من الفراغ الثابت.

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_M = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M) - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

حيث $\vec{u}$ هو شعاع سرعة انتقال I على القاعدة.

[3] Q (مركز التسارع المعدوم) هو قطب الحركة:

$$\vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_Q + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{QM} - \omega^2 \cdot \vec{QM}$$

وبما أنّ $\vec{\gamma}_Q = 0$ نجد:

$$\vec{\gamma}_M = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{QM} - \omega^2 \cdot \vec{QM}$$

● تعيين مركز التسارع المعدوم في الحركة المستوية لجسم صلب :

O: مبدأ الحركة ، Q مركز التسارع المعدوم في لحظة ما .

$$\vec{\Gamma}_Q = \vec{\Gamma}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OQ} - \omega^2 \cdot \vec{OQ}$$

ولكن $\vec{\Gamma}_Q = 0$ نعوض فنجد العلاقة التي تمكننا من تعيين مركز التسارع المعدوم .

$$\vec{\Gamma}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OQ} - \omega^2 \cdot \vec{OQ} = 0$$

● السرعة المطلقة :

$$\vec{V}_a(M) = \left.\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{O_1O}}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_F$$

$$= \vec{V}(O) + \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}$$

$$= \vec{V}(O) + \vec{V}_r(M) + \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}$$

$$= \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

حيث : $\vec{V}(O) + \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}$: هي سرعة جرية .

$\vec{V}_r(M)$: هي سرعة نسبية .

● التسارع المطلق :

نشتق العلاقة $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$

$$= \vec{V}_r(M) + \vec{V}(O) + \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}$$

فنجد :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \left.\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\vec{V}(O)}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\vec{\omega}_e}{dt}\right|_F \wedge \vec{OM} + \omega_e \wedge \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_F$$

⊛ $$\left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_M + \omega_e \wedge \vec{V}_r(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r(M)$$

⊛ $$\left.\frac{d\vec{\omega}_e}{dt}\right|_F = \vec{\varepsilon}$$

⊛ $$\left.\frac{d\vec{V}(O)}{dt}\right|_F = \vec{\Gamma}(O)$$

⊛ $$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}$$

وبالتالي يكون :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \omega_e \wedge \vec{V}_r(M) + \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \omega_e \wedge \left[\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}\right]$$

ولكن :

$$\omega_e \wedge \left[\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}\right] = \omega_e \wedge \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}_e \wedge (\vec{\omega}_e \wedge \vec{OM})$$

$$= \omega_e \wedge \vec{V}_r(M) - \omega_e^2 \cdot \vec{OM}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r(M) + \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \omega_e \wedge \vec{V}_r(M) - \omega_e^2 \cdot \vec{OM}$$

$$= \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r(M) - \omega_e^2 \cdot \vec{OM}$$

$$= \underbrace{\vec{\Gamma}_r(M)}_{\text{تسارع نسبي}} + \underbrace{\vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \cdot \vec{OM}}_{\text{تسارع جري}} + \underbrace{2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r(M)}_{\text{تسارع مماسي}}$$

$$= \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\Gamma}_e(M) + \vec{\Gamma}_c(M)$$

● دساتير بور :

$$\forall M \in S : \vec{\Gamma}_a(M) = \left.\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_F$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_a(M)$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_M + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ V_{ax} & V_{ay} & V_{az} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ax}(M) = \frac{dV_{ax}(M)}{dt} + q V_{az}(M) - r \cdot V_{ay}(M)$$

$$\vec{\Gamma}_{ay}(M) = \frac{dV_{ay}(M)}{dt} + r \cdot V_{ax}(M) - p V_{az}(M)$$

$$\vec{\Gamma}_{az}(M) = \frac{dV_{az}(M)}{dt} + p V_{ay}(M) - q V_{ax}(M)$$

Michael Abdoush

مبرهنة: (النظرية الأساسية لحركة جسم صلب)

الشرط اللازم والكافي كي تتحرك مجموعة مادية كمجموعة متماسكة (جسم صلب) هو أن يتساوى مسقطا سرعتي نقطتين من هذا الجسم على المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين.

($\Leftarrow$) لنفرض أن S مجموعة متماسكة ولتكن النقطتين $A,B \in S$ ولتكن النقطة (O) نقطة من الفراغ الثابت، فمن تعريف الجسم الصلب يمكن أن نكتب علاقة البعد الثابت كما يلي:

$$\forall A,B \in S \Rightarrow |\vec{AB}| = c \Rightarrow (\vec{AB})^2 = c^2$$

ومنه وبالاشتقاق:

$$\Rightarrow 2(\vec{AB}) . \frac{d(\vec{AB})}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} . \frac{d(\vec{OB} - \vec{OA})}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AB})\left[\frac{d(\vec{OB})}{dt} - \frac{d(\vec{OA})}{dt}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AB}).(\vec{V_B} - \vec{V_A}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{AB}).\vec{V_B} = (\vec{AB}).\vec{V_A}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{AB}|.|\vec{V_B}|.\cos(\alpha) = |\vec{AB}|.|\vec{V_A}|.\cos(\beta)$$

$$\Leftrightarrow |\vec{V_B}|\cos(\alpha) = |\vec{V_A}|.\cos(\beta) \Leftrightarrow Proj_{AB}\vec{V_B} = Proj_{AB}\vec{V_A}$$

($\Rightarrow$) نفس الكلام السابق ولكن من الأسفل إلى الأعلى.

مبرهنة: (الخاصة المميزة بالحركة الانسحابية)

إذا تساوت السرع لمجموعة مادية في لحظة ما فإن هذه المجموعة تكون متماسكة وتتحرك بحركة انسحابية.

$\forall O,M \in S \ ; \ \forall O_1 \in$ الفراغ

$$\vec{V_M} = \vec{V_O} \Leftrightarrow \frac{d\vec{O_1M}}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} \Leftrightarrow \text{بالمكاملة}$$

$$\Leftrightarrow \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{C} \Leftrightarrow \vec{O_1M} - \vec{O_1O} = \vec{C}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OM} = \vec{C}$$

مبرهنة:

إذا تساوت متجهات التسارع لنقط مجموعة مادية فهو شرط لازم وغير كافي كي تكون المجموعة متماسكة وحركتها انسحابية

$\forall O,M \in S \ ; \ \forall O_1 \in$ الفراغ

$$\vec{\gamma_M} = \vec{\gamma_O} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \vec{V_M} = \vec{V_O} + \vec{C} \Longrightarrow \frac{d\vec{O_1M}}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \vec{C}$$

$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{C}t + \vec{C_1} \Rightarrow \vec{OM} = \vec{C}t + \vec{C_1}$$

وهذه الحركة لا يمكن أن تكون انسحابية إلا إذا كان $\boxed{C=0}$

مبرهنة: (نظرية أولر - دالامبير)

إذا ثبتت في الجسم الصلب نقطة واحدة فإنه يوجد في كل لحظة مستقيم يمر من هذه النقطة، سرع نقاطه معدومة في اللحظة المذكورة، بمعنى آخر: إن حركة الجسم الصلب الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية في كل لحظة من الزمن حول محور يمر من تلك النقطة يسمى محور الدوران.

بفرض (O) نقطة ثابتة في الجسم وبما أن A,B نقطتان من الجسم عندئذ نلاحظ ما يلي:

1) $\vec{V_A} \neq \vec{0}$ لأنه لو كانت $\vec{V_A} = \vec{0}$ في لحظة ما فإن $\vec{OA}$ محور آني للدوران ويتم المطلوب.

2) $\vec{V_B} \neq \vec{0}$ لأنه لو كانت $\vec{V_B} = \vec{0}$ في لحظة ما فإن $\vec{OB}$ محور آني للدوران ويتم المطلوب.

3) $\vec{V_A} \neq \vec{V_B}$ لأنه لو كانت $\vec{V_A} = \vec{V_B}$ في كل لحظة تكون الحركة انسحابية وهذا يناقض كون O ثابتة.

4) $\vec{V_A} \not\parallel \vec{V_B}$ لأنه لو كانت $\vec{V_A} \parallel \vec{V_B}$ فإن نظرية المساقط التي تنص على: $\vec{AB}.\vec{V_A} = \vec{AB}.\vec{V_B}$ لا تتحقق لأن $\vec{V_A} \neq \vec{V_B}$

الآن لنثبت المبرهنة باعتبار أن الملاحظات السابقة محققة:

- نطبق نظرية المساقط على النقطتين O,A نجد:

$$\vec{OA}.\vec{V_A} = \vec{OA}.\vec{V_O}$$

وبما أن O ثابتة فإن $\vec{V_O} = \vec{0}$ وبالتالي:

$$\vec{OA}.\vec{V_A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_A} = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{OA} \perp \vec{V_A} \end{cases}$$

- نطبق نظرية المساقط على النقطتين O,B نجد:

$$\vec{OB}.\vec{V_B} = \vec{OB}.\vec{V_O}$$

وبما أن O ثابتة فإن $\vec{V_O} = \vec{0}$ وبالتالي:

$$\vec{OB}.\vec{V_B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_B} = \begin{cases} 0 \\ \vec{OB} \perp \vec{V_B} \end{cases}$$

- نمرر مستوي P_1 يمر من $\vec{OA}$ ويعامد $\vec{V_A}$ $\Leftarrow$ $\vec{V_A}$ ناظم P_1
- نمرر مستوي P_2 يمر من $\vec{OB}$ ويعامد $\vec{V_B}$ $\Leftarrow$ $\vec{V_B}$ ناظم P_2

⊛ لنأخذ $A_1 \in P_1$ ثم لنطبق نظرية المساقط على النقطتين O,A_1 ثم على النقطتين A,A_1 نجد وبما أن O ثابتة:

$$\vec{OA_1}.\vec{V_{A_1}} = \vec{OA_1}.\vec{V_O} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_{A_1}} = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{V_{A_1}} \perp \vec{OA_1} \end{cases} \quad ---- (*)$$

وبما أن $\vec{V_A}$ ناظم المستوي P_1 نجد:

$$\vec{AA_1}.\vec{V_{A_1}} = \vec{AA_1}.\vec{V_A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_{A_1}} = \begin{cases} 0 \\ \vec{V_{A_1}} \perp \vec{AA_1} \end{cases} \quad ---- (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\forall A_1 \in P_1 : \vec{V_{A_1}} = \begin{cases} 0 \\ \vec{V_{A_1}} \perp P_1 \end{cases} \quad ------ (I)$$

* لناخذ $B_1 \in P_2$ ثم نطبق نظرية المساقط على النقطتين O, B_1 ثم على النقطتين B_1, B فنجد وبما أن O ثابتة:

$$\vec{OB_1}\cdot\vec{V}_{B_1} = \vec{OB_1}\cdot\vec{V}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{B_1} = \begin{cases} 0 \\ \vec{V}_{B_1} \perp \vec{OB_1} \end{cases} \quad \text{------} (♡)$$

وبما أن $\vec{V}_B$ ناظم المستوي P_2 فنجد:

$$\vec{BB_1}\cdot\vec{V}_{B_1} = \vec{BB_1}\cdot\vec{V}_B = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{B_1} = \begin{cases} 0 \\ \vec{V}_{B_1} \perp \vec{BB_1} \end{cases} \quad \text{------} (♡♡)$$

من (♡) و (♡♡) نجد:

$$\forall B_1 \in P_2 : \vec{V}_{B_1} = \begin{cases} 0 \\ \vec{V}_{B_1} \perp P_2 \end{cases} \quad \text{------} (II)$$

- بما أن $\vec{V}_A \not\parallel \vec{V}_B$ فإن $P_1 \not\parallel P_2$ وبما أن O مشتركة فإنه يوجد فصل مشترك Δ وبالتالي:

$$\forall O_1 \in \Delta \Rightarrow O_1 \in P_1 , O_1 \in P_2$$

وبالتالي تتحقق كل من (I) و (II) أي:

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_{O_1} &= \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{V}_{O_1} \perp P_1 \end{cases} \\ \vec{V}_{O_1} &= \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{V}_{O_1} \perp P_2 \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{V}_{O_1} = \vec{0}$$

لأنه لا يمكن أن يكون $\vec{V}_{O_1}$ يعامد P_1 و P_2 في نفس الوقت ومنه Δ محور آني للدوران.

مبرهنة:

إن شعاع الدوران الآني $(\vec{\omega})$ لا يتعلق بالنقطة (M) أي لا يتغير من نقطة إلى أخرى في كل لحظة.

$\forall A, B, O \in S$; O ثابتة

$$\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{\omega}_A \wedge \vec{OA} \quad ; \quad \vec{V}_B = \vec{\omega}_B \wedge \vec{OB}$$

بتطبيق نظرية المساقط على النقطتين A, B نجد:

$$\vec{AB}\cdot\vec{V}_A = \vec{AB}\cdot\vec{V}_B \Rightarrow \vec{AB}\,(\vec{\omega}_A \wedge \vec{OA}) = \vec{AB}\,(\vec{\omega}_B \wedge \vec{OB})$$

$$\Rightarrow (\vec{AB}, \vec{\omega}_A, \vec{OA}) = (\vec{AB}, \vec{\omega}_B, \vec{OB}) \Rightarrow (\vec{OA}, \vec{AB}, \vec{\omega}_A) = (\vec{OB}, \vec{AB}, \vec{\omega}_B)$$

$$\Rightarrow (\vec{OA} \wedge \vec{AB})\cdot\vec{\omega}_A = (\vec{OB} \wedge \vec{AB})\cdot\vec{\omega}_B$$

$$\Rightarrow (\vec{OA} \wedge \vec{AB})\cdot\vec{\omega}_A = ([\vec{OA} + \vec{AB}] \wedge \vec{AB})\cdot\vec{\omega}_B$$

$$\Rightarrow (\vec{OA} \wedge \vec{AB})\cdot\vec{\omega}_A = [(\vec{OA} \wedge \vec{AB}) + \underbrace{(\vec{AB} \wedge \vec{AB})}_{=0}]\cdot\vec{\omega}_B$$

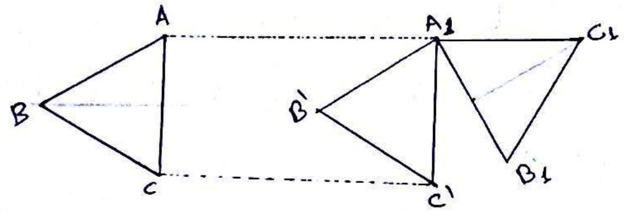
$$\Rightarrow (\vec{OA} \wedge \vec{AB})\cdot\vec{\omega}_A = (\vec{OA} \wedge \vec{AB})\cdot\vec{\omega}_B$$

بما أن $\vec{\omega}_A \parallel \vec{\omega}_B$ وهما محمولان على محور الدوران الآني فإن لهما نفس المنحى في لحظة ما وبالتالي لهما نفس الزاوية مع $(\vec{OA} \wedge \vec{AB})$ وبالتالي يمكن اختصار $(\vec{OA} \wedge \vec{AB})$ وبالتالي نجد:

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$$

مبرهنة: (موضوعة شال)

إذا تحرك الجسم في الفراغ فإنه ينتقل من موضع أول إلى موضع ثاني فيمكن أن نعتبر انتقاله عبارة عن انسحاب مع إحدى نقاطه ثم دوران حول هذه النقطة.



ليكن لدينا جسم صلب S ولتكن A, B, C ثلاثة نقاط غير واقعة على استقامة واحدة من S وبما أن الانتقال من الموضع الأول إلى الموضع الثاني يتم بانسحاب النقطة A إلى النقطة A_1 ونسمي النقطة A قطب الحركة ثم ندور حول هذا القطب في نفس اللحظة التي تمت فيها عملية الانسحاب وحسب نظرية أولر دالامبير فإنه يوجد محور آني للدوران يمر من النقطة A_1 ويحقق الانتقال الثاني وبالتالي نحصل على المخطط

$$ABC \xrightarrow{\text{انسحاب}} A_1B'C' \xrightarrow{\text{دوران حول } A_1} A_1B_1C_1$$

أي ندرس الحركة على أنها انسحابية مع قطب ما ثم دورانية حول هذا القطب.

مبرهنة:

إنّ شعاع الدوران للحركة العامة لجسم صلب لا يتعلق باختيار القطب.

ليكن M و A و B من S ونفرض أنّ A, B قطبان للحركة عندئذٍ علاقة سرعة النقطة M:

بالنسبة للقطب A: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM}$

بالنسبة للقطب B: $\vec{V}_M = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$

$$\Rightarrow \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM} \quad \text{-----} \ (*)$$

وبما أنّ $B \in S$ فإنّ سرعة B بالنسبة للقطب A:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB}$$

نعوض في $(*)$ فنجد:

$$\vec{V}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM} - \vec{V}_A - \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} = \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_A \wedge [\vec{AM} - \vec{AB}] = \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_A \wedge \vec{BM} = \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$$

وبما أنّ M كيفية فيمكن إختصار $\vec{BM}$ من الجداء الخارجي فنجد

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$$

أي أنّ شعاع الدوران الآني لا يتعلق باختيار القطب ومنه السرعة الدورانية لا تتعلق بالقطب ويكتب شعاع سرعة النقطة M الكيفية بالشكل:

$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ حيث O قطب الحركة

مبرهنة: (النظرية الأساسية)

إذا تحرك جسم صلب بحركة مستوية فإنّ أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي π_1 ومتماسك مع الجسم يتحرك بحركة انسحابية.

ليكن Δ مستقيماً متماسكاً مع الجسم S ويعامد المستوي الأساسي للحركة π_1 وليكن: $\forall A, B \in \Delta \ ; \ A, B \in S$

بما أنّ النقطتين من جسم صلب فإنّ البعد بينهما يبقى ثابتاً ومنه:

$$|\vec{AB}| = c \text{ ----- } ①$$

من جهة أخرى لدينا:
$\left\{ \begin{array}{l} A \in \Delta \Leftarrow \text{يوجد مستوي } \pi' \ // \ \pi_1 \\ B \in \Delta \Leftarrow \text{يوجد مستوي } \pi'' \ // \ \pi_1 \end{array} \right.$

ومنه: $\pi' // \pi'' // \pi_1$

ولدينا من الفرض $AB \perp \pi_1$ وبالتالي AB ثابت منحى ----- ②

من ① و ② نجد أنّ: $\vec{AB}$ ثابت طويلة وثابت منحى:

$$\vec{AB} = C$$

ومنه بالاشتقاق نجد: $\dfrac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{0}$; الفراغ الثابت $\forall q \in$

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{O_1B} - \vec{O_1A})}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{O_1B}}{dt} = \frac{d\vec{O_1A}}{dt} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A$$

وبما أنّ السرع متساوية فالحركة انسحابية.

مبرهنة:

إنّ المركز الآني للدوران إن وجد فهو وحيد.

نفرض أنّ I_2 و I_1 مركزان آنيان للدوران وهما أيضاً نقطتان من المستوي المتحرك ومنه في لحظة محددة:

$\vec{V}_{I_2} = 0$ و $\vec{V}_{I_1} = 0$ ومن علاقة السرعة بإعتبار I_1 قطب الحركة يكون:

$$\vec{V}_{I_2} = \vec{V}_{I_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{I_1I_2}$$

وبما أنّه من الفرض $\vec{V}_{I_2} = 0$ و $\vec{V}_{I_1} = 0$ نعوض فنجد:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{I_1I_2} = 0$$

وبما أنّ الحركة مستوية فإنّ $\vec{\omega} \perp \vec{I_1I_2}$ دوماً وأيضاً $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ ومنه $\vec{I_1I_2} = 0$ أي أنّ I_1 تنطبق على I_2 ومنه $I_1 = I_2$ وهو ما يبين أن المركز الآني للدوران إن وجد فهو وحيد.

مسألة :

لدينا جسم صلب يتحرك بحركة إنسحابية ، معادلات الحركة هي:

$$x_0 = \sin(t) ، y_0 = 2\cos(t) ، z_0 = 1$$

ولتكن M نقطة بحيث $\vec{OM} = (2, 0, -1)$

عيّن مسار النقطة O ومسار النقطة M وسرعة وتسارع النقطة M .

في أي حركة عند تعيين مسار النقطة O نقوم بحذف الزمن من معادلات الحركة

* تعيين مسار النقطة O :

$$x_0^2 = \sin^2(t) \;...(1) ، \; y_0^2 = 4\cos^2(t) \;...(2) ، \; z_0^2 = 1 \;...(3)$$

بجمع (1) و (2) نجد أن :

$$x_0^2 + y_0^2 = \sin^2(t) + 4\cos^2(t)$$

$$\Rightarrow x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} = 1 \;......(*)$$

مقطعه قطع ناقص في المستوي xy ومنه فإن المسار يتعين من العلاقة (*) والعلاقة (3) .

* تعيين مسار النقطة M :

لتعيينه نوجد شعاع موضع النقطة M في الجملة الثابتة :

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$$

لدينا العلاقات التحليلية لشعاع الموضع للنقطة M في الجملة الثابتة هي :

$$\begin{cases} x_1 = x_0(t) + x \\ y_1 = y_0(t) + y \\ z_1 = z_0(t) + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sin(t) + 2 \\ y_1 = 2\cos(t) + 0 \\ z_1 = 1 + (-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = \sin(t) \;....(1) \\ \frac{y_1}{2} = \cos(t) \;.....(2) \\ z_1 = 0 \;..........(3) \end{cases}$$

بتربيع وجمع (1) و (2) نجد :

$$(x_1-2)^2 + \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 = 1 \;....(*)$$

وهي معادلة قطع ناقص في المستوي XY ومنه المسار يتعين من المعادلة (*) والمعادلة (3) .

* حساب سرعة النقطة M :

$$\vec{V_M} = \begin{cases} x_1' = (\sin(t)+2)' = \cos(t) \\ y_1' = (2\cos(t))' = -2\sin(t) \\ z_1' = (0)' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V_M} = (\cos(t), -2\sin(t), 0)$$

* حساب تسارع النقطة M :

$$\vec{\gamma_M} = \begin{cases} x_1'' = (\cos(t))' = -\sin(t) \\ y_1'' = (-2\sin(t))' = -2\cos(t) \\ z_1'' = (0)' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma_M} = (-\sin(t), -2\cos(t), 0)$$

مسألة :

تتحرك إسطوانة دائرية حول محورها الثابت بمعادلة حركة هي $\varphi = \alpha.\log(1+\frac{w_0}{\alpha}t)$ حيث α و w_0 ثوابت والمطلوب:

1) تعيين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي للجسم .
2) تعيين سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار r .
3) تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع الناظمي والتسارع الكلي .
4) تعيين القيمة العددية للسرعة والتسارع عندما $(t \to \infty)$.

نختار جملة محاور ثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ حيث O_1Z_1 ينطبق على محور الأسطوانة ونختار جملة محاور متماسكة مع الجسم OXYZ حيث OZ منطبق على O_1Z_1 وبالتالي يكون $O_1=O$

1)* تعيين شعاع الدوران :

$$\vec{\omega} = \varphi'.\vec{k} = \left(\alpha.\frac{\frac{w_0}{\alpha}}{1+\frac{w_0}{\alpha}t}\right).\vec{k} = \frac{\alpha.w_0}{\alpha+w_0t}.\vec{k}$$

* تعيين شعاع التسارع الزاوي :

$$\vec{\varepsilon} = \omega'.\vec{k} = -\frac{\alpha w_0^2}{(\alpha+w_0t)^2}.\vec{k}$$

نلاحظ أن $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{\omega}$ من جهتين مختلفتين فالحركة متباطئة .

2) * تعيين السرعة على الجملة المتماسكة :

ليكن لدينا $M \in S$ حيث : $M=(r,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + (\omega.r).\vec{j} + 0.\vec{k}$$

$$= (\omega r).\vec{j} = \left(\frac{\alpha.\omega_0}{\alpha+\omega_0 t}.r\right).\vec{j}$$

* تعيين التسارع على الجملة المتماسكة :

$$\vec{\mu}_M = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & V_M & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\varepsilon.r).\vec{j} + \left[-(\omega.V_M).\vec{i}\right]$$

$$= \left(-\frac{\alpha.\omega_0^2}{(\alpha+\omega_0 t)^2}.r\right).\vec{j} - \left(\frac{\alpha^2.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}\right).\vec{i}$$

* تعيين السرعة على الجملة الثابتة :

مركبات النقطة M على الجملة الثابتة هي :

$$\begin{cases} x_1 = x.\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 = x.\sin\theta + y.\cos\theta \\ z_1 = z \end{cases}$$

لدينا $M=(r,0,0)$ على الجملة المتماسكة فيكون مركبات M على الجملة الثابتة هي :

$$\begin{cases} x_1 = r.\cos\theta \\ y_1 = r.\sin\theta \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ r.\cos\theta & r.\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\omega.r.\sin\theta)\vec{i}_1 + (\omega.r.\cos\theta)\vec{j}_1$$

$$= -\left(\frac{\alpha.\omega_0.r}{\alpha+\omega_0 t}\sin\theta\right)\vec{i}_1 + \left(\frac{\alpha.\omega_0.r}{\alpha+\omega_0 t}.\cos\theta\right)\vec{j}_1$$

* تعيين التسارع على الجملة الثابتة :

$$\vec{\mu}_M = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_M$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ r.\cos\theta & r.\sin\theta & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega.r.\sin\theta & \omega.r.\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-\varepsilon.r.\sin\theta)\vec{i}_1 + (\varepsilon.r.\cos\theta)\vec{j}_1 + (-\omega^2.r.\cos\theta)\vec{i}_1 + (\omega^2.r.\sin\theta)\vec{j}_1$$

$$= (-\varepsilon.r.\sin\theta - \omega^2.r.\cos\theta)\vec{i}_1 + (\varepsilon.r.\cos\theta + \omega^2.r.\sin\theta)\vec{j}_1$$

$$= \left(\frac{\alpha.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}\sin\theta - \frac{\alpha^2.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}\cos\theta\right)\vec{i}_1 + \left(-\frac{\alpha.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}.\cos\theta + \frac{\alpha^2.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}.\sin\theta\right)\vec{j}_1$$

3) * تعيين التسارع المماسي على الجملة المتماسكة :

$$\vec{\mu}_T = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\varepsilon.r)\vec{j} = \left(-\frac{\alpha.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}\right)\vec{j}$$

* تعيين التسارع المماسي على الجملة الثابتة :

$$\vec{\mu}_T = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ r.\cos\theta & r.\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-\varepsilon.r.\sin\theta)\vec{i}_1 + (\varepsilon.r.\cos\theta)\vec{j}_1$$

$$= \left(\frac{\alpha.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}\sin\theta\right)\vec{i}_1 - \left(\frac{\alpha.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}.\cos\theta\right)\vec{j}_1$$

* تعيين التسارع الناظمي على الجملة المتماسكة :

$$\vec{\mu}_N = \vec{\omega}\wedge\vec{V}_M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & V_M & 0 \end{vmatrix} = (-\omega.V_M)\vec{i} = \left(-\frac{\alpha^2.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}\right)\vec{i}$$

* تعيين التسارع الناظمي على الجملة الثابتة :

$$\vec{\mu}_N = \vec{\omega}\wedge\vec{V}_M = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega.r.\sin\theta & \omega.r.\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (-\omega^2.r.\cos\theta)\vec{i}_1 \\ +(\omega^2.r.\sin\theta)\vec{j}_1 \end{matrix}$$

$$= \left(-\frac{\alpha^2.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}.\cos\theta\right)\vec{i}_1 + \left(\frac{\alpha^2.\omega_0^2.r}{(\alpha+\omega_0 t)^2}.\sin\theta\right)\vec{j}_1$$

4) إنّ القيمة العددية للسرعة والتسارع في كلتا الجملتين المتماسكة والثابتة هي الصفر (0).

مسألة :

اسطوانة دائرية تتحرك بحركة لولبية، محورها ينطبق على محور الأسطوانة، عيّن سرعة وتسارع نقطة من سطح الأسطوانة بفرض أنّ الخطوة المختزلة $b=2$ ومعادلة حركتها $\theta = 2t^2$.

نستخدم الجملة المتماسكة :

نختار جملة محاور ثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ بحيث O_1Z_1 ينطبق على محور الدوران ونختار جملة محاور متماسكة $OXYZ$ بحيث OZ ينطبق على محور الدوران ونختار النقطة M من سطح الأسطوانة حيث $M(x,y,z)$.

* تعيين سرعة النقطة M :

$$\vec{V}_M = b.\theta'.\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$= 2.(4t).\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= 8t.\vec{k} + x.\omega.\vec{j} - y.\omega.\vec{i}$$

$$= -y.\omega.\vec{i} + x.\omega.\vec{j} + 8t.\vec{k}$$

$$= -4t.y.\vec{i} + 4t.x.\vec{j} + 8t.\vec{k}$$

* تعيين تسارع النقطة M :

$$\vec{\gamma}_M = b.\theta''.\vec{k} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_M$$

$$= 8\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -4ty & 4tx & 8t \end{vmatrix}$$

$$= 8.\vec{k} - \varepsilon.y.\vec{i} + \varepsilon.x.\vec{j} - 4tx.\omega.\vec{i} - 4t.\omega.y.\vec{j}$$

$$= -(\varepsilon.y + 4tx.\omega)\vec{i} + (\varepsilon.x - 4t.\omega.y)\vec{j} + 8.\vec{k}$$

$$= (4y + 16t^2x)\vec{i} + (4x - 16t^2y)\vec{j} + 8.\vec{k}$$

مسألة :

يتحرك قرص دائري نصف قطره a بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة $\omega = \omega_0$ علماً أنّ القرص ينتقل بمقدار $2\omega_0$ عندما يتم القرص دورة كاملة حول محوره، والمطلوب: تعيين مسار وسرعة وتسارع نقطة M من محيط القرص.

$$S = B = 2\pi b \Rightarrow 2\omega_0 = 2\pi b \Rightarrow b = \frac{\omega_0}{\pi}$$

لحساب زاوية الدوران θ نقوم بمكاملة ω ومنه :

$$\omega = \theta' \Rightarrow \theta = \int \omega dt = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + \theta_0$$

في لحظة البدء يكون $\theta = 0$ و $t = 0$ ومنه $\theta_0 = 0$

ومنه بالتعويض نجد أنّ : $\theta = \omega_0 t$

نختار جملة محاور ثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ بحيث O_1Z_1 ينطبق على محور الدوران، ونختار جملة محاور متماسكة $OXYZ$ بحيث OZ ينطبق على محور الدوران.

* تعيين مسار النقطة M :

$$\overrightarrow{O_1M} = S.\vec{k} + \overrightarrow{OM}$$

$$= b.\theta.\vec{k} + \overrightarrow{OM}$$

$$= b.\theta.\vec{k} + x\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$= x.\vec{i} + y.\vec{j} + (z + b.\theta).\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O_1M} = x(\cos\theta.\vec{i_1} + \sin\theta.\vec{j_1}) + y(-\sin\theta.\vec{i_1} + \cos\theta.\vec{j_1}) + (z + b\theta).\vec{k_1}$$

وبالإسقاط على جملة المحاور نحصل على :

$$\begin{cases} x_1 = x.\cos\theta - y.\sin\theta \\ y_1 = x.\sin\theta + y\cos\theta \\ z_1 = z + b.\theta \end{cases}$$

ولكن $\theta = \omega_0 t$ ومنه :

$$\begin{cases} x_1 = x.\cos(\omega_0 t) - y.\sin(\omega_0 t) \\ y_1 = x.\sin(\omega_0 t) + y.\cos(\omega_0 t) \\ z_1 = z + b(\omega_0 t) \end{cases}$$

لتعيين المسار نحذف الزمن من المعادلات السابقة:

نفرض أن النقطة $M(a,0,0)$ يكون:

$$\begin{cases} x_1 = a.\cos(\omega_0 t) \text{ ------- } ① \\ y_1 = a.\sin(\omega_0 t) \text{ ------- } ② \\ z_1 = b(\omega_0 .t) \text{ ------- } ③ \end{cases}$$

من ③ نجد أن:

$$t = \frac{z_1}{b\omega_0} = \frac{z_1}{\frac{\omega_0^2}{\pi}} = \frac{\pi z_1}{\omega_0^2}$$

نعوض قيمة t في ① و ② نجد:

$$\begin{cases} x_1 = a.\cos\left(\frac{\pi z_1}{\omega_0}\right) \text{ ----- } \mathrm{I} \\ y_1 = a.\sin\left(\frac{\pi z_1}{\omega_0}\right) \text{ ----- } \mathrm{II} \end{cases}$$

بتربيع وجمع العلاقتين I و II نجد:

$$x_1^2+y_1^2 = a^2\left(\cos^2\left(\frac{\pi z_1}{\omega_0}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi z_1}{\omega_0}\right)\right)$$

$$\Rightarrow x_1^2+y_1^2 = a^2$$

وهي معادلة دائرة وبالتالي مسار النقطة هو تقاطع المعادلة الأخيرة مع إحدى المعادلتين I أو II.

* تعيين سرعة النقطة M :

$$\vec{V}_M = \begin{cases} x_1' = (a.\cos(\omega_0 t))' = -a\omega_0.\sin(\omega_0 t) \\ y_1' = (a.\sin(\omega_0 t))' = a.\omega_0.\cos(\omega_0 t) \\ z_1' = (b.\omega_0.t)' = b.\omega_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = \left(-a.\omega_0.\sin(\omega_0 t),\ a.\omega_0.\cos(\omega_0 t),\ b\omega_0\right)$$

* تعيين تسارع النقطة M :

$$\vec{\gamma}_M = \begin{cases} x_1'' = -a.\omega_0^2.\cos(\omega_0 t) \\ y_1'' = -a.\omega_0^2.\sin(\omega_0 t) \\ z_1'' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_M = \left(-a\omega_0^2\cos(\omega_0 t),\ -a\omega_0^2\sin(\omega_0 t),\ 0\right)$$

لدينا التسارع المماسي والإنسحابي معدومين وتملك فقط التسارع الناظمي ومنه تكون الحركة لولبية منتظمة.

مسألة:

تدور إسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $\omega=2$ وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة قيمتها $v=6$ والمطلوب:

تعيين الخطوة المختزلة للحركة اللولبية للأسطوانة ثم تعيين موضع ومسار وسرعة وتسارع نقطة من الأسطوانة إحداثياتها بالنسبة لمحاور متماسكة مع الأسطوانة $(2,2,3)$.

$$\omega = \theta' \Rightarrow \theta = \int \omega\, dt = \int 2\, dt = 2t+\theta_0$$

وفي لحظة البدء يكون: $\theta=0$ و $t=0$ ومنه يكون $\theta_0=0$

وبالتعويض نجد أن: $\theta = 2t$

$$v = s' = b.\theta' \Rightarrow 6 = b(2) \Rightarrow \boxed{b=3}$$

وهي الخطوة المختزلة للولب.

* تعيين موضع النقطة $M(2,2,3)$:

$$\begin{cases} x_1 = x.\cos\theta - y.\sin\theta \\ y_1 = x.\sin\theta + y.\cos\theta \\ z_1 = z + b\theta \end{cases}$$

$$x_1 = 2.\cos(2t) - 2\sin(2t) \text{ ------- } ①$$

$$\Rightarrow y_1 = 2.\sin(2t)+2\cos(2t) \text{ ------- } ②$$

$$z_1 = 3+6t \text{ ------------------ } ③$$

* تعيين مسار النقطة $M(2,2,3)$:

لتعيين المسار نحذف الزمن من المعادلات السابقة.

من ③ نجد: $t = \frac{z_1-3}{6}$ ، نعوض قيمة t في ① و ② فنجد:

$$\begin{cases} x_1 = 2\cos\left(\frac{z_1-3}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{z_1-3}{3}\right) \text{ ---- } \mathrm{I} \\ y_1 = 2.\sin\left(\frac{z_1-3}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{z_1-3}{3}\right) \text{ --- } \mathrm{II} \end{cases}$$

بتربيع وجمع العلاقتين I و II نجد:

$$x_1^2+y_1^2 = 4\Big[\cos^2\left(\frac{z_1-3}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{z_1-3}{3}\right)-2\cos\left(\frac{z_1-3}{3}\right).\sin\left(\frac{z_1-3}{3}\right)$$
$$+\sin^2\left(\frac{z_1-3}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{z_1-3}{3}\right)+2\sin\left(\frac{z_1-3}{3}\right).\cos\left(\frac{z_1-3}{3}\right)\Big]$$

$$\Rightarrow x_1^2+y_1^2 = 4(2) = 8$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها $2\sqrt{2}$ وتكون معادلة المسار هي تقاطع المعادلة الأخيرة مع إحدى المعادلتين I أو II.

مسائل

Michael Abdoush

* تعيين سرعة النقطة M :

$$\vec{V}_M = b.\theta'.\vec{k} + \vec{\omega}\wedge\vec{OM}$$

$$= 6.\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6.\vec{k} + (-4)\vec{i} + 4\vec{j} + 0.\vec{k}$$

$$= -4\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

* تعيين تسارع النقطة M :

$$\vec{\mu}_M = b.\theta'.\vec{k} + \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_M$$

$$= 0 + 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -8\vec{i} - 8\vec{j} + 0$$

$$= -8.\vec{i} - 8.\vec{j}$$

مسألة:

يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول نقطة ثابتة O وفق المعادلات : $\varphi = 2t$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\phi = 30t$

والمطلوب : تعيين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي ومعادلتي مخروط القاعدة ومخروط المتدحرج ثم تعيين سرعة وتسارع نقطة M من الجسم إحداثياتها بالنسبة للجملة المتماسكة $(0,0,-1)$.

* تعيين شعاع الدوران :

$$\vec{\omega} = \varphi'.\vec{k}_1 + \theta'.\vec{u} + \phi'.\vec{k}$$

$$= 2.\vec{k}_1 + 30\vec{k}$$

$$= 2(\sin\theta.\vec{v} + \cos\theta.\vec{k}) + 30\vec{k}$$

$$= \vec{v} + \sqrt{3}.\vec{k} + 30\vec{k}$$

$$= \sin\phi.\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j} + (\sqrt{3}+30).\vec{k}$$

$$= \sin(30t)\vec{i} + \cos(30t)\vec{j} + (\sqrt{3}+30)\vec{k}$$

* تعيين شعاع التسارع الزاوي :

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}' = 30\cos(30t)\vec{i} - 30\sin(30t)\vec{j}$$

* تعيين معادلة مخروط المتدحرج :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{x}{\sin(30t)} = \frac{y}{\cos(30t)} = \frac{z}{(\sqrt{3}+30)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sin(30t)} = \dfrac{z}{\sqrt{3}+30} \\[2ex] \dfrac{y}{\cos(30t)} = \dfrac{z}{\sqrt{3}+30} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(30t) = \dfrac{(\sqrt{3}+30)x}{z} \quad \text{------} ① \\[2ex] \cos(30t) = \dfrac{(\sqrt{3}+30)y}{z} \quad \text{------} ② \end{cases}$$

بتربيع وجمع ① و② نجد :

$$\frac{(\sqrt{3}+30)^2x^2}{z^2} + \frac{(\sqrt{3}+30)^2y^2}{z^2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{z^2}{(\sqrt{3}+30)^2}$$

وهي معادلة مخروط المتدحرج .

* تعيين معادلة مخروط القاعدة :

لدينا $\vec{\omega} = 2.\vec{k}_1 + 30\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = 2.\vec{k}_1 + 30(-\sin\theta.\vec{v}_1 + \cos\theta.\vec{k}_1)$$

$$= 2.\vec{k}_1 - 15\vec{v}_1 + 15\sqrt{3}\,\vec{k}_1$$

$$= 15\sin\varphi\,\vec{i}_1 - 15\cos\varphi\,\vec{j}_1 + (2+15\sqrt{3})\vec{k}_1$$

$$= 15\sin(2t)\vec{i}_1 - 15\cos(2t)\vec{j}_1 + (2+15\sqrt{3})\vec{k}_1$$

ومنه معادلة مخروط القاعدة هي :

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1} \Rightarrow \frac{x_1}{15\sin(2t)} = \frac{y_1}{-15\cos(2t)} = \frac{z_1}{2+15\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{15\sin(2t)} = \dfrac{z_1}{2+15\sqrt{3}} \\[2ex] \dfrac{y_1}{-15\cos(2t)} = \dfrac{z_1}{2+15\sqrt{3}} \end{cases}$$

مسألة :

صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين $O\hat{A}B$ وقائم الزاوية في A ، طول ضلعه القائم يساوي (2) ونفرض أنّ الصفيحة تدور حول رأسها الثابت O بحيث يبقى ضلعها OA ملازماً للمستوي الثابت OX_1Y_1

1) عيّن شعاع الدوران الآني .

2) عيّن معادلات حركة الصفيحة وسرعة الرأس B من الصفيحة وذلك بفرض : $|\vec{v}(A)| = 2$ ، $|\vec{\omega}| = 2$

نختار جملة المحاور $OX_1Y_1Z_1$ الثابتة ونختار جملة المحاور المتماسكة $OXYZ$ وبما أنّ الحركة دورانية حول نقطة ثابتة فلدينا ثلاث وسطاء للحركة وبما أنّ OA ملازماً للمستوي الثابت $O_1X_1Y_1$ فإنّ $\varphi = 0$ وبالتالي ينطبق OX على الفصل المشترك Ou ومنه وسطاء الحركة هما ψ و θ .

1) * تعيين شعاع الدوران الآني :

$$\vec{\omega} = \varphi'\vec{k_1} + \theta'\vec{u} + \psi'\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \varphi'\vec{k_1} + \theta'\vec{u}$$

$$= \varphi'\vec{k_1} + \theta'\vec{i}$$

■ على الجملة المتماسكة :

$$= \varphi'(\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k}) + \theta'\vec{i}$$

$$= \varphi'\sin\theta\,\vec{v} + \varphi'\cos\theta\,\vec{k} + \theta'\vec{i}$$

$$= \varphi'\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \varphi'\sin\theta\cos\varphi\,\vec{j} + \varphi'\cos\vec{k} + \theta'\vec{i}$$

$$= \theta'\vec{i} + \varphi'\sin\theta\,\vec{j} + \varphi'\cos\theta\,\vec{k}$$

■ على الجملة الثابتة :

$$\vec{\omega} = \varphi'\vec{k_1} + \theta'\vec{i}$$

$$= \varphi'\vec{k_1} + \theta'\cos\varphi\,\vec{u} + \theta'\sin\varphi\,\vec{v}$$

$$= \varphi'\vec{k_1} + \theta'\cos\varphi\,\vec{i_1} + \theta'\sin\varphi\,\vec{j_1}$$

$$= \theta'\cos\varphi\,\vec{i_1} + \theta'\sin\varphi\,\vec{j_1} + \varphi'\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(2t) = \dfrac{(2+15\sqrt{3})\,x_1}{15 z_1} \quad \ldots\ldots (1) \\[2ex] \cos(2t) = \dfrac{(2+15\sqrt{3})\,y_1}{-15 z_1} \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بتربيع وجمع (1) و(2) نجد :

$$\frac{(2+15\sqrt{3})^2 x_1^2}{225 z_1^2} + \frac{(2+15\sqrt{3})^2 y_1^2}{225 z_1^2} = 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = \frac{225 \cdot z_1^2}{(2+15\sqrt{3})^2}$$

وهي معادلة مخروط القاعدة .

* تعيين سرعة النقطة M :

$$\vec{V_M} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin(30t) & \cos(30t) & \sqrt{3}+30 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\cos(30t)\,\vec{i} + \sin(30t)\,\vec{j}$$

* تعيين تسارع النقطة M :

$$\vec{\gamma_M} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V_M}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 30\cos(30t) & -30\sin(30t) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin(30t) & \cos(30t) & \sqrt{3}+30 \\ -\cos(30t) & \sin(30t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 30\sin(30t)\,\vec{i} + 30\cos(30t)\,\vec{j} - (\sqrt{3}+30)\sin(30t)\,\vec{i} - (\sqrt{3}+30)\cos(30t)\,\vec{j} + 1.\vec{k}$$

$$= 30\sin(30t)\,\vec{i} + 30\cos(30t)\,\vec{j} - \sqrt{3}\sin(30t)\,\vec{i} - 30\sin(30t)\,\vec{i} - \sqrt{3}\cos(30t)\,\vec{j} - 30\cos(30t)\,\vec{j} + 1.\vec{k}$$

$$= -\sqrt{3}\sin(30t)\,\vec{i} - \sqrt{3}\cos(30t)\,\vec{j} + \vec{k}$$

2) * تعيين معادلات حركة الصفيحة:

■ إيجاد φ :

$$\vec{V_A} = \vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \theta' & \varphi'\sin\theta & \varphi'\cos\theta \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\varphi'\cos\theta.\vec{j} - 2\varphi'.\sin\theta.\vec{k}$$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{4\varphi'^2.\cos^2\theta + 4\varphi'^2\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow 2 = 2\varphi' \Rightarrow \varphi' = 1$$

وبالمكاملة يكون: $\varphi = t + \varphi_0$

ولكن في لحظة البدء يكون $t=0$ و $\varphi=0$ ومنه $\varphi_0 = 0$

وبالتعويض نجد: $\boxed{\varphi = t}$

■ إيجاد θ :

$$\vec{\omega} = \varphi'.\vec{K_1} + \theta'.\vec{i}$$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{\varphi'^2 + \theta'^2} \Rightarrow 4 - \varphi'^2 = \theta'^2$$

$$\Rightarrow \theta'^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \theta' = \mp\sqrt{3}$$

ولكن $\theta' = -\sqrt{3}$ مرفوض ومنه $\theta' = +\sqrt{3}$ وبالمكاملة يكون: $\theta = \sqrt{3}t + \theta_0$ ولكن في لحظة البدء يكون $t=0$ و $\theta = 0$ ومنه $\theta_0 = 0$ وبالتعويض نجد: $\boxed{\theta = \sqrt{3}t}$

■ نعلم أن: $\boxed{\phi = 0}$

* تعيين سرعة الرأس B في الصفيحة:

$$\vec{V_B} = \vec{\omega} \wedge \vec{OB} = \vec{\omega} \wedge (\vec{OA} + \vec{AB})$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{OA} + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \theta' & \varphi'\sin\theta & \varphi'\cos\theta \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \theta' & \varphi'\sin\theta & \varphi'\cos\theta \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\varphi'\cos\theta\vec{j} - 2\varphi'\sin\theta.\vec{k} + (-2\varphi'\cos\theta)\vec{i} + 2\theta'.\vec{k}$$

$$= -2\varphi'\cos\theta.\vec{i} + 2\varphi'\cos\theta\vec{j} + (2\theta' - 2\varphi'\sin\theta)\vec{k}$$

$$= -2\cos(\sqrt{3}t)\vec{i} + 2\varphi'\cos(\sqrt{3}t)\vec{j} + (2\sqrt{3} - 2\sin(\sqrt{3}t))\vec{k}$$

طلب إضافي: أوجد القاعدة والمتدحرج تحليلياً:

* تعيين القاعدة عند النقطة $A = (2,0,0)$:

إن إحداثيات نقطة من الجملة الثابتة هي:

$$\begin{cases} x_1 = x.\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 = x.\sin\theta + y\cos\theta \\ z_1 = z \end{cases}$$

ومنه يكون إحداثيات النقطة A من الجملة الثابتة هي:

$$\begin{cases} x_1 = 2\cos(\sqrt{3}t) \\ y_1 = 2\sin(\sqrt{3}t) \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{P_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1} \Rightarrow \frac{2\cos(\sqrt{3}t)}{\theta'.\cos\varphi} = \frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\theta'.\sin\varphi} = \frac{0}{\varphi'}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}\cos(t)} = \frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}\sin(t)} = \frac{0}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\cos(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}\cos(t)} = \dfrac{0}{1} \\ \dfrac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}\sin(t)} = \dfrac{0}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos(\sqrt{3}t) = 0 \text{ --- (I)} \\ 2\sin(\sqrt{3}t) = 0 \text{ --- (II)} \end{cases}$$

من (I) نجد أن:

$$\cos(\sqrt{3}t) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}k \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2\sqrt{3}}k$$

نعوض في (II) فيكون: $\boxed{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}k\right) = 0}$

وهي معادلة القاعدة.

* تعيين المتدحرج عند النقطة $A(2,0,0)$:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{2}{\theta'} = \frac{0}{1.\sin(\sqrt{3}t)} = \frac{0}{1.\cos(\sqrt{3}t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{0}{\sin(\sqrt{3}t)} \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{0}{\cos(\sqrt{3}t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin(\sqrt{3}t) = 0 \text{ --- (I)} \\ 2\cos(\sqrt{3}t) = 0 \text{ --- (II)} \end{cases}$$

من (II) نجد

$$\cos(\sqrt{3}t) = 0 \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2\sqrt{3}}k$$

نعوض في (I) فنجد: $\boxed{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}k\right) = 0}$

وهي معادلة المتدحرج.

مسألة :

يتحرك قضيب OA طوله ℓ في الفراغ بحيث تبقى ذراتيه O ثابتة، تتعين حركته بتابعية زوايا أولر :

$$\psi = t \ ، \ \theta = 2t \ ، \ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

والمطلوب : تعيين شعاع الدوران الآني وشعاع التسارع الآني ومخروطي القاعدة والمتدحرج وسرعة ذراتية القضيب A وتسارعها.

* تعيين شعاع الدوران الآني :

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k_1} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$$

- على الجملة الثابتة :

$$\vec{\omega} = \vec{k_1} + 2\vec{u}$$
$$= \vec{k_1} + 2\cos\psi \, \vec{i_1} + 2 \sin\psi \, \vec{j_1}$$
$$= 2\cos(t)\vec{i_1} + 2\sin(t)\vec{j_1} + \vec{k_1}$$

- على الجملة المتماسكة :

$$\vec{\omega} = \vec{k_1} + 2\vec{u}$$
$$= \sin\theta \cdot \vec{v} + \cos\theta \cdot \vec{k} + 2\cos\varphi \, \vec{i} - 2\sin\varphi \, \vec{j}$$
$$= \sin\theta \cdot \sin\varphi \, \vec{i} + \sin\theta \cdot \cos\varphi \, \vec{j} + \cos\theta \cdot \vec{k} + 2\cos\varphi \, \vec{i} - 2\sin\varphi \, \vec{j}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \cdot \vec{i} + \sqrt{2}\cdot\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \, \vec{j} - \sqrt{2}\,\vec{j} + \cos\theta \cdot \vec{k}$$
$$= \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta - \sqrt{2}\right)\vec{j} + \cos\theta \cdot \vec{k}$$
$$= \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t) - \sqrt{2}\right)\vec{j} + \cos(2t)\vec{k}$$

* تعيين شعاع التسارع الآني :

- على الجملة الثابتة :

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}' = -2\sin(t)\vec{i_1} + 2\cos(t)\cdot\vec{j_1}$$

- على الجملة المتماسكة :

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}' = \sqrt{2}\cos(2t)\vec{i} + \sqrt{2}\cos(2t)\vec{j} - 2\sin(2t)\vec{k}$$

* تعيين مخروط القاعدة :

ليكن Δ محور الدوران ولتكن $O_1(x_1, y_1, z_1)$ ومنه :

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1} \Rightarrow \frac{x_1}{2\cos(t)} = \frac{y_1}{2\sin(t)} = \frac{z_1}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{2\cos(t)} = \dfrac{z_1}{1} \\ \dfrac{y_1}{2\sin(t)} = \dfrac{z_1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(t) = \dfrac{x_1}{2z_1} \text{ --- I} \\ \sin(t) = \dfrac{y_1}{2z_1} \text{ --- II} \end{cases}$$

بالتربيع والجمع لـ I و II نجد :

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{4z_1^2} = 1 \Rightarrow \boxed{x_1^2 + y_1^2 = 4z_1^2}$$

وهي المعادلة الديكارتية للقاعدة.

* تعيين مخروط المتدحرج :

لتكن $M \in \Delta$ حيث $M(x, y, z)$ ومنه :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)}}_{1} = \underbrace{\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t) - \sqrt{2}}}_{2} = \underbrace{\frac{z}{\cos(2t)}}_{3}$$

الجمع 1 و 2 نجد :

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}\sin(2t)} = \frac{z}{\cos(2t)} \Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{2}z} = \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{2}z} = tg(2t) \Rightarrow$$ نأخذ arctg الطرفين

$$\Rightarrow 2t = arc\,tg\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}z}\right)$$

ولدينا أيضاً من المعادلات 1 و 3 معاً وأيضاً 2 و 3 معاً يكون :

$$x \cdot \cos(2t) = \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)\right)z \text{ ------ I}$$
$$y \cdot \cos(2t) = \left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)\right)z \text{ ------ II}$$

وتسمى هذه المعادلات بالمعادلات الوسيطية للمتدحرج

أما لإيجاد المعادلات الديكارتية للمتدحرج نقوم بحذف الزمن :

بتقسيم I على II نجد :

$$\frac{x}{y} = \frac{2 + \sin(2t)}{-2 + \sin(2t)}$$

نعوض قيمة الزمن فنحصل على :

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{2 + \sin\left(arc\,tg\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}z}\right)\right)}{-2 + \sin\left(arc\,tg\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}z}\right)\right)}}$$

وهي المعادلة الديكارتية للمتدحرج.

* تعيين سرعة زاوية القطب A :

نختار A على المحور ox (محور الجملة المماسكة) فيكون :

ومنه : $A=(\ell,0,0)$

$$\vec{V_A}=\vec{\omega}\wedge\vec{OA}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ p&q&r\\ \ell&0&0\end{vmatrix}$$

$$=r.\ell.\vec{j}-q.\ell.\vec{k}$$

$$=\ell.\cos(2t)\vec{j}-\ell\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)-\sqrt{2}\right)\vec{k}$$

* تعيين تسارع زاوية القطب A :

$$\vec{\mu_A}=\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OA}+\vec{\omega}\wedge\vec{V_A}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ p^*&q^*&r^*\\ \ell&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ p&q&r\\ 0&v_y&v_z\end{vmatrix}$$

$$=\ell.r^*.\vec{j}-\ell.q^*.\vec{k}+(q.v_z-r.v_y)\vec{i}-p.v_z\vec{j}+p.v_y.\vec{k}$$

$$=(q.v_z-r.v_y)\vec{i}+(\ell.r^*-p.v_z)\vec{j}+(p.v_y-\ell.q^*)\vec{k}$$

$$=\Big[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)-\sqrt{2}\right)\left(-\ell.\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)+\sqrt{2}.\ell\right)-(\cos(2t))(\ell.\cos(2t))\Big]\vec{i}+\Big[(-2.\ell.\sin(2t))-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)+\sqrt{2}\right)\left(-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)+\sqrt{2}.\ell\right)\Big]\vec{j}$$
$$+\Big[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)+\sqrt{2}\right)(\ell.\cos(2t))-(\sqrt{2}.\ell.\cos(2t))\Big]\vec{k}$$

مسألة :

A,B,C ثلاث نقاط من جسم صلب إحداثياتها في لحظة معينة بجملة ثابتة هي : $A(0,0,0)$ ، $B(1,1,0)$ ، $C(1,1,1)$

ومركبات سرع هذه النقاط هي : $\vec{V_A}=(2,1,-3)$ ، $\vec{V_B}=(0,3,-1)$ ، $\vec{V_C}=(-1,2,-1)$ ، عيّن عناصر الحركة اللولبية المماسة في اللحظة t حركة الجسم (عناصر الفتل الآني).

عناصر الفتل هي : (ω, O', b)

* تعيين $\vec{\omega}$:

نختار A هي قطب الحركة وليكن $\vec{\omega}=(p_1,q_1,r_1)$ ومنه :

$$\vec{V_B}=\vec{V_A}+\vec{\omega}\wedge\vec{AB}$$

$$=(2,1,-3)+\begin{vmatrix}\vec{i_1}&\vec{j_1}&\vec{k_1}\\ p_1&q_1&r_1\\ 1&1&0\end{vmatrix}$$

$$=(2,1,-3)+(-r_1)\vec{i_1}+(r_1)\vec{j_1}+(p_1-q_1)\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow\vec{V_B}=(2,1,-3)+(-r_1,r_1,p_1-q_1)$$

$$\Rightarrow(0,3,-1)=(2-r_1,1+r_1,p_1-q_1-3)$$

$$\Rightarrow 2-r_1=0\Rightarrow\boxed{r_1=2}$$

$$1+r_1=3$$

$$p_1-q_1-3=-1\Rightarrow\boxed{p_1-q_1=2}$$

$$\vec{V_C}=\vec{V_A}+\vec{\omega}\wedge\vec{AC}$$

$$=(2,1,-3)+\begin{vmatrix}\vec{i_1}&\vec{j_1}&\vec{k_1}\\ p_1&q_1&r_1\\ 1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=(2,1,-3)+(q_1-r_1)\vec{i_1}+(-p_1+r_1)\vec{j_1}+(p_1-q_1)\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow(-1,2,-1)=(2+q_1-r_1,1-p_1+r_1,p_1-q_1-3)$$

$$\Rightarrow 2+q_1-r_1=-1\Rightarrow 2+q_1-2=-1\Rightarrow\boxed{q_1=-1}$$

$$\Rightarrow p_1-(-1)=2\Rightarrow\boxed{p_1=1}$$

$$\Rightarrow\vec{\omega}=(1,-1,2)$$

* تعيين O_1 :

نختار O_1 من Δ بحيث $O_1(x_1,y_1,z_1)$

$$\vec{V_{O_1}}=\vec{V_A}+\vec{\omega}\wedge\vec{AO_1}$$

$$=(2,1,-3)+\begin{vmatrix}\vec{i_1}&\vec{j_1}&\vec{k_1}\\ 1&-1&2\\ x_1&y_1&z_1\end{vmatrix}$$

$$=(2,1,-3)+(-z_1-2y_1)\vec{i_1}+(-z_1+2x_1)\vec{j_1}+(y_1+x_1)\vec{k_1}$$

$$=(2,1,-3)+(-z_1-2y_1,-z_1+2x_1,y_1+x_1)$$

$$=(2-z_1-2y_1,1-z_1+2x_1,y_1+x_1-3)$$

$$\Delta:\frac{v_x(O_1)}{p_1}=\frac{v_y(O_1)}{q_1}=\frac{v_z(O_1)}{r_1}$$

$$\Rightarrow\frac{2-z_1-2y_1}{1}=\frac{1-z_1+2x_1}{-1}=\frac{y_1+x_1-3}{2}$$

مسألة :

تعطى معادلات حركة جسم صلب بالشكل :

$x_0 = t$ ، $y_0 = -t$ ، $z_0 = 1$

$\psi = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = t$ ، $\varphi = 2t$

عيّن معادلات محور الفتل وخطوة اللولب في الحركة اللولبية المماسة لحركة الجسم ثم عيّن شعاع التسارع الزاوي الآني وسرعة وتسارع نقطة من الجسم إحداثياتها (x_1, y_1, z_1) .

* تعيين معادلات محور الفتل :

نعين أولاً شعاع الدوران :

$$\vec{\omega} = \psi'\vec{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$

$$= \vec{u} + 2\vec{k}$$

$$= (\cos\psi\,\vec{i_1} + \sin\psi\,\vec{j_1}) + 2(-\sin\theta\,\vec{v_1} + \cos\theta\,\vec{k_1})$$

$$= \cos\psi\,\vec{i_1} + \sin\psi\,\vec{j_1} - 2\sin\theta\,\vec{v_1} + 2\cos\theta\,\vec{k_1}$$

$$= \vec{j_1} - 2\sin(t)\,\vec{v_1} + 2\cos(t)\,\vec{k_1}$$

$$= \vec{j_1} - 2\sin(t)(-\sin\psi\,\vec{i_1} + \cos\psi\,\vec{j_1}) + 2\cos(t)\,\vec{k_1}$$

$$= \vec{j_1} - 2\sin(t)(-\vec{i_1}) + 2\cos(t)\,\vec{k_1}$$

$$= 2\sin(t)\,\vec{i_1} + \vec{j_1} + 2\cos(t)\,\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = (2\sin(t), 1, 2\cos(t))$$

نعين مركبات سرعة نقطة من محور الفتل .

نختار $O_1 \in \Delta$ حيث $O_1(x, y, z)$ وليكن $O(t, -t, 1)$

قطب الحركة :

$$\vec{V_{O_1}} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \wedge \vec{OO_1}$$

ولكن

$$\vec{V_O} = \begin{cases} x_0' = 1 \\ y_0' = -1 \\ z_0' = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V_O} = (1, -1, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{V_{O_1}} = (1, -1, 0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x-t & y+t & z-1 \end{vmatrix}$$

$$= (1, -1, 0) + (q_1 z - q_1 - r_1 y - r_1 t)\vec{i_1}$$

$$-(p_1 z - p_1 - r_1 x + r_1 t)\vec{j_1} + (p_1 y + p_1 t - q_1 x + q_1 t)\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2 - z_1 - 2y_1}{1} = \frac{1 - z_1 + 2x_1}{-1} \\ \frac{2 - z_1 - 2y_1}{1} = \frac{y_1 + x_1 - 3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + z_1 + 2y_1 = 1 - z_1 + 2x_1 \\ 4 - 2z_1 - 4y_1 = y_1 + x_1 - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z_1 = 3 - 2y_1 + 2x_1 \quad \text{(I)} \\ -2z_1 = -7 + 5y_1 + x_1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

بجمع (I) و (II) نجد :

$$-4 + 3y_1 + 3x_1 = 0$$

نختار $x_1 = 0$ فيكون : $y_1 = \frac{4}{3}$ ومنه $z_1 = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow O_1 = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

* تعيين b :

$$b = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{V}(A)}{\omega^2} = \frac{(1, -1, 2) \cdot (2, 1, -3)}{6}$$

$$= \frac{2 - 1 - 6}{6} = \frac{-5}{6}$$

حيث أن الإشارة السالبة تعني أن الحركة بعكس الاتجاه .

طلب إضافي

هل تنتمي النقطة $D(0,0,1)$ حيث $\vec{V_D} = (2,1,-3)$ في هذه اللحظة للجسم المعطى .

هنا نستطيع استخدام نظرية المساقط ولكن نستخدم الطريقة التالية :

$$\vec{V_D} \overset{?}{=} \vec{V_A} + \vec{\omega} \wedge \vec{AD}$$

$$(2, 1, -3) \overset{?}{=} (2, 1, -3) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (2, 1, -3) \overset{?}{=} (2, 1, -3) + (-1, -1, 0)$$

$$\Rightarrow (2, 1, -3) \neq (1, 0, -3)$$

وبالتالي النقطة D لا تنتمي للجسم المعطى .

$$= (1,-1,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 - t & y_1 - t & z_1 - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1,-1,0) + \big(z_1 - 1 - 2y_1\cos(t) - 2t\cos(t),$$
$$-2z_1\sin(t) + 2\sin(t) + 2x_1\cos(t) - 2t\cos(t),$$
$$2y_1\sin(t) + 2t\sin(t) - x_1 + t\big)$$

$$= \big(z_1 - 2y_1\cos(t) - 2t\cos(t), -2z_1\sin(t) + 2\sin(t) + 2x_1\cos(t) - 2t\cos(t) - 1, 2y_1\sin(t) + 2t\sin(t) - x_1 + t\big)$$

* تعيين تسارع النقطة $M(x_1, y_1, z_1)$:

$$\vec{\mu}_M = \vec{\mu}_o + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V_M}$$

$$= (0,0,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 2\cos(t) & 0 & -2\sin(t) \\ x_1 - t & y_1 - t & z_1 - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 2\sin(t) & 1 & 2\cos(t) \\ V_{x_1} & V_{y_1} & V_{z_1} \end{vmatrix}$$

$$= [2\sin(t)\cdot(y_1 - t)]\vec{i_1} - [2\cos(t)\cdot(z_1 - 1) - (-2\sin(t)\cdot(x_1 - t))]\vec{j_1}$$
$$+ [2\cos(t)\cdot(y_1 - t)]\vec{k_1} + [V_{z_1} - 2\cos(t)\cdot V_{y}]\vec{i_1}$$
$$- [2\sin(t) V_{z_1} - 2\cos(t)\cdot V_{x_1}]\vec{j_1} + [V_{x_1} - 2\sin(t)\cdot V_{y_1}]\vec{k_1}$$

$$= [2y_1\sin(t) - 2t\sin(t)]\vec{i_1} + [-2z_1\cos(t) + 2\cos(t)$$
$$-2x_1\sin(t) + 2t\cdot\sin(t)]\vec{j_1} + [2y_1\cos(t)$$
$$-2t\cos(t)]\vec{k_1} + [V_{z_1} - 2\cos(t)\cdot V_{y_1}]\vec{i_1}$$
$$- [2\sin(t)\cdot V_{z_1} - 2\cos(t)\cdot V_{x_1}]\vec{j_1} + [V_{x_1} - 2\sin(t)\cdot V_{y_1}]\vec{k_1}$$

$$= [2y_1\sin(t) - 2t\sin(t) + V_{z_1} - 2\cos(t)\cdot V_{y_1}]\vec{i_1}$$
$$+ [-2z_1\cos(t) + 2\cos(t) - 2x_1\sin(t) + 2t\sin(t)$$
$$-2\sin(t) V_{z_1} + 2\cos(t) V_{x_1}]\vec{j_1} + [2y_1\cos(t)$$
$$-2t\cos(t) + V_{x_1} - 2\sin(t)\cdot V_{y_1}]\vec{k_1}$$

$$= (1,-1,0) + (z - 1 - 2y\cos(t) - 2t\cos(t))\vec{i_1}$$
$$- (2z\sin(t) - 2\sin(t) - 2x\cos(t) + 2t\cos(t))\vec{j_1}$$
$$+ (2y\sin(t) + 2t\sin(t) - x + t)\vec{k_1}$$

$$= (1,-1,0) + \big(z - 1 - 2y\cos(t) - 2t\cos(t),$$
$$-2z\sin(t) + 2\sin(t) + 2x\cos(t) - 2t\cos(t), 2y\sin(t)$$
$$+ 2t\sin(t) - x + t\big)$$

$$\Rightarrow \vec{V_{O_1}} = \big(z - 2y\cos(t) - 2t\cos(t), -2z\sin(t) + 2\sin(t)$$
$$+ 2x\cos(t) - 2t\cos(t) - 1, 2y\sin(t) + 2t\sin(t)$$
$$- x + t\big)$$

ومنه معادلات محور الفتل ℓ :

$$\frac{V_x(O_1)}{p_1} = \frac{V_y(O_1)}{q_1} = \frac{V_z(O_1)}{r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{z - 2y\cos(t) - 2t\cos t}{2\sin(t)} = \frac{-2z\sin(t) + 2\sin(t) + 2x\cos(t) - 2t\cos(t) - 1}{1}$$

$$= \frac{2y\sin(t) + 2t\sin(t) - x + t}{2\cos(t)}$$

* تعيين خطوة اللولب :

$$b = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{V_o}}{\omega^2} = \frac{(2\sin(t), 1, 2\cos(t))\cdot(1,-1,0)}{4\sin^2(t) + 1 + 4\cos^2(t)}$$

$$= \frac{2\sin(t) - 1}{5}$$

ملاحظة

إذا طُلبَ حساب خطوة اللولب في اللحظة $t=0$
نعوض فنحصل

$$b = \frac{2(0) - 1}{5} = -\frac{1}{5}$$

* تعيين شعاع التسارع الزاوي الآني :

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega'} = (2\cos(t), 0, -2\sin(t))$$

* تعيين سرعة النقطة $M(x_1, y_1, z_1)$:

$$\vec{V_M} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

مسألة:

عيّن النقاط التي تنتمي إلى مجموعة متماسكة واحدة من بين النقط التالية علماً أنّ:

$A(0,0,-1) ، B(1,1,0) ، C(1,0,1) ، D(1,0,0)$

$\vec{V_A}=(0,0,-1) ، \vec{V_B}=(1,1,1) ، \vec{V_C}=(2,0,0) ، \vec{V_D}=(1,1,0)$

في لحظة معينة ثم عيّن عناصر الحركة القتلية المماسية لحركة هذا الجسم في اللحظة المذكورة.

نطبق نظرية المساقط من أجل كل نقطتين من النقاط A,B,C,D

* نلاحظ أنه إذا طبقنا نظرية المساقط من أجل النقطة A فلا تتحقق المساواة مع أي من النقاط B,C,D.

* نطبق نظرية المساقط من أجل B و C:

$$\vec{BC}\cdot\vec{V_B} \overset{?}{=} \vec{BC}\cdot\vec{V_C}$$

$$\Rightarrow (0,-1,1)\cdot(1,1,1) \overset{?}{=} (0,-1,1)\cdot(2,0,0)$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

أي أنّ B و C ينتميان للجملة المتماسكة.

* نطبق نظرية المساقط من أجل B و D:

$$\vec{BD}\cdot\vec{V_B} \overset{?}{=} \vec{BD}\cdot\vec{V_D}$$

$$\Rightarrow (0,-1,0)\cdot(1,1,1) \overset{?}{=} (0,-1,0)\cdot(1,1,0)$$

$$\Rightarrow -1 = -1$$

أي أنّ B و D ينتميان للجملة المتماسكة.

* نطبق نظرية المساقط من أجل C و D:

$$\vec{CD}\cdot\vec{V_C} \overset{?}{=} \vec{CD}\cdot\vec{V_D}$$

$$\Rightarrow (0,0,-1)\cdot(2,0,0) \overset{?}{=} (0,0,-1)\cdot(1,1,0)$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

أي أنّ D و C ينتميان للجملة المتماسكة.

ومنه أنّ B,C,D يشكلون مجموعة متماسكة.

* تعيين عناصر الحركة القتلية المماسة لحركة الجسم:

نختار $D(1,0,0)$ قطب الحركة:

- تعيين شعاع الدوران:

$$\vec{V_B} = \vec{V_D} + \vec{\omega} \wedge \vec{DB}$$

$$(1,1,1) = (1,1,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1,1,0) + [-r_1\cdot\vec{i_1} + p_1\cdot\vec{k_1}]$$

$$(1,1,1) = (1,1,0) + (-r_1, 0, p_1)$$

$$\Rightarrow (1,1,1) = (1-r_1, 1, p_1)$$

بالمقارنة $\Rightarrow \left.\begin{matrix} 1-r_1=1 \\ 1=1 \\ p_1=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{r_1=0}\ ,\ \boxed{p_1=1}$

$$\vec{V_C} = \vec{V_D} + \vec{\omega} \wedge \vec{DC}$$

$$(2,0,0) = (1,1,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (2,0,0) = (1,1,0) + (q_1, -p_1, 0)$$

$$\Rightarrow (2,0,0) = (1+q_1, 1-p_1, 0)$$

بالمقارنة $\Rightarrow \left.\begin{matrix} 1+q_1=2 \\ 1-p_1=0 \\ 0=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{q_1=1}$

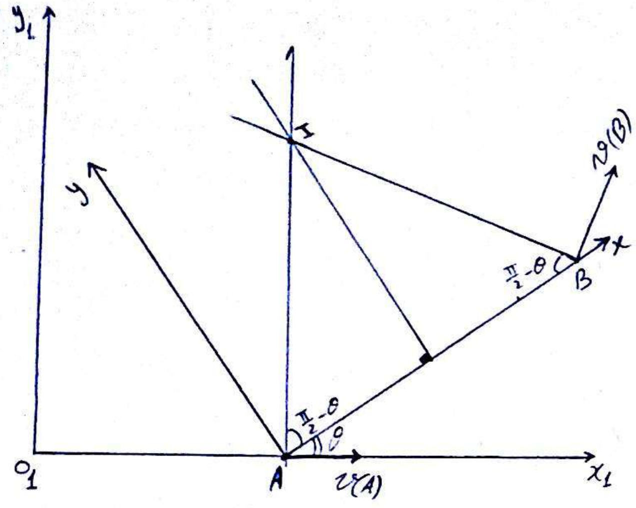
$$\Rightarrow \vec{\omega} = (1,1,0)$$

- تعيين O_1:

ليكن $O_1 \in \Delta$ حيث $O_1(x_1,y_1,z_1)$ ومنه:

$$\vec{V_{O_1}} = \vec{V_D} + \vec{\omega} \wedge \vec{DO_1}$$

$$= (1,1,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 1 & 1 & 0 \\ x_1-1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$



1) لدينا من الفرض: يتحرك القضيب في المستوي ومنه نوع الحركة هي حركة مستوية.

ولدينا الجملة الثابتة هي $O_1X_1Y_1$ ولنختار الجملة المتماسكة بحيث نختار القضيب هو أحد المحاور المتماسكة ونختار A قطب الحركة و Axy هي الجملة المتماسكة مع القضيب عندئذٍ معادلات الحركة هي: θ و $x(A)$ و $y(A)$

لدينا $y(A)=0$ ولدينا $v(A)=v$ ومنه:

$$x(A)=\int v(A)\,dt=\int v\,dt=vt+c$$

ولدينا في لحظة البدء يكون $t=0$ و $x(A)=0$ لأن القضيب يكون منطبق على O_1y_1 ومنه

$$0=0+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow x(A)=v.t$$

تعيين θ:

لدينا $v(B)=B$ ولدينا A هي قطب الحركة ومنه:

$$\vec{v}(B)=\vec{v}(A)+\vec{\omega}\wedge\vec{AB}$$

$$=v.\vec{i_1}+\begin{vmatrix}\vec{i_1}&\vec{j_1}&\vec{k_1}\\0&0&\omega\\2L\cos\theta&2L\sin\theta&0\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(B)=v\vec{i_1}-(2L.\omega.\sin\theta)\vec{i_1}+(2L\omega.\cos\theta).\vec{j_1}$$

$$\Rightarrow v=(v-2L.\omega.\sin\theta)\vec{i_1}+(2L.\omega.\cos\theta)\vec{j_1}$$

$$\Rightarrow v^2=v^2+4L^2.\omega^2.\sin^2\theta-4L.\omega.v.\sin\theta+4L^2.\omega^2.\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow 0=4L^2.\omega^2-4L.\omega.v.\sin\theta$$

$$\Rightarrow L.\omega=v.\sin\theta \Rightarrow \omega=\frac{v}{L}.\sin\theta$$

$$=(1,1,0)+(z_1,-z_1,y_1-x_1+1)$$

$$\Rightarrow \vec{V_{O_1}}=(1+z_1,1-z_1,1+y_1-x_1)$$

معادلات محور المحل (Δ) هي:

$$\Delta:\ \frac{1+z_1}{1}=\frac{1-z_1}{1}=\frac{1+y_1-x_1}{0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1+z_1}{1}=\frac{1-z_1}{1}\\ \frac{1+z_1}{1}=\frac{1+y_1-x_1}{0}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+z_1=1-z_1 \Rightarrow z_1=0\\ 1+y_1-x_1=0 \Rightarrow y_1-x_1=-1\end{cases}$$

بأخذ $x_1=0$ يكون $y_1=-1$

$$\Rightarrow O_1=(0,-1,0)$$

* تعيين خطوة اللولب (b):

$$b=\frac{\vec{\omega}.\vec{V_O}}{\omega^2}=\frac{(1,1,0).(1,1,0)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

مسألة:

قضيب طوله $2L$ يتحرك في المستوي $O_1X_1Y_1$ بحيث تنزلق النقطة A من القضيب على O_1X_1 بسرعة ثابتة قيمتها $v(A)=v$ وتتحرك النقطة B منه في المستوي $O_1X_1Y_1$ بحيث تبقى قيمة سرعتها ثابتة $v(B)=v$، كان القضيب في لحظة البدء منطبق على O_1Y_1 والمطلوب:

1) عيّن معادلات حركة القضيب.
2) أوجد مسار النقطة B.
3) عيّن القاعدة والمتدحرج والمركز الآني للدوران تحليلياً.
4) عيّن القاعدة والمتدحرج هندسياً.
5) أوجد تسارع النقطة B.
6) عيّن النقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة.
7) عيّن مركز التسارع المعدوم.

3) * تعيين المركز الآني للدوران تحليلياً :

إنّ سرعة النقطة A بدلالة المركز الآني للدوران هي :

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{IA}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{IA})$$

وحسب علاقة جيبس نجد :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A) = (\vec{\omega}.\vec{IA}).\vec{\omega} - \omega^2.\vec{IA}$$

إنّ $\vec{\omega} \perp \vec{IA}$ ومنه $\vec{\omega}.\vec{IA} = 0$ ومنه :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A) = -\omega^2.\vec{IA}$$

$$\Rightarrow \vec{IA} = \frac{-1}{\omega^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A))$$

$$\Rightarrow \vec{IA} = \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A))$$

* تعيين القاعدة تحليلياً :

نفرض أنّ إحداثيات المركز الآني للدوران I هي $I(X_1(I), Y_1(I))$ ومنه :

$$(X_1(I) - X_1(A), Y_1(I) - Y_1(A)) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\omega^2}(0.\vec{i_1} + \omega.v\vec{j_1} + 0.\vec{k_1})$$

$$= \frac{v}{\omega}.\vec{j_1}$$

$$\Rightarrow (X_1(I) - vt, Y_1(I) - 0) = \frac{v}{\omega}\vec{j_1}$$

بالمطابقة $\Rightarrow X_1(I) - vt = 0 \Rightarrow X_1(I) = v.t$

$$Y_1(I) = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{\theta'}$$

ومنه المعادلات الوسيطية للقاعدة هي :

$$X_1(I) = v.t = L.\ln tg\frac{\theta}{2}$$

$$Y_1(I) = \frac{v}{\theta'} = \frac{v}{\frac{v}{L}.\sin\theta} = \frac{L}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{L}.\sin\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{v}{L}.dt$$

نفرض

$$tg\frac{\theta}{2} = u \Rightarrow \frac{1}{2}(1 + tg^2\frac{\theta}{2})d\theta = du$$

حيث :

$$\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2} , \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} , d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$$

وبالتعويض نجد :

$$\frac{du}{u} = \frac{v}{L}dt \Rightarrow \ln(u) = \frac{v}{L}dt$$

$$\Rightarrow \ln(u) = \frac{v}{L}t + c \Rightarrow \ln tg\frac{\theta}{2} = \frac{v}{L}t + c$$

وفي لحظة البدء يكون $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $t = 0$ ومنه

$$\ln tg\frac{\pi}{4} = \frac{v}{L}(0) + c \Rightarrow \ln(1) = 0 + c$$

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow \ln tg\frac{\theta}{2} = \frac{v}{L}t$$

نأخذ e للطرفين فيكون :

$$tg\frac{\theta}{2} = e^{\frac{v}{L}t}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \mathrm{arctg}\, e^{\frac{v}{L}t} \Rightarrow \theta = 2.\mathrm{arctg}\, e^{\frac{v}{L}t}$$

ومنه معادلات الحركة هي :

$$x(A) = v.t , y(A) = 0 , \theta = 2.\mathrm{arctg}\, e^{\frac{v}{L}t}$$

2) إيجاد مسار النقطة B :

نستخدم الجملة الثابتة لإيجاد المسار دوماً .

$$\vec{O_1B} = \vec{O_1A} + \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{O_1B} = v.t\vec{i_1} + 2L.\cos\theta.\vec{i_1} + 2L.\sin\theta.\vec{j_1}$$

$$= (v.t + 2L\cos\theta)\vec{i_1} + (2L\sin\theta)\vec{j_1}$$

$$\Rightarrow x(B) = v.t + 2L.\cos(\theta) , y(B) = 2.L.\sin(\theta)$$

ولكن لدينا : $\ln tg\frac{\theta}{2} = \frac{v}{L}t$ ومنه

نعوض في $x(B)$. $\Rightarrow$ $v.t = L.\ln tg\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow x(B) = L.\ln tg\frac{\theta}{2} + 2L.\cos\theta , y(B) = 2L.\sin\theta$$

وهي المعادلات الوسيطية لمسار النقطة B .

* تعيين المتدحرج تحليلياً :

نفرض $I(X(I),Y(I))$ هي قطب للحركة وهو مبدأ جملة الإحداثيات في الجملة المتماسكة :

$$(X(I),Y(I)) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v.\cos\theta & -v.\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(\omega.v.\sin\theta.\vec{i} + \omega.v.\cos\theta.\vec{j} + 0.\vec{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\omega}.v.\sin\theta.\vec{i} + \frac{1}{\omega}.v.\cos\theta.\vec{j}$$

بالمقارنة $\Rightarrow X(I) = \frac{1}{\omega}.v.\sin\theta$

$$Y(I) = \frac{1}{\omega}.v.\cos\theta$$

معادلة المتدحرج هو المستقيم الموازي لمحور الـ y وهو محور القضيب :

$$\Rightarrow X(I) = \frac{L}{\sin\theta}.\sin\theta = L$$

$$Y(I) = \frac{L}{\sin\theta}.\cos\theta = L.\cot\theta$$

4) تعيين القاعدة والمتدحرج هندسياً :

* تعيين المركز الآني للدوران هندسياً :

نعلم منحى السرعة A ولكن لا نعلم منحى السرعة B ومنه نطبق نظرية المساقط $Proj_{AB}\vec{v}(B) = Proj_{AB}\vec{v}(A)$

$$\Rightarrow \vec{v}(B).\cos\alpha = \vec{v}(A).\cos\theta$$

ولكن من الفرض لدينا $v(A) = v(B) = v$ ومنه يكون :

$$\cos\alpha = \cos\theta \Rightarrow \text{إما } \alpha = \theta$$
$$\text{أو } \alpha = -\theta$$

ومنه تم تعيين منحى سرعة B ، نأخذ عاموداً على سرعة B ومن نأخذ عاموداً على سرعة A ، إن نقطة تلاقي العامودين هي المركز الآني للدوران I .

* تعيين المتدحرج هندسياً :

أي نرسم إحداثيات I بالنسبة للجملة المتماسكة : $I(X(I),Y(I))$ حيث المثلث AIB متساوي الساقين

$$X(I) = AC = L$$

$$Y(I) = CL = \cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \frac{L}{AI}$$

$$tg(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \frac{CI}{L}$$

* تعيين القاعدة هندسياً :

نرسم إحداثيات I بالنسبة للجملة الثابتة $I(X_1(I),Y_1(I))$:

$$X_1(I) = OA = v.t$$

$$Y_1(I) = AI = \frac{L}{\sin\theta} = \frac{L}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

5) تسارع النقطة B في الجملة المتماسكة :

$$\vec{\mu}_B = \vec{\mu}_A + \vec{\varepsilon}\wedge\vec{AB} - \omega^2.\vec{AB}$$

وبما أن سرعة A ثابتة فالتسارع لـ A معدوم ومنه ،

$$\vec{\mu}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \theta'' \\ 2L & 0 & 0 \end{vmatrix} - \omega^2.(2L,0,0)$$

$$= 0.\vec{i} + 2L\theta''.\vec{j} + 0.\vec{k} - 2.\omega^2.L.\vec{i}$$
$$= -2.L.\omega^2\vec{i} + 2L.\theta''.\vec{j}$$

6) إن أصغر سرعة تقابل أقل بعد عن المركز الآني للدوران . فالنقطة C منتصف القضيب هي التي بعدها عن I أصغر ما يمكن وبالتالي سرعة C أصغر ما يمكن.

7) مركز التسارع المعدوم :

هو النقطة A لأنه نقطة من المركز ينعدم تسارعها بالنسبة للجملة الثابتة .

طلب إضافي أوجد سرعة انتقال I على القاعدة :

لدينا من الفرض $X_1(I)$ و $Y_1(I)$ ومنه سرعة انتقال I على القاعدة هي :

$$\vec{u} = X_1'(I)\,\vec{i}_1 + Y_1'(I).\vec{j}_1$$

مسألة :

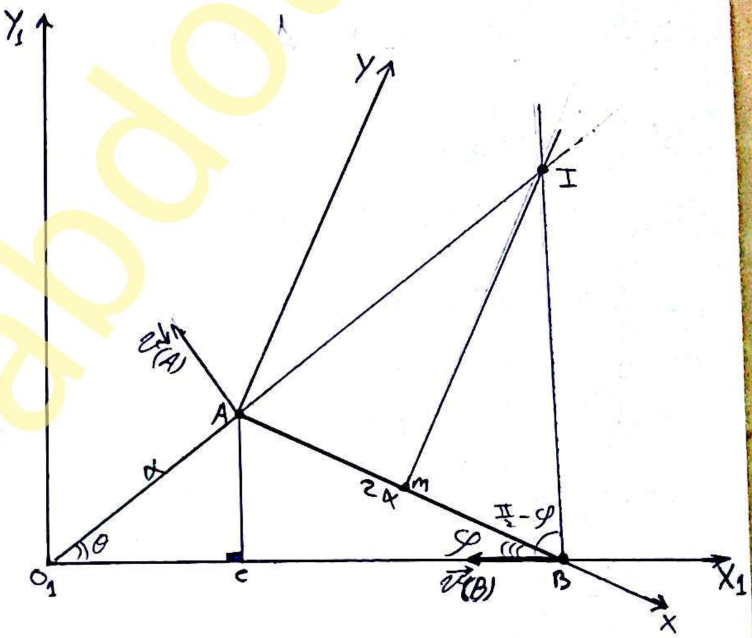
ذراع O_1A طوله α يدور في مستوي ثابت بسرعة زاوية ω_1 حول النقطة الثابتة O_1، AB ذراع طوله 2α مرتبطة مفصلياً في النقطة A في الذراع O_1A حيث تنطلق النهاية B على المستقيم الثابت O_1X_1 والمطلوب :

1) عيّن المركز الآني للدوران ومعادلة الحركة للقضيب AB.

2) عيّن القاعدة والمتدحرج.

3) عيّن سرعة وتسارع B.

4) عين نقطة M من الذراع AB التي تكون سرعتها صغرى.



الجملة الثابتة هي $O_1X_1Y_1$

1) إحداثيات A في الجملة الثابتة :

$$X_{1A} = \alpha\cdot\cos\theta \quad , \quad Y_{1A} = \alpha\cdot\sin\theta$$

لنختار A هو قطب للحركة حيث سرعة A مماس الدائرة التي مركزها O_1 ونصف قطرها α.

إنَّ حركة A هي حركة دائرية وسرعتها تكون مماس الدائرة، العمود على سرعتها هو امتداد لنصف القطر O_1A ثم نقيم عامود على سرعة B حيث $\vec v(A) \times \vec v(B)$

ومنه نقطة تلاقي العامودين هو المركز الآني للدوران.

* لنختار AXY جملة متماسكة مع القضيب AB حيث A قطب للحركة ومنه معادلات الحركة هي :

$$X_1(A),\ Y_1(A),\ \varphi(AB, O_1X_1)$$

من المثلث O_1AC نجد :

$$AC = \alpha\cdot\sin\theta$$

ومن المثلث ABC نجد : $AC = 2\alpha\cdot\sin\varphi$

$$\Rightarrow 2\alpha\cdot\sin\varphi = \alpha\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{2} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{2}\right)$$

ولكن العلاقة φ هنا لا تتعلق بـ (t) ولدينا من الفرض أن الذراع O_1A يدور في مستوي ثابت بسرعة زاوية ω_1 ومنه $\theta' = \omega_1$ وبالمكاملة نجد :

$$\theta = \omega_1 t + \theta_0$$

وفي لحظة البدء يكون $t=0$ و $\theta=0$ ومنه $\theta = \omega_1 t$

ومنه معادلات الحركة هي :

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sin(\omega_1 t)}{2}\right) \quad \text{------} \ (1)$$

$$X_1(A) = \alpha\cdot\cos(\omega_1 t) \quad \text{------} \ (2)$$

$$Y_1(A) = \alpha\cdot\sin(\omega_1 t) \quad \text{------} \ (3)$$

2) * تعيين القاعدة :

$$\vec{O_1I} = X_1(I)\cdot\vec{i_1} + Y_1(I)\cdot\vec{j_1}$$

■ $X_1(I)\vec{i_1} = \vec{O_1B} = \vec{O_1C} + \vec{CB}$

$$\Rightarrow X_1(I) = \alpha\cdot\cos\theta + 2\alpha\cdot\cos\varphi$$

لكن $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{4}}$

$$= \sqrt{1-\frac{\sin^2(\omega_1 t)}{4}}$$

$$\Rightarrow X_1(I) = \alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2(\omega_1 t)} + 2\alpha\sqrt{1-\frac{\sin^2(\omega_1 t)}{4}}$$

■ $Y_1(I)\vec{j_1} = \vec{BI} = BI\,\vec{j_1} = O_1B\cdot tg(\theta)\cdot\vec{j_1}$

$$= X_1(I)\cdot tg(\omega_1 t)\,\vec{j_1}$$

ومنه المعادلات الوسيطية للقاعدة هي :

$$X_1(I) = \alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2(\omega_1 t)} + 2\alpha\sqrt{1-\frac{\sin^2(\omega_1 t)}{4}}$$

$$Y_1(I) = X_1(I)\cdot tg(\omega_1 t)$$

* تعيين المتدحرج :

$$X(I) = Am = 2\alpha - mB$$

$$\vec{AB} = \vec{Am} + \vec{mB}$$
$$\Rightarrow \vec{Am} = \vec{AB} - \vec{mB}$$
$$\Rightarrow Am = 2\alpha - mB$$

$$X(I) = 2\alpha - IB.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$
$$= 2\alpha - IB.\sin(\varphi)$$
$$\Rightarrow X(I) = 2\alpha - IB.\frac{\sin(\omega_1 t)}{2}$$

$$Y(I) = Im = IB.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$
$$= IB.\cos(\varphi)$$
$$\Rightarrow Y(I) = IB.\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$
$$\Rightarrow Y(I) = IB.\sqrt{1-\frac{\sin^2(\omega_1 t)}{4}}$$

ومنه المعادلات الوسيطية للمتدحرج هي :

$$X(I) = 2\alpha - IB\,\frac{\sin(\omega_1 t)}{2}$$
$$Y(I) = IB.\sqrt{1-\frac{\sin^2(\omega_1 t)}{4}}$$

3) سرعة وتسارع النقطة B :

لدينا O_1B حيث

$$O_1B = \alpha\sqrt{1-\sin^2(\omega_1 t)} + 2\alpha\sqrt{1-\frac{\sin^2(\omega_1 t)}{4}}$$

بالاشتقاق الأول نحصل على سرعة B .

$$\Rightarrow \vec{V_B} = -\alpha\frac{\omega_1 \cos\omega_1 t.\sin\omega_1 t}{\sqrt{1-\sin^2\omega_1 t}} - \alpha\frac{\omega_1\cos\omega_1 t.\sin\omega_1 t}{2.\sqrt{1-\frac{\sin^2\omega_1 t}{4}}}$$

وبالاشتقاق لـ $\vec{V_B}$ نحصل على تسارع B .

4) النقطة أصغر ما يمكن هي النقطة التي بعدها عن المركز الآني للدوران أصغر ما يمكن وهو النقطة m .

مسألة :

يتحرك جسم S في الفراغ بحركة عامة ، علمت سرع ثلاث نقاط منه في لحظة معينة t وهي :

$A(0,0,0)$ ، $B(1,1,1)$ ، $C(1,0,-1)$

$\vec{V_A} = (1,0,0)$ ، $\vec{V_B} = (0,-1,2)$ ، $\vec{V_C} = (1,3,0)$

عيّن عناصر الفتل المكافئ لحركة الجسم في اللحظة المذكورة ثم عيّن سرعة النقطة $M(a,b,c)$ في اللحظة المذكورة .

عناصر الفتل هي : (ω, O', b) .

* تعيين $\vec{\omega}$:

نختار A هي قطب الحركة وليكن $\vec{\omega} = (p_1, q_1, r_1)$ ومنه :

$$\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{\omega}\wedge\vec{AB}$$

$$\Rightarrow (0,-1,2) = (1,0,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (0,-1,2) = (1,0,0) + (q_1 - r_1)\vec{i_1} - (p_1 - r_1)\vec{j_1} + (p_1 - q_1)\vec{k_1}$$
$$\Rightarrow (0,-1,2) = (1,0,0) + (q_1 - r_1, -p_1 + r_1, p_1 - q_1)$$
$$\Rightarrow (0,-1,2) = (1 + q_1 - r_1, -p_1 + r_1, p_1 - q_1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + q_1 - r_1 = 0 & \Rightarrow r_1 - q_1 = 1 \quad \cdots (*) \\ -p_1 + r_1 = -1 & \Rightarrow p_1 - r_1 = 1 \quad \cdots (**) \\ p_1 - q_1 = 2 & \Rightarrow p_1 - q_1 = 2 \quad \cdots (***) \end{cases}$$

$$\vec{V_C} = \vec{V_A} + \vec{\omega}\wedge\vec{AC}$$

$$\Rightarrow (1,3,0) = (1,0,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (1,3,0) = (1,0,0) + (-q_1)\vec{i_1} - (-p_1 - r_1)\vec{j_1} + (-q_1)\vec{k_1}$$
$$\Rightarrow (1,3,0) = (1,0,0) + (-q_1, p_1 + r_1, -q_1)$$
$$\Rightarrow (1,3,0) = (1 - q_1, p_1 + r_1, -q_1)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 - q_1 = 1 \\ p_1 + r_1 = 3 \\ -q_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{q_1 = 0}$$

$\boxed{r_1 = 1}$ نعوض في (*) فنجد

$\boxed{p_1 = 2}$ نعوض في (**) فنجد

$$\Rightarrow \vec{\omega} = (2,0,1)$$

$$\Rightarrow \vec{V_M} = (1,0,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 2 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= (1,0,0) + (-b)\vec{i_1} - (2c-a)\vec{j_1} + (2b)\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \vec{V_M} = (1-b)\vec{i_1} + (a-2c)\vec{j_1} + (2b)\vec{k_1}$$

مسألة :

تعطى معادلات حركة جسم صلب بالشكل :

$$x_0 = -\cos t \quad ، \quad y_0 = \sin t \quad ، \quad z_0 = 0$$

$$\psi = t \quad ، \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad ، \quad \varphi = t$$

عيّن معادلات محور الفتل وخطوة اللولب في الحركة اللولبية المماسة للحركة العامة السابقة ثم عيّن محور الفتل وخطوة اللولب في اللحظة $t = 0$.

---

* تعيين معادلات محور الفتل :

نعين أولاً شعاع الدوران :

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k_1} + \theta' . \vec{u} + \varphi' . \vec{k}$$

$$= 1.\vec{k_1} + 1.\vec{k}$$

وبإسقاط $\vec{k}$ على المحاور الثابتة نجد :

$$\vec{\omega} = \vec{k_1} + (-\sin\theta . \vec{v} + \cos\theta . \vec{k_1})$$

$$= \vec{k_1} + \left[-\sin\theta(-\sin\psi \vec{i_1} + \cos\psi \vec{j_1}) + \cos\theta . \vec{k_1}\right]$$

$$= \vec{k_1} + \sin\theta . \sin\psi . \vec{i_1} - \sin\theta . \cos\psi \vec{j_1} + \cos\theta . \vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \sin\theta . \sin\psi . \vec{i_1} - \sin\theta . \cos\psi \vec{j_1} + (\cos\theta + 1)\vec{k_1}$$

$$= \sin(t)\vec{i_1} - \cos(t)\vec{j_1} + \vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = (\sin t, -\cos t, 1)$$

نعين مركبات سرعة نقطة من محور الفتل :

نختار $O_1 \in \Delta$ حيث $O_1(x,y,z)$ ولتكن $O(-\cos t, \sin t, 0)$ قطب الحركة ومنه ،

$$\vec{V_{O_1}} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \wedge \vec{OO_1}$$

ولكن :

$$\vec{V_O} = \begin{cases} x'_0 = \sin t \\ y'_0 = \cos t \\ z'_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V_O} = (\sin t, \cos t, 0)$$

* تعيين O_1 :

نختار O_1 من Δ بحيث أنّ $O_1(x_1, y_1, z_1)$ ومنه :

$$\vec{V_{O_1}} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \wedge \vec{AO_1}$$

$$= (1,0,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 2 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$= (1,0,0) + (-y_1)\vec{i_1} - (2z_1 - x_1)\vec{j_1} + (2y_1)\vec{k_1}$$

$$= (1,0,0) + (-y_1, -2z_1 + x_1, 2y_1)$$

$$= (1 - y_1, x_1 - 2z_1, 2y_1)$$

$$\Rightarrow \Delta : \frac{v_x(O_1)}{p_1} = \frac{v_y(O_1)}{q_1} = \frac{v_z(O_1)}{r_1}$$

$$\Rightarrow \Delta : \frac{1-y_1}{2} = \frac{x_1 - 2z_1}{0} = \frac{2y_1}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-y_1}{2} = \dfrac{x_1 - 2z_1}{0} \\ \dfrac{1-y_1}{2} = \dfrac{2y_1}{1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4z_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2z_1 \\ 1 - y_1 = 4y_1 \Rightarrow 1 = 5y_1 \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{5}} \end{cases}$$

بإختيار $z_1 = 0$ يكون $x_1 = 0$ ومنه :

$$O_1 = \left(0, \frac{1}{5}, 0\right)$$

* تعيين b :

$$b = \frac{\vec{\omega} . \vec{v}(A)}{\omega^2} = \frac{(2,0,1).(1,0,0)}{5}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{5}$$

* تعيين سرعة النقطة $M(a,b,c)$:

$$\vec{V_M} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \wedge \vec{AM}$$

Michael Abdoush

مسألة:

تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω_e تتحرك M على سطح الأسطوانة حسب المعادلات:

$$x = 3\cos(2\pi t) \; , \; y = 3\sin(2\pi t) \; , \; z = 3t$$

بفرض أنّ xyz جملة متماسكة مع الأسطوانة ينطبق فيها المحور oz على محور الأسطوانة،
عيّن السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M.

إنّ الحركة دورانية حول محور.

* تعيين السرعة المطلقة:

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M)$$

$$\vec{V_r}(M) = \begin{cases} x' = -6\pi\sin(2\pi t) \\ y' = 6\pi\cos(2\pi t) \\ z' = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V_r}(M) = \left(-6\pi\sin(2\pi t), 6\pi\cos(2\pi t), 3\right)$$

$$\vec{V_e}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_e \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (-y\omega_e)\vec{i} - (-x\omega_e)\vec{j} + 0.\vec{k}$$

$$= (-y\omega_e)\vec{i} + (x\omega_e)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{V_e}(M) = \left(-3\sin(2\pi t)\omega_e , 3\cos(2\pi t)\omega_e , 0\right)$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \left(-6\pi\sin(2\pi t), 6\pi\cos(2\pi t), 3\right) + \left(-3\sin(2\pi t)\omega_e , 3\cos(2\pi t)\omega_e , 0\right)$$

$$= \left(-3\sin(2\pi t).(\omega_e + 2\pi), 3\cos(2\pi t).(\omega_e + 2\pi), 3\right)$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = -3\sin(2\pi t).(\omega_e + 2\pi).\vec{i} + 3\cos(2\pi t).(\omega_e + 2\pi).\vec{j} + 3.\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V_{O_1}} = (\sin t, \cos t, 0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x+\cos t & y-\sin t & z \end{vmatrix}$$

$$= (\sin t, \cos t, 0) + (q_1 z - r_1 y + r_1 \sin t)\vec{i_1} - (p_1 z - r_1 x - r_1\cos t)\vec{j_1} + (p_1 y - p_1 \sin t - q_1 x - q\cos t)\vec{k_1}$$

$$= (\sin t, \cos t, 0) + (-z\cos t - y + \sin t)\vec{i_1} - (z\sin t - x - \cos t)\vec{j_1} + (y\sin t - \sin^2 t + x\cos t + \cos^2 t)\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \vec{V_{O_1}} = (\sin t - z\cos t - y + \sin t)\vec{i_1} + (\cos t - z\sin t + x + \cos t)\vec{j_1} + (y\sin t - \sin^2 t + x\cos t + \cos^2 t)\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \vec{V_{O_1}} = \left(2\sin t - y - z\cos t , 2\cos t + x - z\sin t , x\cos t + y\sin t + \cos^2 t - \sin^2 t\right)$$

ومنه معادلات محور الفتل هي:

$$\frac{V_x(O_1)}{p_1} = \frac{V_y(O_1)}{q_1} = \frac{V_z(O_1)}{r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin t - y - z\cos t}{\sin t} = \frac{2\cos t + x - z\sin t}{-\cos t} = \frac{x\cos t + y\sin t + \cos^2 t - \sin^2 t}{1}$$

* تعيين خطوة اللولب:

$$b = \frac{\vec{\omega}.\vec{V_0}}{\omega^2} = \frac{(\sin t, -\cos t, 1).(\sin t, \cos t, 0)}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{2}$$

* أما في اللحظة $t=0$ فإن معادلات محور الفتل هي:

$$\frac{-y-z}{0} = \frac{2+x}{-1} = \frac{x+1}{1}$$

أي أنّ $x = -\frac{3}{2}$ و $y = z = 0$

وخطوة اللولب في اللحظة $t=0$ هي: $b = -\frac{1}{2}$

* حساب التسارع المطلقة :

باستخدام دساتير بور .

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \frac{d\vec{v}_a}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_a$$

$$= \left(-6\pi\cos(2\pi t).(\omega_e+2\pi), -6\pi\sin(2\pi t).(\omega_e+2\pi), 0\right) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_e \\ v_{ax} & v_{ay} & v_{az} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-6\pi\cos(2\pi t).(\omega_e+2\pi), -6\pi\sin(2\pi t).(\omega_e+2\pi), 0\right) + (-\omega_e.v_{ay})\vec{i} - (-\omega_e.v_{ax})\vec{j} + 0.\vec{k}$$

$$= \left(-6\pi\cos(2\pi t).(\omega_e+2\pi), -6\pi\sin(2\pi t).(\omega_e+2\pi), 0\right) + \left(-\omega_e.v_{ay}, \omega_e.v_{ax}, 0\right)$$

$$= \left(-\omega_e.v_{ay} - 6\pi\cos(2\pi t).(\omega_e+2\pi), \omega_e.v_{ax} - 6\pi\sin(2\pi t).(\omega_e+2\pi), 0\right)$$

$$= \left(-3\omega_e\cos(2\pi t).(\omega_e+2\pi) - 6\pi\cos(2\pi t).(\omega_e+2\pi), -3\omega_e\sin(2\pi t).(\omega_e+2\pi) - 6\pi\sin(2\pi t).(\omega_e+2\pi), 0\right)$$

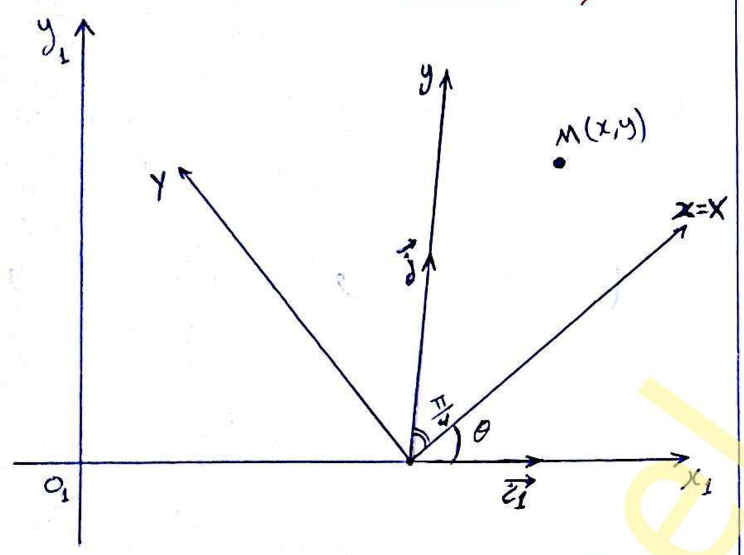
$$= \left(-3\cos(2\pi t).(\omega_e+2\pi).[\omega_e+2\pi], -3\sin(2\pi t)(\omega_e+2\pi).[\omega_e+2\pi], 0\right)$$

مسألة :

$O_1X_1Y_1$ جملة إحداثيات ثابتة قائمة ومباشرة ، xoy زاوية صلبة متماسكة قياسها $\frac{\pi}{4}$ ، تدور في المستوي $O_1X_1Y_1$ حول رأسها O بسرعة زاوية $\omega = 2t$ ويتحرك رأسها O على مستقيم ثابت O_1X_1 بسرعة قيمتها العددية ثابتة وتساوي v ، M نقطة تتحرك بالنسبة للزاوية xoy إحداثياتها بالنسبة للجملة xoy هي (x,y) والمطلوب :

1) تعيين معادلات حركة النقطة M .

2) مركبات متجه السرعة المطلقة ومتجه التسارع المطلقة لـ M بدلالة الزمن وبدلالة الإحداثيات (x,y) ومشتقاتها أي : (x',y') و (x,y) و t .



نوع الحركة هي حركة مستوية :

1) تعيين معادلات حركة النقطة M :

لتكن O هي قطب الحركة ومنه :

$$x_O = \int v\,dt = vt + c$$

وفي لحظة البدء تكون $(t=0)$ و $(x_O=0)$ ومنه $c=0$ وبالتالي

$$\boxed{x_O = vt} \;....①$$

$$\boxed{y_O = 0} \;....②$$

نعلم أن :

$$\theta' = \omega = 2t \Rightarrow \theta = \int \omega\,dt = \int 2t\,dt = t^2 + \theta_0$$

وفي لحظة البدء تكون $(t=0)$ و $(\theta=0)$ ومنه $\theta_0=0$ وبالتالي ،

$$\boxed{\theta = t^2} \;....③$$

ومنه معادلات الحركة هي كل من ① و ② و ③ .

Michael Abdoush

2) * تعيين السرعة المطلقة لـ $M(x,y)$:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$= x.\vec{I} + y\left(\cos\frac{\pi}{4}\vec{I} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{J}\right)$$
$$= x.\vec{I} + y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}.\vec{I} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{J}\right)$$
$$= \left(x + y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{I} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{J}$$

وهي مركبات $\vec{OM}$ في الجملة المتماسكة oxy

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M)$$

$$\vec{V_r}(M) = \begin{cases} x'(M) = x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y'(M) = \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

وبما أن الحركة مستوية نجد :

$$\vec{V_e}(M) = \vec{V}(O) + \omega \wedge \vec{OM}$$
$$= v.\vec{i_1} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ x+\frac{\sqrt{2}}{2}y & \frac{\sqrt{2}}{2}y & 0 \end{vmatrix}$$
$$= v(\cos\theta\vec{I} - \sin\theta.\vec{J}) + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ x+\frac{\sqrt{2}}{2}y & \frac{\sqrt{2}}{2}y & 0 \end{vmatrix}$$
$$= v\cos t^2.\vec{I} - v\sin t^2.\vec{J} + \left(-2t.\frac{\sqrt{2}}{2}.y\right)\vec{I} - \left(-2tx - 2t\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\vec{J}$$
$$= \left(v\cos t^2 - \sqrt{2}yt\right)\vec{I} + \left(-v\sin t^2 + 2tx + \sqrt{2}y.t\right)\vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + v\cos t^2 - \sqrt{2}y.t\right)\vec{I} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y' - v\sin t^2 + 2tx + \sqrt{2}y.t\right)\vec{J}$$

* تعيين التسارع المطلق لـ $M(x,y)$:

$$\vec{\gamma_a}(M) = \frac{d\vec{v_a}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{v_a}$$

طلب إضافي

عيّن القاعدة والمتدحرج ومركز التسارع المعدوم .

*) تعيين القاعدة :

لدينا (O) هو قطب الحركة ولنختار I هو مركز آني للدوران ومنه

$$\vec{V}(O) = \vec{\omega} \wedge \vec{IO}$$

نفرض $I(x_1(I), y_1(I))$ في جملة ثابتة :

$$\Rightarrow v.\vec{i_1} = \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & 2t \\ vt - x_1 & -y_1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (2ty_1)\vec{i_1} + (2t.vt - 2tx_1)\vec{j_1}$$
$$\Rightarrow v.\vec{i_1} = (2ty_1)\vec{i_1} + 2t(vt - x_1)\vec{j_1}$$

ومنه وبالمقارنة نجد :

$$v = 2ty_1 \quad ---- ①$$
$$2t(vt - x_1) = 0 \quad ---- ②$$

من ② نجد أن $2t(vt - x_1) = 0$ ومنه :

إما $2t = 0 \Rightarrow t = 0$ وهذا مرفوض

أو $vt - x_1 = 0 \Rightarrow v.t = x_1 \Rightarrow t = \frac{x_1}{v}$

نعوض في ① نجد :

$$v = 2.\frac{x_1}{v}.y_1 \Rightarrow x_1.y_1 = \frac{v^2}{2}$$

وبالتالي نلاحظ أن القاعدة هي عبارة عن قطع زائد متساوي الساقين .

* تعيين المتدحرج :

نفرض أن $I(X(I), Y(I))$ في جملة متماسكة ومنه

$$\vec{V}(O) = \vec{\omega} \wedge \vec{IO}$$

$$\Rightarrow v.\vec{i_1} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ -X(I) & -Y(I) & 0 \end{vmatrix}$$

Michael Abdoush

$$\Rightarrow v_i \cdot \vec{i_1} = (2t\,Y(I))\vec{I} + (-2t\,X(I))\vec{J}$$

$$\Rightarrow v_i(\cos\theta \cdot \vec{I} - \sin\theta\,\vec{J}) = (2t\,Y(I))\vec{I} + (-2t\,X(I))\vec{J}$$

ومنه وبالمقارنة نجد :

$$\begin{cases} v_i \cos t^2 = 2t\,Y(I) \quad \text{-----} \quad (I) \\ v_i \sin t^2 = 2t\,X(I) \quad \text{----} \quad (II) \end{cases}$$

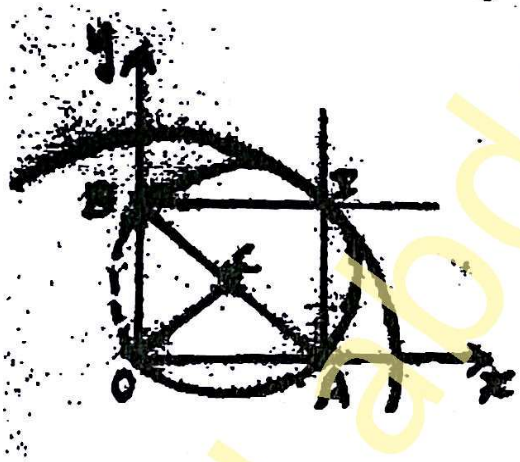
وهي المعادلات الوسيطية للمتدحرج.

* تعيين مركز التسارع المعدوم :

هو نقطة من المتحرك ينعدم تسارعها بالنسبة للجملة الثابتة وهو (o) حيث (o) سرعتها ثابتة في الجملة الثابتة أي : $F(o) = 0$

تمرين(١) : قضيب AB طوله $2l$ تتحرك نهايته A على مستقيم أفقي ox ، ويتحرك طرفه B على مستقيم شاقولي oy عين المركز الآني لدوران AB والقاعدة والمتدحرج .

الحل: إن سرعة النقطة A تحمل فرضاً على ox لذا فإن المركز الآني للدوران يقع على العمود المقام من A على ox ، كما أن سرعة النقطة B تحمل على oy والمركز الآني للدوران يقع على العمود المقام من B على oy مما يدل أن المركز الآني للدوران I هو نقطة تقاطع العمودين السابقين ، كما في الشكل .



الشكل (١٥)

تعيين القاعدة : إن القطعة المستقيمة oI هي قطر في المستطيل $o\ A\ I\ B$ أي أن طول oI يساوي طول AB يساوي $2l$ ولما كانت o نقطة ثابتة في المستوي فإن المحل الهندسي لـ I في المستوي الثابت (أي القاعدة) هي دائرة مركزها o ونصف قطرها $2l$

تعيين المتدحرج : إن النقطة C منتصف AB هي نقطة ثابتة من القضيب ، وإن طول CI يساوي نصف طول القضيب AB أي يساوي l وبالتالي فإن I تبعد عن النقطة C الثابتة في المستوي المتماسك مع القضيب بمقدار ثابت أي أن المحل الهندسي للنقطة I في المستوي المتحرك (أي المتدحرج) هو دائرة مركزها C ونصف قطرها l .

تمرين(٢) : لتكن s نصف دائرة شاقولية مركزها o نصف قطرها a و AB قضيب طوله $2l$ تتحرك نهايته A على محيط نصف الدائرة بسرعة قيمتها ثابتة $v = 2a$ ويستند

القضيب على الحافة c للدائرة والمطلوب :

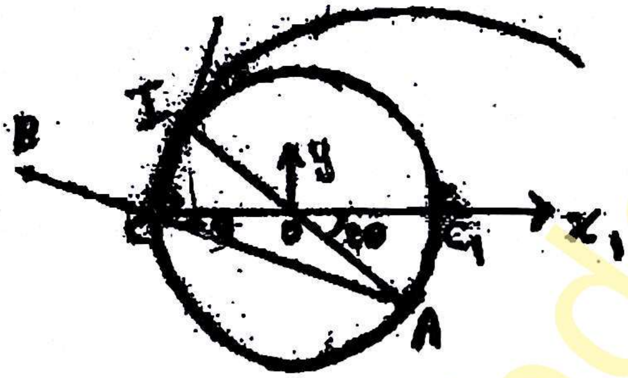
١) تعيين المركز الآني لدوران القضيب AB والقاعدة والمتدحرج

٢) تعيين معادلات الحركة للقضيب AB

٣) تعيين سرعة وتسارع النقطة B (نهاية القضيب)

٤) تعيين مركز التسارع المعدوم في اللحظة $t = 0$.

الحل:



الشكل(١٦)

١) نعلم أن سرعة A تحمل على مماس للدائرة لذا فإن المركز الآني للدوران يقع على العمود على المماس في A أي على نصف القطر Ao ، ولما كان المستقيم يستند على الحافة C فسرعة النقطة المنطبقة على C من القضيب تحمل على القضيب أي أن المركز الآني للدوران يقع على العمود على القضيب في النقطة C ، فنقطة تقاطع هذين العمودين هي المركز الآني للدوران المطلوب.

إن الزاوية $\hat{ACI}$ قائمة أي أن AI هو قطر للدائرة الثابتة التي مركزها o ونصف قطرها a فهي القاعدة . كماأن بعد I عن النقطة A الثابتة بالنسبة للقضيب يساوي $2a$ ثابت مما يدل على أن المتدحرج دائرة مركزها A نصف قطرها $2a$ أوتتم حركة القضيب بالتالي بتدحرج الدائرة الكبيرة $(A, 2o)$ خارج الدائرة الصغيرة (o, a) دون انزلاق .

٢) إن حركة القضيب مستوية فهي تتعين باحداثيات قطب نختاره A ، وزاوية يصنعها مستقيم متماسك مع القضيب (نختاره القضيب) مع مستقيم ثابت وليكن القطر CoC_1 ، فتكون الاحداثيات المعممة $y(A)$, $x(A)$, θ .

لتعيين معادلات الحركة ، أي العلاقات الزمنية للاحداثيات المعممة نكتب القيمة العددية لسرعة A على محيط الدائرة $v = 2a = \omega_1 a$ ، $\omega_1 = -(2\theta)'$

أي أن $-2a\theta' = 2a \Leftarrow \theta' = -1$

نكامل بالنسبة للزمن ونفرض أن $\theta = 0$ في لحظة البدء فنجد :

٢٠...

$\theta = -t$ المعادلة الاولى للحركة.

١٥..

١...

ونكتب احداثيات A على المحاور الثابتة التي نختارها ox , oy فنجد

٤...

$$y(A) = a\sin 2\theta \qquad x(A) = a\cos 2\theta$$

٢٦٥...

٢١٥..

وبتعويض θ بقيمتها نجد معادلات الحركة المطلوبة :

$$y(A) = -a\sin 2t \qquad x(A) = a\cos 2t \quad , \quad \theta = -t$$

٣) تحسب سرعة النقطة B من العلاقة

$$\vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B) = (-2a\sin 2t\ , -2a\cos 2t\ , 0) + (-1\vec{k}) \times (-2l\cos t\ , 2l\sin t , 0)$$

و بالاصلاح نجد:

$$\vec{V}(B) = (-2a\sin 2t + 2l\sin t)\ \vec{i}\ + (-2a\cos t + 2l\cos t)\ \vec{j}$$

أما تسارع النقطة B فنحصل عليه باشتقاق مركبتي شعاع السرعة على المحاور الثابتة فنجد:

$$\vec{\Gamma}(B) = (-4a\cos 2t + 2l\cos t)\ \vec{i}\ + (4a\sin t - 2l\sin t)\ \vec{j}$$

٤) لتعيين Q مركز التسارع المعدوم نكتب:

$$\vec{\Gamma}(Q) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AQ} - \omega^2\ \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$$

$$-4a\cos 2t - (x - a\cos 2t) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3a\cos 2t$$

$$4a\sin 2t - (y + a\sin 2t) = 0 \ \Rightarrow\ y = 3a\sin 2t$$

وفي اللحظة $t = 0$ نجد

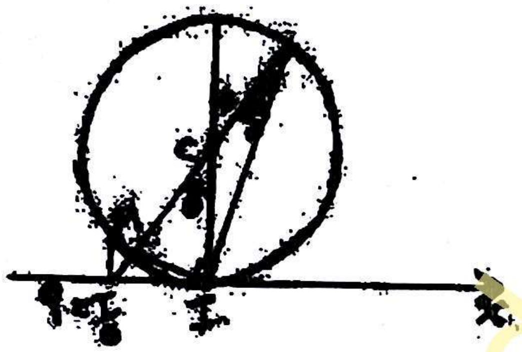
$$y(Q) = 0 \qquad , \qquad x(Q) = -3a$$

$\boxed{\text{تمرين(٣) :}}$ يتدحرج قرص دائري مركزه c نصف قطره a في مستو شاقولي على المحور الافقي o_1x دون انزلاق والمطلوب :

١- عين المركز الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج

٢- عين مسار نقطة M من محيط القرص كانت منطبقة على نقطة تماس القرص مع المحور o_1x فـي لحظــة البدء ، وعين سرعة هذه النقطة وتسارعها علماً أن سرعة النقطة c مركز القرص تساوي v .

الحل : ١) نعلم أنه في حركة التدحرج دون انزلاق تكون نقطة التماس هي المركز الآني للدوران I وبالتالي فإن القاعدة هي المستقيم o_1x أما المتدحرج فهو محيط القرص أي الدائرة $(c;\ a)$.



الشكل (١٧)

٢) لــنفرض أن M كانــت منطبقة على I_o في لحظة البدء ولنختر I_o مبدأ للاحداثيات المتماسكة مع المستوي الثابت o_1xy وبعد مرور زمن قدره t أصبحت M في وضعها الجديــد على محيط الدائرة وأصبحت نقطة التماس (المركز الآني للدوران) في الموضع I ولنفرض الزاوية بين cM و cI تساوي θ .

نعلــم مــن شــرط الــتدحرج دون انــزلاق أن طــول المنحني $\widehat{MI}$ يساوي طول القطعة المستقيمة o_1I أي :

$$\overrightarrow{o_1I} = a\theta\ \vec{i}$$

ولتعيين احداثيات M نكتب

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1I} + \overrightarrow{IM} \qquad *$$

ولكن طول $\overline{IM}$ يساوي $2a\sin\frac{\theta}{2}$ فبإسقاط العلاقة * على المحورين o_1x و o_1y نجد:

$$\overrightarrow{o_1M} = a\theta\ \vec{i} - (2a\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2})\vec{i} + 2a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\ \vec{j}$$

أي : $y(M) = a\,(1-\cos\theta)$ $\qquad x(M) = a(\theta - \sin\theta)$ $\qquad$ * *

وهي معادلات المنحني الذي يدعى سيكلوئيد.

- يمكن تعين سرعة النقطة M من العلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \overline{IM}$$

ولدينا $\vec{\omega} = -\theta'\,\vec{k}$ (الإشارة السالبة لأن الدوران باتجاه عقارب الساعة) وبإسقاط عبارة $\vec{V}(M)$ على المحورين o_1x و o_1y نجد :

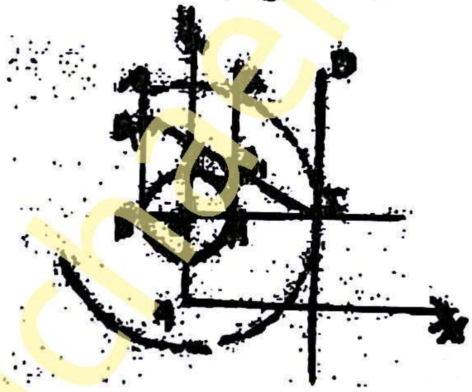
$$\vec{V}(M) = a\theta'(1-\cos\theta)\ \vec{i}\ + a\theta'\ \sin\theta\ \vec{j}$$

ونحصل على العبارة ذاتها باشتقاق * * بالنسبة للزمن .

ويتعين متجه التسارع باشتقاق عبارة السرعة ، الأمر الذي يعطي :

$$\vec{\Gamma}(M) = a\left[\ \theta''(1-\cos\theta) + \theta'^2\sin\theta\ \right]\vec{i}\ + a\left[\ \theta''\ \sin\theta + \theta'^2\cos\theta\ \right]\vec{j}$$

$\boxed{\text{تمرين(٤):}}$ بكرة متحركة مركزها c نصف قطرها a ترفع شاقولياً بوساطة حبل يمر على محيطها وتمر نهايتا الحبل على بكرتين صغيرتين ثابتتين . A وB نقطتا تماس الحبل مع البكرة و AB قطر أفقي فيها فإذا علمت أن سرعة النقطة A شاقولية نحو الأعلى وتساوي $\vec{v}_1$ وأن سرعة النقطة B هي $\vec{v}_2$: $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ فالمطلوب: تعيين المركز الآني للدوران للبكرة وتعيين القاعدة والمتدحرج ثم تعيين سرعة النقطة c (مركز البكرة)



الشكل (١٨)

الحــل: بما أن سرعة A توازي سرعة B و $\vec{V}(A) \neq \vec{V}(B)$ فإن المركز الآني للدوران هو نقطة تقاطع المستقيم BA مع B_1A_1 المستقيم الواصل بين نهايتي سرعتي النقطتين A وB. نلاحظ من الشكل أن :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} \qquad *$$

من العلاقة * يمكن أن نكتب :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}-\overline{IA}} = \frac{\overline{IA}}{2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{IA} = 2a$$

وبالتالي فإن:

$\overline{cI} = 3a$ أي أن بعـد المركز الآني للدوران عن النقطة c المتماسكة مع مستوي البكرة ثابت فالمحل الهندسي لــ I في هذا المستوي دائرة مركزها c نصف قطرها $3\ a$ وهي تمثل المتدحرج.

كمـا أن بعد I عن المستقيم o_1y الثابت يساوي المقدار الثابت $3\ a$ فالمحل الهندسي للمركز الآنـي للدوران في المستوي الثابت هو المستقيم بيان المعادلة $x_1(I) = 3\ a$ فالقاعدة مستقيم وتتم الحركة بتدحرج الدائرة $(c, 3\ a)$ على المستقيم الشاقولي D .

إن سرعة النقطة c تعامد Ic فهي شاقولية نحو الأعلى وقيمتها تتعين من العلاقة:

$$\frac{v(c)}{\overline{Ic}} = \frac{v(A)}{\overline{IA}} \Rightarrow$$

$$v(c) = \frac{3a}{2a}\ v_1 = \frac{3}{2}\ v_1$$

إذا انعدمت سرع نقط مستقيم متماسك مع جسم صلب في لحظة واحدة فقط نقول إن حـركة الجسـم فـي هـذه اللحظة مماسة لحركة دورانية حول محور ثابت ، وتتعين سرع وتسارعات نقط الجسم في هذه اللحظة فقط كما مر آنفاً.

١-٣-٧ **مثال :** لنعين حركة نقطة من سطح الكرة الأرضية آخذين بعين الإعتبار حركة الأرض حول محورها فقط .

الحل : إن الحركة دورانية حول محور ثابت ، بفرض M نقطة ما من سطح الكرة فإن مسار النقطة M هي دائرة عرض ، مركزها يقع على محور الدوران نصف قطرها $r = mM$. إن متجه سرعة M يحمل على مماس الدائرة ويتجه باتجاه دوران الكرة الأرضية وهو دوران مباشر . والقيمة العددية للسرعة هي : $v = r\,\omega$ حيث : $\omega = \dfrac{2\pi}{24 \times 3600}$ (راديان / ثانية) . أما تسارع النقطة M فهو ناظمي لأن الحركة منتظمة ويحمل على $\overline{Mm}$ ويساوي $\vec{\Gamma}(M) = -\omega^2\,\overrightarrow{mM}$

الشكل (٤)

لتعييـن الموضع والسرعة تحليلياً نختار جملة محاور ثابتة ينطبق فيها oz_1 على محور الأرض ونختار جملة محاور متماسكة مع الكرة الأرضية بحيث ينطبق oz على محور

الأرض أيضـاً . ونخـتار المحـور ox في مستوي دائرة الطول المارة من النقطة M .
ونفرض الزاوية بين ox و ox_1 : θ

١) مـن الواضح أن إحداثيات النقطة M بالنسبة لجملة المحاور $oxyz$ المتماسكة مع الأرض هي : $z = R\sin\alpha$ $\quad y = 0 \quad$ $x = R\cos\alpha$

بفـرض R نصـف قطـر الأرض ، α زاوية عرض مكان M أي الزاوية بين $\overrightarrow{oM}$ و $\overrightarrow{ox}$.

إن معادلة الحركة في هذه الحالة تتعين من العلاقة :

$$\theta' = \omega \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \int \omega \, dt \qquad \theta = \omega t$$

وذلك بإختيار مبدأ الزمن هو اللحظة التي كان فيها ox منطبقاً على ox_1 .

ويتعين موضع النقطة M بالنسبة لجملة الإحداثيات $ox_1y_1z_1$ التي افترضناها ثابتة من إسقاط العلاقة $\overrightarrow{oM} = x\vec{i} + (0)\vec{j} + z\vec{k}$ على المحاور $ox_1y_1z_1$ الأمر الذي يعطي :

$$\begin{aligned} x_1 &= (R\cos\alpha)\cos\theta = (R\cos\alpha)\cos\omega t \\ y_1 &= (R\cos\alpha)\sin\theta = (R\cos\alpha)\sin\omega t \qquad (١) \\ z_1 &= R\sin\alpha = \text{ثابت} \end{aligned}$$

إن المعادلات (١) تمثل معادلات حركة النقطة M وبحذف الزمن بين هذه المعادلات نجد :

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2\cos^2\alpha = r^2$$
$$z_1 = R\sin\alpha$$

وهي معادلات دائرة تقع في المستوي الذي يوازي ox_1y_1 ويبعد عنه بالمقدار $R\sin\alpha$ ومركزها يقع على oz_1 و نصف قطرها $r = R\cos\alpha = Mm$

٢) السرعة : تتعين سرعة النقطة M من اسقاط العلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{oM}$$

على المحاور المتماسكة مع الأرض الأمر الذي يعطي

$$\vec{V}(M) = (0, 0, \omega) \times (R\cos\alpha, 0, R\sin\alpha) = \omega r \vec{j} \qquad (٢)$$

أما الإسقاط على المحاور الثابتة فيعطي :

$$\vec{V}(M) = (0, 0, \omega) \times (r\cos\omega t, r\sin\omega t, R\sin\alpha)$$

$$= -\omega\, r \sin\omega t\ \overrightarrow{i_1} + \omega\, r\ \cos\omega t\ \overrightarrow{j_1} \qquad (٣)$$

٣) **التسارع :** نحصل على مركبات متجه التسارع من إسقاط العلاقة :

$$\vec{\Gamma}(M) \;=\; -\omega^2\ \overrightarrow{mM}$$

على المحاور المتماسكة مع الأرض الأمر الذي يعطي :

$$\vec{\Gamma}(M) = -\omega^2\ (x, 0, 0) = -\omega^2 R\ \cos\alpha\ \vec{i} \qquad (٤)$$

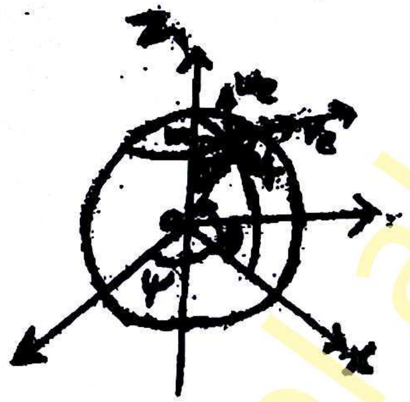
والاسقاط على المحاور الثابتة يعطي :

$$\vec{\Gamma}(M) = -\omega^2\ (x_1, y_1, 0) = -\omega^2 r\ \cos\omega t\ \overrightarrow{i_1} - \omega^2 r \sin\omega t\ \overrightarrow{j_1} \qquad (٥)$$

تمارين محلولة

تمريــن(١): نقطـــة مادية تتحرك على خط طول من الشمال إلى الجنوب على سطح الكرة الأرضية بسرعة ثابتة v فإذا افترضنا أن محور الأرض ثابت . يطلب تعيين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M .

الحل: طريقة أولى : إن الحركة النسبية هي حركة النقطة M على محيط دائرة مركزها مركز الأرض o ونصف قطرها $R=$ نصف قطر الكرة الأرضية ، وهي حركة دائرية منتظمة سرعتها الزاوية ثابتة تساوي $\omega_r = \dfrac{v}{R}$



الشكل(١٩)

. أي أن شـــعاع السرعة النسبية هو شعاع مطبق في M ويحمل على مماس الدائرة $(o\ ,\ R)$ وقيمته v ويتجه وفق الحركة النسبية من الشمال إلى الجنوب.

الحـــركة الجرية هي حركة النقطة M مع الكرة حول محور ثابت هو محور الكرة الأرضية وليكـــن oz_1 وهـــي حركة دورانية منتظمة سرعتها الزاوية $\omega_e = \dfrac{2\pi}{24\times 3600}$ ، و شعاع السـرعة الجرية يحمل على مماس دائرة عرض مركزها m (على محور الكرة الأرضية) ونصـــف قطرها $r = \overline{mM}$ ، وقيمته $= \omega_e . r$ وجهته باتجاه دوران الأرض (من الغرب إلى الشرق)

وتكون السرعة المطلقة بالتالي هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{V_r}$, $\overrightarrow{V_e}$

أما التسارع المطلق فهو محصلة ثلاثة أشعة $\overrightarrow{\Gamma_r}$, $\overrightarrow{\Gamma_e}$, $\overrightarrow{\Gamma_c}$

$\overrightarrow{\Gamma_r}$ التسارع النسبي هو تسارع ناظمي لأن الحركة النسبية دائرية منتظمة فهو شعاع يحمل على $\overrightarrow{Mo}$ وقيمته = $\left|\Gamma_r\right| = v^2 R = \omega_r^2 . R$ ويتجه نحو o

$\overrightarrow{\Gamma_e}$ التسارع الجري وهو بدوره تسارع ناظمي يحمل على $\overrightarrow{Mm}$ وقيمته $\omega_r^2 . r$

أما التسارع المتمم $\overrightarrow{\Gamma_c}$ فهو كما نعلم : $\overrightarrow{\Gamma_c} = 2\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{V_r}$ فهو شعاع يعامد كلاً من $\overrightarrow{\omega_e}$ الذي يحمل على محور الأرض , $\overrightarrow{V_r}$ المماس لدائرة الطول فهو يعامد مستوي دائرة الطول أي يعامد Mm لذا فهو يحمل على مماس دائرة العرض أي يوازي $\overrightarrow{V_e}$ وقيمته $2\omega_e v\sin\theta$ حيث θ الزاوية المتممة لـ α التي يصنعها oM مع محور الأرض .

وجهته تتعين من الجداء الخارجي $\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{V_r}$.

والتسارع المطلق بالتالي هو محصلة الأشعة الثلاث السابقة

طريقة ثانية : نختار جملة احداثية ديكارتية قائمة مباشرة متماسكة مع محور الأرض مركزها الكرة الأرضية ولتكن $ox_1y_1z_1$ ونختار جملة احداثية متحركة مع الكرة الأرضية بحيث ينطبق oz على oz_1 ويقع ox في مستوي دائرة الطول للنقطة M , oy يعامد مستوي هذه الدائرة ولنعين مركبات $\overrightarrow{V_r}$, $\overrightarrow{V_e}$, $\overrightarrow{V_a}$ على الجملة $o\,x\,y\,z$ فنجد:

$$\overrightarrow{V_r} = (0,\omega_r,0)\times(x,0,z) = \omega_r\, z\,\vec{i} - \omega_r\, x\,\vec{k}$$

حيث $x = R\cos\theta$ $\qquad y = R\sin\theta$ $\qquad \theta = \omega_r t$ باختيار مناسب لشروط البدء

و $$\overrightarrow{V_e} = (0,0,\omega_e)\times(x,0,z) = \omega_e\, x\,\vec{j}$$

والسرعة المطلقة $$\overrightarrow{V_a} = \omega_r\, z\,\vec{i} + \omega_e x\vec{j} - \omega_r\, x\vec{k}$$

ولنعين مركبات التسارع المطلق على الجملة $x\,y\,z$ فنكتب

$$\overrightarrow{\Gamma_r} = -\omega_r^2\,\overrightarrow{oM} = -\omega_r^2\, x\,\vec{i} - \omega_r^2\, z\,\vec{k} \qquad , \qquad \overrightarrow{\varepsilon_r} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_e} = -\omega_e^2\,\overrightarrow{mM} = -\omega_e^2\, x\,\vec{i} \qquad , \qquad \overrightarrow{\varepsilon_e} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_c} = 2(0,0,\omega_e)\times(\omega_r z\,,\,0\,,\,-\omega_r x) = \omega_e\,\omega_r\, z\,\vec{j}$$

فنجد $$\overrightarrow{\Gamma_a} = -x(\omega_r^2+\omega_e^2)\,\vec{i} + \omega_e\,\omega_r z\,\vec{j} \; - \omega_r^2\, z\,\vec{k}$$

ملاحظة(١) : كان بالإمكان إيجاد مركبات $\overrightarrow{\Gamma_a}$ بتطبيق دساتير بور.

ملاحظة (٢) : يمكن تعيين مركبات السرعة المطلقة والتسارع المطلق علىجملة المحاور الثابتة $ox_1y_1z_1$ بملاحظة أن:

$$\vec{i} = \cos\psi\ \vec{i_1} + \sin\psi\ \vec{j_1}$$
$$\vec{j} = -\sin\psi\ \vec{i_1} + \cos\psi\ \vec{j_1}$$
$$\vec{k} = \vec{k_1}$$

$\psi = (\widehat{ox, ox_1})$ و $\psi = \int \omega_e\, dt = \omega_e t$ باختيار مناسب لمبدأ الزمن.

تمرين(٢) : $o_1x_1y_1$ محوران متعامدان في مستو ثابت ، مستقيم Δ يتدحرج دون انزلاق على محيط دائرة ثابتة مركزها o_1 نصف قطرها $1 =$ بحيث تبقى السرعة الزاوية لدوران النقطة c نقطة تماس المستقيم Δ مع الدائرة $(o_1,1)$ ثابتة وتساوي ω . M نقطــة مادية تتحرك على المستقيم Δ بحركة منتظمة سرعتها $= v$ ثابتة ، كان المستقيم Δ فــي لحظــة البدء مماساً للدائرة في النقطة $A(1,0)$ وكانت M في النقطة A في لحظة البدء أيضاً والمطلوب :

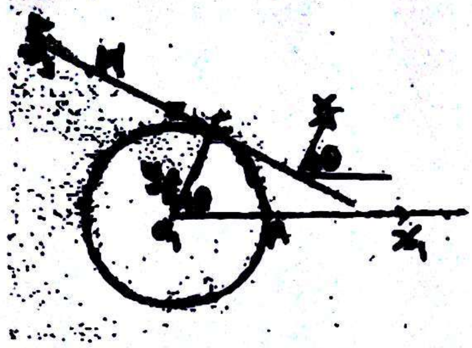
١- تعيين الاحداثيات المطلقة للنقطة M (بالنسبة لجملة المحاور ox_1y_1) أي معادلات الحركة المطلقة لــ M

٢- تعيين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M

٣- تعيين العلاقة التي تربط v بــ ω كي يكون $\overrightarrow{\Gamma_e}$ محمولاً على Δ .

الحل: إن حركة M هي محصلة حركتين حركة نسبية وهي حركتها على المستقيم Δ وحركة جرية مع Δ وهي حركة مستوية . بما أن حركة Δ تتدحرج دون انزلاق فإن نقطــة الــتماس c هــي المركــز الآني للدوران في الحركة المستوية : نختار النقطة o مبدأ الاحداثــيات المتماســكة مــع Δ النقطة من Δ التي كانت في A لحظة البدء . فمن شرط التدحرج دون انزلاق نلاحظ أن المسافة التي تقطعها نقطة التماس c (المركز الآني للدوران) علــى المســتقيم Δ (وهــو المتدحرج) تساوي المسافة التي تقطعها النقطة c على الدائرة $(o_1,1)$ (القــاعدة) أي أن طول $\overline{oc}$ يساوي طول القوس $\widehat{Ac}$ فإذا سمينا الزاوية بين o_1c و o_1x_1 θ كان لدينا $\overline{oc} = \widehat{Ac} = \theta$ (لأن نصف قطر الدائرة $= 1$)

نختار المحور oy منطبقاً على Δ والمحور ox العمود على Δ في النقطة o .



الشكل(٢٠)

لتعيين موضع النقطة M نكتب:

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1c} + \overrightarrow{co} + \overrightarrow{oM} \qquad , \qquad \left|\overrightarrow{oM}\right| = \int_0 v\,dt = vt \qquad (1)$$

نسقط هذه العبارة الشعاعية على المحورين o_1x_1 , o_1y_1 فنجد :

$$x_1(M) = \cos\theta + \theta\sin\theta - vt\sin\theta \qquad , \qquad y_1(M) = \sin\theta - \theta\cos\theta + vt\cos\theta$$

ولما كانت السرعة الزاوية لـ $\omega = c$ $\Leftarrow$ $\theta = \omega t$ (بملاحظة شروط البدء المعطاة)

ومنه

$$x_1(M) = \cos\omega t + (\omega - v)t\,\sin\omega t$$

$$y_1(M) = \sin\omega t - (\omega - v)t\,\cos\omega t$$

وهي معادلات الحركة المطلقة للنقطة M .

٢- لتعيين السرعة والتسارع المطلقين ، يكفي اشتقاق x_1 , y_1 بالنسبة للزمن ونكتب

$$\overrightarrow{\Gamma_a} = x_1''\,\overrightarrow{i_1} + y_1''\,\overrightarrow{j_1} \qquad , \qquad \overrightarrow{V_a} = x_1'\,\overrightarrow{i_1} + y_1'\,\overrightarrow{j_1}$$

لنعين مركبات السرعة المطلقة والتسارع المطلق على المحاور oxy المتحركة .

إن السرعة النسبية لـ M هي : $\overrightarrow{V_r} = v\vec{j}$

والسرعة الجرية لـ M هي : $\overrightarrow{V_e} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{cM}$

إن $\omega = \theta'$ لأن θ الزاوية التي يصنعها المستقيم ox من المستوي المتحرك مع المستقيم o_1x_1 مـن المستوي الثابت وتساوي وضوحاً الزاوية بين o_1x_1 , o_1c ونعين مركبات $\overrightarrow{cM}$ كما يلي :

$$\overrightarrow{cM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (vt - \theta)\vec{j}$$

ومنه

$$\overrightarrow{V_e} = (0,0,\omega) \times (0\,,(v-w)t\,,0) = -\omega(v-\omega)\,t\,\vec{i}$$

والسرعة المطلقة بالتالي هي :

$$\overrightarrow{V_a} = -\omega\,(v-\omega)\,t\,\vec{i} + v\,\vec{j}$$

تعيين التسارع : لنعين التسارع المطلق بطريقة تركيب الحركات فنكتب

$\overrightarrow{\Gamma_r}$ هو التسارع في حركة M النسبية ، وهي حركة مستقيمة منتظمة أي $\overrightarrow{\Gamma_r} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\Gamma_e}$ هو التسارع في حركة M الجرية وهي حركة مستوية ويمكن أن يحسب كما يلي:

$$\overrightarrow{\Gamma_e} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{cM}) = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{cM} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\overrightarrow{cM}}{dt}\right)$$

ولدينا $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ لأن $\vec{\omega}$ ثابت و

$$\frac{d\overrightarrow{cM}}{dt} = \overrightarrow{V_e}(M) - \vec{u}$$

حيث $\vec{u}$ سرعة انتقال c على القاعدة أو على المتدحرج

ومنه

$$\frac{d\overrightarrow{cM}}{dt} = -\omega(v-\omega)t\,\vec{i} - r\theta'\,\vec{j} = -\omega(v-\omega)t\,\vec{i} - \omega\,\vec{j}$$

وبالتعويض نجد

$$\overrightarrow{\Gamma_e} = (0,0,\omega) \times (-\omega(v-\omega)t, -\omega, 0) = \omega^2\,\vec{i} - \omega^2(v-\omega)t\,\vec{j}$$

ولنحسب أخيراً التسارع المتمم من العلاقة

$$\overrightarrow{\Gamma_c} = 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{V_r} = 2(0,0,\omega) \times (0,v,0) = -2\omega\, v\,\vec{i}$$

ويصبح التسارع المطلق :

$$\overrightarrow{\Gamma_a} = (\omega^2 - 2\omega\, v)\,\vec{i} - \omega^2\,(v-\omega)t\,\vec{j}$$

ملاحظـة (١) : كان بالامكان الحصول على مركبات $\overrightarrow{\Gamma_a}$ على المحاور o x y من دساتير بور أي من اسقاط العلاقة :

$$\overrightarrow{\Gamma_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}\right|_M + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{V_a}$$

$$= (-\omega(v-\omega), 0, 0) + (0, 0, \omega) \times (-\omega\,(v-\omega)\,t\,, v, 0)$$

فنجد :

$$= (-2v\omega + \omega^2)\,\vec{i} - \omega^2(v-\omega)t\,\vec{j}$$

وهي القيمة التي حصلنا عليها سابقاً

ملاحظة (٢) : يمكن الحصول على هذه المركبات أيضاً من اسقاط $\vec{i_1}\,,\ \vec{j_1}$ على المحاور $ox\,,\, oy$.

٤) كي يحمل $\overrightarrow{\Gamma_a}$ على Δ يجب أن تكون المركبة على x معدومة لذا تكتب

$$-2\omega v+\omega^2=0 \Rightarrow \omega=2v$$

وهي العلاقة المطلوبة.