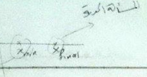


الفصل الثالث . [المحاضرة 11]

المعادلات التفاضلية

$y' = f(x, y)$ (مسألة شروط ابتدائية) ، $y(x_0) = \alpha$

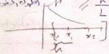
مبرهنة بيكارد : ماهي الشروط التي تحقق الاستقرار بالتحليل العددي للمعادلات التفاضلية بشروط ابتدائية

① $|f(x, y_0)| \leq k$ وذلك $\forall x \in [x_{min}, x_{final}]$

معنى ذلك أن $f(x, y_0)$ مستمرة أي محدودة على مجال مغلق (وهذا إثبات المحدودية) $k > 0$

② $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$ فرضنا ذلك كي لا نذهب إلى اللانهاية (لكي يكون الحل تكراري) سنفرض أن L عدد محدود وليس لانهاية

③ $h^{-1} \geq \frac{k}{L}\left(e^{2(x_{min} - x_{final})} - 1\right)$ (الخطوة, خطوة) أي سيكون لدينا مجموعة من القواعد



عندئذٍ يوجد حل وحيد.

المسألة الموضوعة جيداً (Well) :

① للمسألة حل وحيد.

② تحقق أن المسألة ليست قليلة الاستقرار.

ليكن $y(x)$ حل المسألة ①

$$y' = f(x, y) = y(x_0) = \alpha$$

$$z' = f(x, y) + \delta(x) \quad , \quad z(x_0) = \alpha + \varepsilon_0$$

$$|z(x) - y(x)| < k(\varepsilon)\varepsilon$$

$$|\varepsilon_0| < \varepsilon \quad , \quad |\delta| < \varepsilon$$

الطرائق العددية

ذات خطوة واحدة ← ذات عدة خطوات.

ذات خطوة واحدة: أولر ، تايلور ، طرائق رانج كوتا

طرائق رانج كوتا: رتبة ثانية ، رتبة ثالثة ، مرتبة رابعة.

رتبة ثانية: معدلة المنتصف ، أولر المعدلة ، تحسين

الفصل الثالث

الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية

Numerical Solution Ordinary Differential Equations

يمكن وصف العديد من الظواهر الفيزيائية باستخدام المعادلات التفاضلية، وهذا ما يعطي دراسة هذه المعادلات أهمية في الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية، هذا وقد برز في مجال دراسة المعادلات التفاضلية العادية أسماء العلماء مثل Cauchy و Poincare و Hilbert، وما تزال الدراسة مستمرة حتى اليوم.

من أهم الموضوعات المدروسة في هذا المجال:

- وجود ووحدانية الحلول المحققة لشروط معينة.
- خصائص الحلول.
- مبرهنة الاستقرار (تأثير التغيرات الصغيرة على الحل).
- مسائل القيمة الحدية، التوابع المتعامدة، والمبرهنة الطيفية.

وهناك نوعان من المعادلات التفاضلية:

1. المعادلات التفاضلية العادية Ordinary Differential Equations(ODE)
2. المعادلات التفاضلية الجزئية Partial Differential Equations(PDE)

فالمعادلة التفاضلية العادية تحتوي على متغير مستقل واحد أما المعادلة التفاضلية الجزئية فتحتوي على عدد من المتغيرات المستقلة (فمثلاً، تعتمد معادلة درجة الحرارة $u(x,t)$ على الموضع x والزمن t).

نرمز للمعادلة التفاضلية العادية بالرمز $\frac{dy}{dx}$ أو y' أو $y^{(1)}$ ويكون لحلها الصيغة:

$$y = g(x, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n)$$

حيث C_n عبارة عن ثوابت، ويشتمل هذا النوع من المعادلات التفاضلية على:

1) مسائل القيم الابتدائية Initial Value Problem:

يكون للمعادلة التفاضلية في هذا النوع من المسائل شرط ابتدائي (initial Condition) للمتغيرات، ويمثل هذا الشرط الابتدائي النقطة الابتدائية التي يمر بها التابع التي تمثل حلّ المعادلة التفاضلية.

2) مسائل القيم الحدية Boundary Value Problem :

أما في هذا النوع من المسائل فيكون للمعادلة التفاضلية شرط ابتدائي وشرط آخر معين عند نهاية المجال للمتغير المستقل، ويمثل هذان الشرطان نقطتان يجب أن يمر التابع بهما التي تمثل حل المعادلة التفاضلية.

نتناول في هذا الجزء بعض الطرائق العددية المستخدمة في حل المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى ذات الصيغة:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

والمزوّدة بالشرط الابتدائي: $y(x_0) = y_0$

تعتمد الطرائق العددية على معرفة قيمة المتغير y في لحظة البدء x_0 ثم ننطلق من هذه النقطة خطوة فخطوة فنحسب y_1 من أجل $x_0 + h$ و y_2 من أجل $x_1 + 2h$ حيث $h = \frac{b-a}{M}$.

1- مبرهنة بيكارد لوجود ووحدانية الحلول(1) :

:(Picard's Theorem: Existence and Uniqueness of Solution)

تُعد هذه المبرهنة هي المبرهنة الأساسية في حل مسائل القيم الابتدائية.
ليكن $f(x,y)$ تابعاً مستمراً على D حيث إن:

$$D = \{(x,y) : x \in [x_0, x_{final}], y \in [y_0 - h, y_0 + h]\} \text{ و } h > 0$$

و لنفرض أن :

1. $|f(x, y_0)| \le K$ وذلك $\forall x \in [x_0, x_{final}]$ و $K > 0$

2. يحقق التابع شرط ليبشتز أي يوجد ثابت $L>0$ يحقق :

$$\left|f(x,u)-f(x,v)\right|\le L|u-v|$$

وذلك $\forall u,v\in[y_0-h,y_0+h],\ \forall x\in[x_0,x_{final}]$

3. $h\ge\frac{K}{L}\left(e^{L(x_0,x_{final})}-1\right)$

عندئذ يوجد حل وحيد $y\in C^1[x_0,x_{final}]$ يحقق $y(x_0)=y_0$ و $y'(x)=f(x,y)$

وذلك $\forall x\in[x_0,x_{final}]$.

بشكل مبسط تنص مبرهنة بيكارد أنه ضمن الفرضيات السابقة يوجد حل ضمن المنطقة D. وهذا الحل الوحيد في $C^1[x_0,x_{final}]$ الذي يحقق مسألة القيمة الابتدائية .

مثال(1):

لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية:

$$y'(t)=1+x\sin(xy)\quad;\quad \boxed{0\le x\le 2}\quad\quad y(0)=0$$

عندئذ بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى $\zeta\in[y_1,y_2]$ نجد:

$$\frac{f(x,y_2)-f(x,y_1)}{y_2-y_1}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,\zeta)=x^2\cos(x\zeta)$$

نستنتج:

$$\left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right|=|y_2-y_1|\left|x^2\cos(x\zeta)\right|\le 4|y_2-y_1|$$

أي إنّ f يحقق الشروط السابقة ومسألة القيمة الابتدائية لها حل وحيد، حيث $-\infty<y<\infty$ و $0\le x\le 2$.

تعريف(1):

نقول عن مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'(x)=f(x,y)\quad;\quad a\le x\le b\quad\quad y(a)=\alpha$$

إنها موضوعة جيداً (أو جيدة الطرح) إذا تحققت الشروط التالية:

1. للمسألة حل وحيد.
2. من أجل أي عدد موجب ε يوجد ثابت موجب آخر $k(\varepsilon)$ بحيث إنّه إذا كان $|\varepsilon_0|<\varepsilon$ و $\delta(t)$ تابع مستمر على $[a,b]$ يحقق $|\delta(x)|<\varepsilon$ على المجال $[a,b]$، يوجد حل وحيد $z(x)$ للمسألة:

$$z(a)=\alpha+\varepsilon_0$$

$$z'(x)=f(x,y)+\delta(x) \qquad a\le x\le b$$

بحيث يُحقق:

$$|z(x)-y(x)|<k(\varepsilon)\varepsilon$$

ندعو المسألة الواردة في الشرط الثاني من المبرهنة السابقة بالمسألة القلقة perturbed problem، وتفترض إمكانية وجود خطأ $\delta(x)$ في تقديم عبارة المعادلة التفاضلية، مقابل خطأ ε_0 في الشرط الابتدائي.

تهتم الطرائق العددية دائما بحل المعادلة القلقة،لأن أي خطأ يدخل في التمثيل يؤدي إلى مسألة من هذا الطراز، وفي حال كون المعادلة موضوعة جيداً فإن الحل العددي للمعادلة القلقة سوف يكون قريباً جداً من حل المعادلة الأصلية، والمبرهنة التالية توضح هذا الأمر:

مبرهنة(2) :

لتكن المجموعة D المعرفة بالشكل:

$$D=\{(x,y): x\in[a,b], y\in]-\infty,+\infty[\}$$

فإذا كان f مستمراً على D ويحقق شرط ليبتشز بالمتغير y،عندها تكون مسألة القيمة الابتدائية (1) موضوعة جيداً.

مثال(2):

بفرض المجموعة D هي:

$$D=\{(x,y) \ : \ x\in[0,1] \ , \ y\in]-\infty,+\infty[\}$$

ولنأخذ مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$y'(x) = y - x^2 - 1 ; \qquad 0 \le x \le 2 \qquad , y(0) = 0.5$$

لدينا:

$$\left| \frac{\partial\left(y - x^2 - 1\right)}{\partial y} \right| \le |1| = 1$$

نستنتج أن التابع يحقق شرط ليبتشزعلى D، وبما أنه مستمر على المجموعة D، فإن المسألة موضوعة جيدا.

والمسألة المرافقة لها هي:

$$z'(x) = z - x^2 - 1 + \delta ; \qquad 0 \le x \le 2 \ , \ z(0) = 0.5 + \varepsilon_0$$

حيث δ و ε_0 ثابتان

لكن الحل الفعلي للمسألة هو:

$$y(x) = (x+1)^2 - 0.5 e^x$$

أما المسألة القلقة فحلّها:

(٢)

$$z(x) = (x+1)^2 + (\delta + \varepsilon_0 - 0.5) e^x - \delta$$

ويمكننا التحقق أنه إذا كان $|\delta| < \varepsilon$ و $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ فإن:

$$\begin{aligned} |z(x) - y(x)| &= \left|(\delta + \varepsilon_0 - \cancel{0.5}) e^x - \delta\right| \\ &\le |\delta + \varepsilon_0| e^2 + |\delta| \\ &\le \left(2e^2 + 1\right)\varepsilon \end{aligned}$$

$\varepsilon_0 < \varepsilon$

مستقرة

وهذا يتوافق مع معطيات المبرهنة السابقة.

2- الطرائق ذات الخطوة الواحدة:

سنستعرض في البداية طريقتين ابتدائيتين لإعطاء القارئ فكرة عن الموضوع المدروس، ومن ثم ننتقل إلى طرائق أخرى أكثر دقة وفاعلية.