# تلخيص أفكار الفصل الأول : التقريبات باستخدام المربعات الصُغرى

**أنواع التقريبات :** يوجد نوعين للتقريبات :

1) **تقريب خطي**　　　　　　2) **تقريب غير خطي**

**أمثلة لتوضيح مسائل التقريب الخطي وغير خطي :**

- **تقريب خطي :**

$$\emptyset(x, c_0, c_1, c_2, c_3) = c_0 \underbrace{1}_{\emptyset_0(x)\ \text{لا يحوي ثوابت}} + c_1 \underbrace{e^{2x}}_{\emptyset_1(x)\ \text{لا يحوي ثوابت}} + c_2 \underbrace{ln\,(x)}_{\emptyset_2(x)\ \text{لا يحوي ثوابت}} + c_3 \underbrace{(x^3+1)}_{\emptyset_3(x)\ \text{لا يحوي ثوابت}}$$

**إذا كان كل من $\emptyset_0(x)$ و $\emptyset_1(x)$ و $\emptyset_2(x)$ ...................... $\emptyset_n(x)$ لاتحوي ثوابت $c$ يكون التقريب خطي .**

- **تقريب غير خطي :**

$$\emptyset(x, c_0, c_1, c_2, c_3) = c_0 \underbrace{cosh(c_1 x)}_{\emptyset_0(x)\ \text{تحوي ثوابت}\ c_1} + c_2 \underbrace{e^{-c_3(x-c_4)}}_{\emptyset_1(x)\ \text{يحوي ثوابت}\ c_3, c_4}$$

## 1) تقريب خطي :

**ينقسم إلى :**

**بيانات منقطعة**　　　　**بيانات مستمرة**

❖ **البيانات المنقطعة :** هدفنا هو إيجاد ثوابت خطية لمعادلة تقريب بحيث يكون الخطأ أصغر ما يمكن.

يجب علينا حل جملة المعادلة التالية :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{i=0}^{N} w_i \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{\overbrace{N}^{\text{عدد النقاط المعطاة}}} w_i f(x_i)\varphi_k(x_i)$$

حيث أن : $\varphi$ هي دالة التقريب التي نبحث عن ثوابت لها ،

$f(x_i)$ هي وايات النقاط المُعطاة .

$w_i$ هي دالة الوزن .

وتكتب بشكل مصفوفي كالآتي :

$$G.c = a$$

حيث :

$$G = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots\cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots & \cdots\ \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

و $c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ و $a = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$

حيث :

$$(\varphi_n,\varphi_n)=\sum_{i=0}^{N} w_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$$

وَ

$$(f,\varphi_n)=\sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i).\varphi_k(x_i)$$

**أنواع التقريبات للبيانات المنقطعة :**

1) **التقريب بالحدودية الجبرية :** عندها يكون $\varphi_k(x_i)=x_i^k$ وتكون $w(x)=1$ وتكون جملة المعادلات بالشكل المصفوفي :

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum {x_1}^2 & \dots\dots\sum {x_i}^n \\ \vdots & & & \\ \sum {x_i}^n & & \dots\dots & \sum {x_i}^{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum f(x_i)\\ \sum x_i f(x_i)\\ \vdots\\ \sum {x_i}^n f(x_i) \end{pmatrix}$$

**حالات خاصة :**

- $n=1$ **تقريب بالمستقيم :** $y=c_0+c_1x$ .

وتكون جملة المعادلات الخطية بالشكل المصفوفي :

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum {x_i}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0\\ c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum x_i\\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

**لاحظ تمرين صفحة 22 ،23، 24 ،25 .**

✓ <u>الخلاصة في حل التمارين :</u> **من هذا الشكل :**

**صيغة السؤال :** أوجد معادلة المستقيم الذي يقرب البيانات أو قرب البيانات باستخدام تابع خطي ويكون مُعطى لدينا مجموعة من النقاط .

هنا علينا إيجاد ثابتين $c_0$ و $c_1$ أي يكون الهدف من حل التمرين هو إيجاد حدودية من الشكل :

$$f(x)=c_0+c_1x$$

نقوم بحساب كل من المجاميع التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,,\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\,,\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

نعوض النواتج في جملة المعادلات ويمكن حل جملة المعادلات باستخدام الآلة الحاسبة. بعد حل الجملة نحصل على قيمة الثوابت ونعوض في $f(x) = c_0 + c_1 x$

فتكون هي حدودية التقريب المطلوبة .

### $n = 2$ تقريب البيانات إلى قطع مكافئ : $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

وتكون جملة المعادلة الخطية بالشكل المصفوفي :

$$\begin{pmatrix} \overbrace{N+1}^{\text{عدد النقاط المعطاة}} & \sum x_i & \sum {x_i}^2 \\ \sum {x_i}^1 & \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 \\ \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 & \sum {x_i}^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i \,.\, y_i \\ \sum {x_i}^2 \,.\, y_i \end{pmatrix}$$

**لاحظ التمرين صفحة 27 ، 28 .**

✓ **<u>الخلاصة في حل التمارين :</u>**

صيغة السؤال : أوجد معادلة تابع من **الدرجة الثانية** الذي يقرب البيانات ،

هنا أيضا يكون الهدف هو إيجاد حدودية من الدجة الثانية وهي :

$$f(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

علينا إيجاد ثلاث ثوابت : نقوم أولاً بحساب المجاميع التالية :

$$\sum_{i=1}^{\overbrace{n}^{\text{عدد النقاط المعطاة}}} x_i \,, \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \,, \sum_{i=1}^{n} {x_i}^3 \,, \sum_{i=1}^{n} {x_i}^4 \,, \sum_{i=1}^{n} y_i \,, \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \,, \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 y_i$$

ثم نعوض في جملة المعادلات فنحصل على ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل بحلها نحصل على قيمة الثوابت ونعوض قيم الثوابت في الحدودية $f(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ فنحصل على حدودية التقريب.

**ملاحظة :**

لو كان التقريب من الدرجة الثالثة أو أعلى نعوض في ونحل بشكل مشابه لما سبق .

**<u>لحساب الخطأ المرتكب في البيانات المنقطعة :</u>**

$$E = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} w_i \left( y_i - \overbrace{\emptyset(x_i, c)^2}^{\text{هي دالة تقريب بعد تعويض قيم } x} \right)}$$

بينما لو أردنا حساب **الخطأ الفعلي** : $R = \dfrac{E}{T}$

حيث $E$ من العلاقة السابقة و $T$ تحسب بالقانون التالي:

$$T = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} {y_i}^2}$$

## 2-التقريب بالحدوديات المتعامدة :

هذه الطريقة تسهل من شكل المصفوفة حيث تجعل مصفوفة $G$ قطرية أي جميع عناصرها أصفار عدا القطر الرئيسي .

يتم حساب الثوابت بالشكل :

$$c_j = \frac{(f, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}$$

حيث :

$$(\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{N} w_i {\varphi_j}^2(x_i)$$

$$(f, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \varphi_k(x_i)$$

بينما :

$$(\varphi_j, \varphi_k) = 0 \quad : j \neq k$$

أي عندما تكون الأدلة مختلفة يكون الناتج صفراً .

---

### ❖ التقريب البيانات المستمرة :

أيضاً هنا هدفنا إيجاد الثوابت الخطية لمعادلة تقريب $\emptyset$ بحيث يكون الخطأ أصغر ما يمكن .

أي يجب علينا حل جملة المعادلات التالية :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \int_a^b w(x).\varphi_j(x).\varphi_k(x)\, dx = \int_a^b w(x).f(x).\varphi_j(x)\, dx$$

أما بالشكل المصفوفي تُكتب :

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots\dots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \dots & \dots\ \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

حيث :

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b w(x).\varphi_j(x).\varphi_k(x)dx$$

$$(f, \varphi_j) = \int_a^b w(x).f(x).\varphi_j(x)\,dx$$

## أنواع التقريبات لبيانات مستمرة :

**1- التقريب بالحدوديات الجبرية :** عندها يكون $w(x) = 1$ وَ $\varphi_k(x_i) = x_i^2$

عندها تكون جملة المعادلات بالشكل المصفوفي كالآتي :

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum x_1^2 & \dots\dots \sum x_i^n \\ \vdots & & & \\ \sum x_i^n & \dots\dots & & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \\ \vdots \\ \sum x_i^n f(x_i) \end{pmatrix}$$

حالة خاصة : عندما $n = 2$ أي حدودية التقريب من الشكل :

$$P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

بحيث يكون

$$\begin{pmatrix} \int_a^b 1dx & \int_a^b x.dx & \int_a^b x^2.dx \\ \int_a^b x.dx & \int_a^b x^2.dx & \int_a^b x^3.dx \\ \int_a^b x^2.dx & \int_a^b x^3.dx & \int_a^b x^4.dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f(x).dx \\ \int_a^b x.f(x).dx \\ \int_a^b x^2.f(x).dx \end{pmatrix} \quad ☆$$

✓ **الخلاصة في حل التمارين :**

**صيغة السؤال :** أوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية وهنا تكون البيانات هي **مجال** وليس مجموعة بيانات او نقاط .

أولا نحدد $a$ و $b$ من المجال لمعرفة حدود التكامل . المطلوب هو إيجاد حدودية التقريب من الشكل :

$$P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

نقوم بإيجاد قيمة الثوابت ليتم المطلوب ، من أجل ذلك نقوم أولاً بحساب التكاملات الآتية :

$$\int_a^b x.dx\,, \int_a^b x^2.dx\,, \int_a^b x^3.dx\,, \int_a^b x^4.dx, \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{التابع المعطى}}\,.dx\,, \int_a^b x.f(x).dx, \int_a^b x^2.f(x).dx$$

ثم نعوض في جملة المعادلات بالشكل المصفوفي ☆ فنحصل على جملة معادلات بثلاث مجاهيل بحلها نحصل على قيم الثوابت ، ثم نعوض قيم الثوابت في الحدودية $P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ فيتم المطلوب .

لاحظ الأمثلة صفحة : 37، 38 ، 39 ، 40 ، 41 ، 42 ، 43 ، 44 .

## 2- التقريب بالحدوديات المتعامدة :

تجعل المصفوفة $G$ قطرية أي جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي :

يتم حساب الثوابت بالشكل :

$$c_j = \frac{(f, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}$$

حيث:

$$(\varphi_j, \varphi_j) = \int_a^b w_i {\varphi_j}^2(x_i) dx$$

$$(f, \varphi_j) = \int_a^b w_i f(x_i) \varphi_j(x_i) dx$$

بينما : $(\varphi_j, \varphi_k) = 0 \quad : j \neq k$

أي عندما تكون الأدلة مختلفة يكون الناتج صفراً .

**ملاحظة :** البيانات **المنقطعة** تُعطى مجموعة من **النقاط** أما البيانات **المستمرة** تُعطى عن طريق **مجال** .

البيانات **المنقطعة** تكون القوانين هي **مجموع** أم البيانات المستمرة القوانين هي **تكاملات** .

**أشهر الدوال المتعامدة :**

لوجندر – تشيبشتيف– هرميت – لاكير .

1- **حدودية لوجندر :** وهي حدودية متعامدة في المجال $]-1,1[$ ، أما تابع الوزن هو : $w(x) = 1$

لدينا :

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$

والعلاقة التكرارية :

$$P_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}[(2k+1)xP(x) - (k)P_{k-1}(x)]$$

ونلاحظ أن :

$$\int_{-1}^{1} P_i(x).P_j(x).dx = \begin{cases} \delta_{ij} \dfrac{2}{2i+1} & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

- إذا كان المجال في حدودية لوجندر هو $[a, b]$ فيجب إرجاعه إلى $]-1,1[$ ، وذلك بإجراء التحويل

$$x = \frac{b-a}{2}.t + \frac{b+a}{2}$$

ثم نكمل الحل وفق القوانين .

✓ خلاصة حل التمارين وفق حدوديات لوجندر :

صيغة السؤال : اوجد حدودية المربعات الصغرى من **الدرجة الأولى** للتابع ما على المجال محدد :

باستخدام حدودية لوجندر

أولاً : الهدف هو إيجاد حدودية: $\emptyset(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x)$ .

أما لو كان المطلوب حدودية من الدرجة الثانية فيكون الهدف هو إيجاد حدودية من الشكل :

$$\emptyset(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$$

ونحسب الثوابت وفق العلاقة :

$$c_j = \frac{(f, P_j)}{(P_j, P_j)} = \frac{\int_a^b f(x).P_j(x)dx}{\int_a^b P_j(x).P_j(x)dx}$$

مع الانتباه إلى أن حدوديات $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$ يتم حفظها كما هي واستنتاج باقي حدوديات لوجندر مثل $P_2(x)$ ........ من العلاقة التكرارية . والانتباه إلى المجال إذا لم يكن $]-1,1[$ علينا إجراء تحويل **يجب الانتباه جيداً** .

وبعد معرفة قيم الثوابت وكل من حدوديات لوجندر نقوم بتعويض القيم ويتم المطلوب .

**2– حدوديات تشبتشيف :** من الحدوديات المتعامدة في بيانات مستمرة ، وهي حدوديات متعامدة على المجال $]-1,1[$ أما تابع الوزن لها هو $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

تُعطى بالشكل :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \;\; ; n \geq 0$$

بشكل خاص :

$$n = 0 \Rightarrow T_0(x) = \cos(\mathbf{0} \arccos(x)) = 1$$
$$n = 1 \Rightarrow T_1(x) = \cos(\mathbf{1} \arccos(x)) = x$$

العلاقة التكرارية التي تربط حدوديات تشبنتشيف هي : $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \; ; n \geq 1$

فمثلاً : $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$ وهكذا ...... (فقط تعويض في القانون)

إن حدودية تشيبتشيف $T_n(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ لها $n$ صفراً بسيطاً (غير مكرر) على المجال $[-1,1]$ يُعطى بالعلاقة:

$$(*) \ldots \ldots . x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \;\; ; \forall k = 1,2,3 \ldots , n$$

نختار $n$ أولاً ثم نبدأ بعدّ $k$ من $1$ إلى أن نصل $k = n$ فنحصل على جذور .

و تبلغ $T_n(x)$ قيمتها العظمى بالقيمة المطلقة عند النقاط:

$$x'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \quad \forall \, k = 1,2,3, \ldots . \underbrace{n-1}_{\text{لأن اشتقينا}}$$

أي أن: $T_n(x'_k) = (-1)^k$

**حدوديات تشبتشيف واحدية المعامل الرئيسي :**

نرمز لها بـ $\tilde{T}_n(x)$ وهي تنتج عن حدوديات تشبتشيف بتقسيم $T_n(x)$ على المعامل الرئيسي $2^{n-1}$ ومنه :

$$\tilde{T}_0(x) = 1$$
$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)\,; n \geq 1$$

أصفار هذ الحدودية هي نفسها أصفار حدودية تشبتشيف الممثلة بالعلاقة **

وتبلغ حدودية تشبتشيف واحدية المعامل الرئيسي قيمتها العظمى عند النقاط :

$$\bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \qquad \forall k = 1,2,3 \ldots \ldots . n-1$$

أي :

$$\tilde{T}_n(\bar{x}'_k) \; = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

**خاصية :**

$$\frac{1}{2^{n-1}} = max_{-1\leq x\leq 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right| \leq max_{-1\leq x\leq 1} \qquad \underbrace{|P_n(x)\,|}_{\text{حدودية ما من نفس درجة}\tilde{T}_n(x)}$$

ما يهمنا في حل التمارين هو تقدير الخطأ المرتكب فقط وذلك :

$$\max Erorr = |f(x) - P_n(x)| \leq \max \left| \frac{P^*_{n+1}(x) \cdot \overbrace{f^{(n+1)}(x)}^{\text{مشتق } f \; n+1 \text{ مرة}}}{(n+1)!} \right|$$

لكن إذا أخذنا أصفار تشبتشيف التي هي نفس أصفار تشبتشيف الواحدية عندئذٍ سيكون $\tilde{T}_{n+1}(x) = P^*_{n+1}(x)$

ومنه $\max|\tilde{T}_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$

وعليه فإن:

$$E_{MAX} \leq \frac{\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{2^n \cdot (n+1)!} \ldots \ldots \ldots (*)$$

العلاقة (*) هي التي نستخدمها لحل التمارين.

التقريب الغير الخطي :

التقريب بتابع أسي من الشكل $b.e^{ax}$ نقوم بردها إلى شكل خطي :

$$y = b.e^{ax}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نجد :

$$\Rightarrow \ln y = \ln(b) + ax$$
$$y = Ax + B$$

وبالتمارين الكتاب لدينا $(x_i, y_i)$ بإجراء التحويل تصبح $(x_i, \underbrace{\ln y_i}_{Y})$ ومهمتنا البحث عن $A$ و B عادت إلى بيانات منقطعة وتقريب خطي .

التقريب بتابع قوة من الشكل $bx^a$ :

$$y = bx^a$$
$$\xrightarrow{\text{بأخذ لوغاريتم الطرفين}} \ln y = \ln b + a.\ln x$$
$$Y = Ax + B$$

هنا يكون لدينا $(x_i, y_i)$ بالتحويل تصبح $\left(\underbrace{\ln x_i}_{X} \;,\; \underbrace{\ln y_i}_{Y}\right)$ وبهذا تصبح خطية وبيانات منقطعة ويكون الحل كسابق .

**ملاحظات عامة :**

- **عند حل التمارين يجب التأكد أن الألة الحاسبة تم ضبطها على الراديان وليس الدرجات :**
  **لتحويل إلى الراديان : shift−mode−rad .**
- **في الامتحان يجب حل جميع التكاملات باستخدام الآلة الحاسبة لأن الوقت لا يكفي لحل التكاملات تحليلياً .**
- **يجب الانتباه عند حل التكاملات باستخدام الآلة الحاسبة فمثلاً التكامل $\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ فسيظهر أن هناك خطأ ولا يمكن حسابه لذلك يجب علينا الاختصار فتصبح :**

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$$

**وهذا التكامل يمكن حسابه باستخدام الآلة الحاسبة**

*The end*

ريم الرحبي & نور ظاهر

*All the best*