$y' = f(x,y)$
$y(a) = \alpha$

المعادلات التفاضلية
العادية + الابتدائية

خطوة واحدة

عدة خطوات

طريقة رانج كوتا مرتبة ثانية

$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n)$

$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n$

$y_{n+1} = y_n + h(a_1k_1 + a_2k_2)$

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + hp_1,\ y_n + k_1 q_{11} h)$

طريقة تايلور

$y_{n+1} = y_n + hT^{(k)}(x_n, y_n)$

$T^{(k)}(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^{(k-1)}}{(k)!} f^{(k-1)}(x_n, y_n)$

① طريقة أويلر

العلاقة التكرارية
تابع مرتبة أولى

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

الخطأ الأعظمي

$E_{max} \leq \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L(x_{final} - x_{min})} - 1\right] + \delta\left[e^{L(x_{final} - x_{min})}\right]$

δ خطأ التدوير الأعظمي

$|y''| < M$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < L$

① خطأ التدوير $\delta = \max\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n\}$

② h مقدار الخطوة.

$q_1 + q_2 = 1$

$q_2 = \frac{2}{3}$

$q_1 = \frac{1}{3},\ P_1 = \frac{q_2}{4} = q_{11}$

طريقة الستون

$q_2 P_1 = \frac{1}{2}$

$q_2 = \frac{1}{2}$

$q_1 = \frac{1}{2},\ P_1 = q_{11} = 1$

طريقة هيون

$q_2 q_{11} = \frac{1}{2}$

نفرض $q_2 = 1$

$q_1 = 0,\ P_1 = \frac{1}{2} = q_{11}$

طريقة أويلر المعدلة

$M = \|y''\|^{max}$

طريقة لحساب الـ M

$y = e^{x} + y^{2}$ الحل العملي.

$y' = \frac{dy'}{dx} = \frac{df}{dx}(x,y)$

$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{y'=} \Rightarrow y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left[(f)\right]$

سؤال دورة

$y' = y - x^{2} - 1 \qquad \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 0.5 \end{array}\right\} + n = 6$

$y(x) = (x+1)^{2} - 0.5e^{x}$ والحل العملي:

الدقة لخمس مراتب عشرية

$x_{final} = 2 \qquad \delta = 0.5 \times 10^{-5}$

$x_{min} = 0 \qquad h = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$L = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad f(x,y) = y - x^{2} - 1 \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 1$

$L = 1$

$M = |y''| = |2 - 0.5e^{x}| \leq |2| + |0.5|e^{x} \leq |2| + 0.5e^{2}$

(أعظم قيمة لـ x هي 2 لأنها دالة أسية)

مثال(4):

أوجد الحل التقريبي لمسالة الشرط الابتدائي:

$n=10$ $\quad h=\frac{b-a}{n}$

$$y' = \underbrace{-y+x+1}_{f(x,y)} \; ; \; 0 \le x \le 1 \;, \; y(0)=1$$

ثم قارنه بالحل الفعلي: $y = x + e^{-x}$.

(نقصد بالمقارنة الخطأ المطلق ويمثل القيمة المطلقة للفرق بين الحل الفعلي والحل التقريبي) أي $E = |y_{n+1} - z_{n+1}|$

الحل:

$$x_n = x_0 + nh \quad , \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n + x_n + 1$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(-y_n + x_n + 1)$$

$$y_1 = y_1 + 0.1(-y_0 + x_0 + 1) = 1 + 0.1(-1+0+1) = 1$$

$$y_2 = y_1 + 0.1(-y_1 + x_1 + 1) = 1 + 0.1(-1+0.1+1) = 1.01$$

وهكذا نحصل على القيم التقريبية الموضحة في الجدول أدناه.

n	x_n	$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$
0	0	1
1	0.1	1.01
2	0.2	1.029
3	0.3	1.016100
4	0.4	1.90490
5	0.5	1.131441
6	0.6	1.78297
7	0.7	1.230467
8	0.8	1.287420
9	0.9	1.348578

جدول 2

وللمقارنة بين الحل التقريبي والحل الفعلي نوجد قيم الحل الفعلي عند النقاط x_n:

$$z_{n+1} = x_n + e^{(-x_n)}$$
$$z_1 = x_0 + e^{x_0} = 0 + e^0 = 1$$
$$z_2 = x_1 + e^{x_1} = 0.1 + e^{-0.1} = 1.04837$$
$$z_3 = x_2 + e^{x_2} = 0.2 + e^{(-0.2)} = 1.018731$$
$$z_4 = x_3 + e^{-x_3} = 0.3 + e^{(-0.3)} = 10.40818$$

وهكذا نحصل على جدول المقارنة التالي:

n	y_{n+1}	z_{n+1}	$Error = \lvert y_{n+1} - z_{n+1} \rvert$
0	1	1	0.00000
1	1.01	1.04837	0.03837
2	1.029	1.048731	0.0217631
3	1.016100	1.040818	0.024718
4	1.90490	1.070320	0.16542
5	1.131441	1.06531	0.066131
6	1.78297	1.148812	0.634158
7	1.230467	1.196585	0.033883
8	1.287420	1.249329	0.038091
9	1.348578	1.306570	0.042008

جدول 3

مبرهنة(3) : برهان

بفرض أن f تابع مستمر ويحقق شرط ليبتشز بالمتغير y والثابت L على المجموعة D

$$D = \{(x,y) | a \le x \le b, -\infty < y < \infty\}$$

و M ثابت يحقق:

$$|y''(x)| \le M \ ; \qquad \forall x \in [a,b]$$

وبفرض أن $y(x)$ يرمز لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'(x) = f(x,y) \ ; \qquad a \le x \le b \ , \qquad y(a) = \alpha$$

و $i = 0,1,2,\dots,M-1$ $w_i \approx y(t_i)$ هي التقريبات المولدة بطرائق أولر لـ n من النقاط. عندئذ تحقق القيمة المطلقة للخطأ المتراجحة التالية:

$$|y(x_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(x_i - a)} - 1\right] \qquad (3)$$

تبين المبرهنة السابقة أن هناك علاقة خطية بين طول الخطوة h والقيمة الحدية للخطأ، ونلاحظ أن تصغير طول الخطوة يعطينا دقة أكبر للتقريبات التي نريد الحصول عليها.

ملاحظة:

موطن الضعف في المبرهنة يقع في ضرورة معرفة المشتق الثاني للحل. رغم كون هذا الشرط يمنعنا من إيجاد حد واقعي للخطأ، فيجب الإشارة إلى أن كُلاً من $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجود. لذا:

هكذا تم الاشتقاق بالنسبة للدالة f

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) f(x, y(x))$$

إذا من الممكن أحياناً إيجاد الخطأ في $y''(x)$ دون معرفة $y(x)$ بصورة صريحة.

تم إهمال أثر أخطاء التدوير في نتيجة المبرهنة (3) لحساب القيمة الحدية للخطأ التي تتأثر بمقدار الخطوة h، حيث إنه كلما صغرنا مقدار الخطوة فإننا سوف نضطر لإجراء حسابات أخرى وهذا يؤدي بدوره إلى ظهور أخطاء إضافية، ويمكن في هذه الحالة الاستفادة من صيغة المعادلة المميزة:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(x_i, w_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

إذ نستخدم عوضاً عنها المعادلة:

$$y_0 = \alpha + \delta_0$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \delta_{i+1} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

حيث ترمز δ_i إلى أخطاء التدوير المرتبطة بالتقريب y_i.

مبرهنة(4) :

ليكن $y(x)$ حلاً وحيداً لمسألة القيمة الابتدائية:

$$y(a)=\alpha \qquad a\le x\le b$$

$$y'(x)=f(x,y)$$

و $u_0,u_1,\dots,u_n$ هي القيم التقريبية للحل الناتجة عن استخدام الطرائق السابقة:

$$u_0=\alpha+\delta_0$$

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)+\delta_{i+1} \qquad i=0,1,2,\dots,M-1$$

فإذا كانت $|\delta_i|<\delta$ ($\forall i=0,1,2,\dots,M$)، وتحققت أيضاً فرضيات مبرهنة الخطأ الحدي. (أي إنّ f مستمر ويحقق شرط ليبتشز على D بثابت L ويوجد حد أعلى للقيمة المطلقة للمشتق الثاني لـ y). فإن:

$$|y(x_i)-y_i|\le\frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L(x_i-a)}-1\right]+|\delta_0|e^{L(x_i-a)} \qquad (4)$$

نلاحظ أنّ الخطأ هنا غير مرتبط خطياً بمقدار الخطوة h وذلك لأن:

$$\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right)\xrightarrow{h\to 0}\infty$$

ويُتوقع أن يصبح الخطأ أكبر من أجل قيم لـ h صغيرة بشكل كاف، ويمكن إجراء بعض الحسابات لإيجاد حد أدنى لمقدار الخطوة h، وذلك بوضع:

$$E(h)=\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right) \qquad (5)$$

$$\Rightarrow E'(h)=\left(\frac{M}{2}+\frac{\delta}{h^2}\right)$$

وعندئذ نجد:

إذا كان $h<\sqrt{2\delta/M}$ ، فإن $E'(h)<0$ وعليه فإن $E(h)$ يتناقص، مع ملاحظة $|E(h)|$ متزايدة .

وإذا كان $h>\sqrt{2\delta/M}$ ، فإن $E'(h)>0$ وعليه فإن $E(h)$ يتزايد.

أما القيمة الدنيا لخطأ الخطوة فهي من أجل h التالية:

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$$

(6)

ويؤدي تناقص h إلى أقل من هذه القيمة زيادة في الخطأ الكلي في التقريب، لو جرت العادة أن تكون قيمة δ صغيرة بقدر كافٍ بحيث لا يؤثر هذا الحد الأدنى لـ h في عمليات طرائق أولر.

2-2 طريقة سلسلة تايلور Taylor series method:

لما كان غرض الأساليب العددية هو إيجاد تقريبات بدقة كافية وبأقل جهد ممكن، فإننا نحتاج إلى وسيلة لمقارنة فعاليات مختلف طرائق التقريب. المعيار الأول الذي ندرسه يُدعى خطأ القطع المحلي للطريقة.

تعريف(2):

يُعطى خطأ القطع الموضعي (Local truncation) في كل خطوة لمعادلة الفروق التالية:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(x_i, w_i) \qquad i = 0,1,2,\ldots,M-1$$

بالعلاقة:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - \left(y_i + h\phi(x_i, y_i)\right)}{h}$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(x_i, y_i)$$

فمن أجل طريقة أولر نجد أن علاقة القطع الموضعي عند الخطوة i تعطى بالعلاقة:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i) \qquad , i = 0,1,2,\ldots,M-1$$

$$= \frac{1}{h}\left(y(t_{i+1}) - w_{i+1}\right)$$

ويدعى هذا الخطأ بالخطأ الموضعي لأنه يقيس دقة الطريقة عند خطوة محددة، وذلك بفرض أن الطريقة كانت صحيحة عند الخطوة السابقة، وهو مرتبط بالمعادلة

التفاضلية وبمقدار الخطوة في التقريب.

و نلاحظ أن :

$$\zeta_i \in [x_i, x_{i+1}] \text{ حيث } \tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2} y''(\zeta_i)$$

بما أن المشتق الثاني محدود من الأعلى بثابت K على مجال قيم x ينتج:

$$|\tau_{i+1}(h)| \le \frac{h}{2} K \tag{7}$$

ومنه فإن خطأ القطع الموضعي لطريقة أولر تابع لـ h ونعبر عنه $O(h)$ وترمز قوى h لمرتبة الخطأ.

لنفترض أن $y(x)$ قابلة للمفاضلة حتى المرتبة $(n+1)$، بتطبيق مبرهنة تايلور بجوار x_{n+1}:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \ldots + \frac{h^n}{(n)!} y^{(n)}(\zeta, y(\zeta_i))$$

حيث $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

لكن:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y''(x) = f'(x, y(x)), \ldots, y^{(M)}(x) = f^{(M-1)}(x, y(x))$$

بالتعويض نجد:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \ldots + \frac{h^M}{(M)!} f^{(M-1)}(\zeta, y(\zeta_i)) \tag{8}$$

وتدعى هذه الطريقة طريقة تايلور من المرتبة M.

تستخدم طريقة تايلور من مراتب مختلفة في الحالات التي يمكن الحصول فيها على تفاضل التابع رياضياً، وتمتاز هذه الطريقة على بعض الطرائق الأخرى بأنها لا تتأثر بخطأ التدوير مثلما تتأثر الفروق المستخدمة في الطرائق المذكورة ويمكن استخدام قيمة h كبيرة نوعاً ما.

ويمكن كتابة العلاقة (8) بالشكل :

$$y_{n+1} = y_n + hT^{(n)}(x_n, y_n) \; ; \quad n = 0,1,2,\dots,M-1 \qquad (9)$$

حيث:

$$T^{(n)}(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^{(n-1)}}{(n)!} f^{(n-1)}(x_n, y_n)$$

مثال (5):

أوجد الحل التقريبي لمسالة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + x + 1 \; ; \; 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1$$

باستخدام طريقة تايلور من المرتبة الثانية والمرتبة الرابعة.

k=4 k=2

الحل:

أولاً: باستخدام طريقة تايلور من المرتبة الثانية:

$$y_{n+1} = y_n + hT^2(x_n, y_n)$$

$$T^2(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n + x_n + 1$$

$$f'(x_n, y_n) = -y'_n + 1 = y_n - x_n$$

$$T^{(2)}(x, y) = -y_n + x_n + 1 + \frac{h}{2}(y_n - x_n) = (1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1$$

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1] \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots\dots,M-1$$

$$y_1 = y_0 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(x_n - y_n) + 1]$$

$$= 0 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(0 - 1)] = 1.00500$$

$$y_2 = y_1 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(x_1 - y_1) + 1]$$

$$= 1.00500 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(0.1 - 1.00500) + 1] = 1.019025$$

وهكذا نحصل على بقية القيم حتى قيمة y_9 والجدول 4 يوضح القيم المحسوبة

ثانياً: باستخدام طريقة تايلور من المرتبة الرابعة:

$$y_{n+1} = y_n + hT^4(x_n, y_n))$$

K=4

حيث:

$$T^4(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!}f''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4!}f'''(x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n - x_n + 1$$

$$f'(x_n, y_n) = -y_n' + 1 = y_n - x_n - 1 + 1 = y_n - x_n$$

$$f''(x_n, y_n) = -y_n + x_n$$

$$f'''(x_n, y_n) = y_n - x_n$$

وبالتعويض في العلاقة:

$$T^4(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!}f''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4!}f'''(x_n, y_n)$$

نجد أن:

$$T^4(x_n, y_n) = 1 + (1 - \frac{h^3}{24} + \frac{h^2}{6} - \frac{h}{2})(x_n - y_n)$$

وبالتعويض في سلسلة تايلور نجد أن:

$$y_{n+1} = y_n + h[1 + (1 - \frac{h^3}{24} + \frac{h^2}{6} - \frac{h}{2})(x_n - y_n)])$$

ملاحظة :

يمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة n, y_n بالشكل التالي :

إذا كان $n = 10$ فإن $h = 0.1$ و $x_n = nh$ بالنسبة لسلسلة تايلور من المرتبة الثانية:

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1]$$

$$= y_n + 0.1\,[0.95(0.1\,n - y_n) + 1]$$

$$y_{n+1} = 0.905y_n + 0.0095n + 0.1$$

وبالنسبة لصيغة تايلور من المرتبة الرابعة تصبح:

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \frac{h^3}{24} + \frac{h^2}{6} - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1]$$
$$= y_n + 0.1[(1 - \frac{0.01}{24} + \frac{0.01}{6} - \frac{0.1}{2})(0.1n - y_n) + 1]$$
$$y_{n+1} = 0.9048375 y_n + 0.00951625n + 0.1$$

من أجل: $n = 0,1,2,3,.........,9$

والجدول 4 يمثل القيم المحسوبة في حالة سلسلة تايلور من المرتبة الثانية والرابعة:

x_n	Taylor method of order 2	Taylor method of order 4
0.0	0.00000	1.00000
0.1	1.00500	1.0048375
0.2	1.09025	1.0187309014
0.3	1.041218	1.0408184220
0.4	1.070802	1.0703202889
0.5	1.107076	1.1005309344
0.6	1.149404	1.488119344
0.7	....	....
0.8	....	....
0.9	....	....

جدول 4

ملاحظة:

يمكن اعتبار طريقة أولر على أنها طريقة تايلور من المرتبة الأولى. و كلما كانت درجة حدودية تايلور أكبر (أي من رتب أعلى كالمرتبة الخامسة أوالسادسة أو.......) كانت درجة الدقة أكبر.

مثال(6):

استخدم طريقة تايلور من المرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{(x-y)}{2} \; ; \; y(0) = 1 \, , 0 \le x \le 3$$

ومن أجل $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$، ثم قارن النتيجة بالحل الفعلي $y = 3e^{-x/2} - 2 + x$.

الحل:

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

وبهذا لدينا ثلاث معادلات بأربعة مجاهيل ، نختار قيمة لأحد المجاهيل ولتكن a_2
ونوجد القيم الأخرى بدلالتها فنجد أن:

$$a_1 = 1 - a_2 \quad \text{و} \quad p_1 = \frac{1}{2a_2} \quad \text{و} \quad q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

إن خطأ القطع المحلي لطريقة نقطة المنتصف من المرتبة $O(h^2)$ (يمكن استنتاج
ذلك من سلسلة تايلور)

5-2 طريقة أولر المعدلة (Modified Euler's Method):

نحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف بوضع: $a_2 = 1$
وفي هذه الحالة يكون:

$$q_{11} = \frac{1}{2} \text{ ، } p_1 = \frac{1}{2} \text{ ، } a_1 = 0$$

نعوض فنجد

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h \quad (11)$$

حيث $k_1 = f(x_i, y_i)$ و $k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$

6-2 طريقة هين (Heun's Method):

نحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف بوضع: $a_2 = \frac{1}{2}$

وبهذا يكون لدينا: $a_1 = \frac{1}{2}$ ، $p_1 = 1$ ، $q_{11} = 1$

وعليه

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h \quad (12)$$

حيث $k_1 = f(x_i, y_i)$ و $k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$

ويمكن توضيح هذه الطريقة من خلال الشكل التالي: