(1)

١- مبرهنة: ليكن لدينا البيان البسيط $G(V,E)$ عندئذ يكون لدينا ما يلي محققاً:

مجموع درجات العقد يساوي ضعفي عدد الأضلاع:

$$\sum_{x \in V} deg(x) = 2|E|$$

الإثبات: نثبت بطريقتين:

1- كل ضلع يؤثر على عقدتين وبالتالي عدد الأضلاع المؤثرة على العقد هو $2|E|$

2- كل عقدة تتأثر بأضلاع البيان مرة وبالتالي فإن العدد المطلوب هو: $deg(v_1) + deg(v_2) + \dots + deg(v_n)$

إذاً فإن:

$$deg(v_1) + deg(v_2) + \dots + deg(v_n) = \sum deg(v_i) = 2|E|$$

٢- مبرهنة: ليكن لدينا البيان البسيط إن عدد العقد الفردية هو زوجي

الإثبات: ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ ولتكن V مجموعة عقد البيان حيث V_1 مجموعة العقد الفردية و V_2 مجموعة العقد الزوجية حيث:

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad , \quad V_1 \cup V_2 = V$$

حسب مبرهنة سابقة:

$$\sum_{x \in V} deg(x) = 2|E|$$

علماً أن $|E|$ مضروب بـ 2 $\Leftarrow$ $2|E|$ عدد زوجي

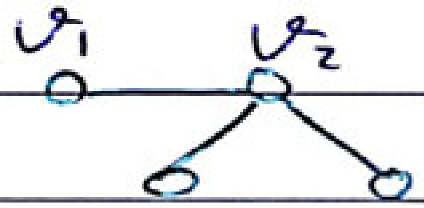
NAHAR

ومنه $\sum_{x\in V} \deg(x)$ زوجي

ونعلم أن: $\sum_{x\in V}\deg(x) = \sum_{x\in V_1}\deg(x) + \sum_{x\in V_2}\deg(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{2|E|}_{\text{زوجي}} = \sum_{x\in V_1}\deg(x) + \underbrace{\sum_{x\in V_2}\deg(x)}_{\text{زوجي}}$$

ومنه $\sum_{x\in V_1}\deg(x)$ زوجي $\Rightarrow |V_1|$ زوجي



مثال: إن كل من V_1 و V_2 عقد فردية لكن عددهم زوجي

3- مبرهنة: ليكن لدينا $G=(V,E)$ حيث يكون كل عقدة ترتبط بنفسها أي يكون البيان المترابط
نعرف العلاقة T في البيان G : x ترتبط بـ y بشكل مباشر أو غير مباشر $\Leftrightarrow xTy$ حيث $\forall x,y\in V$ عندئذ تكون العلاقة T علاقة تكافؤ (انعكاسية - تناظرية - متعدية)

الإثبات: 1- الانعكاسية: T هي انعكاسية لأن كل عقدة ترتبط بنفسها

$xTy \Leftrightarrow x=x_1,e_1,\dots,x_n=y$

2- تناظرية:

$y=x_n,y_n,\dots,y_1,x_1=x \Rightarrow yTx$

NAHAR

3) متعدية :

$$\left.\begin{array}{l} x\,T\,y \Rightarrow x = x_1, \ldots, x_n = y \\ y\,T\,z \Rightarrow y = y_1, e'_1, \ldots, e'_n, y_n = z \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x = x_1, e_1, \ldots, x_n = y = y_1, e'_1, \ldots, e'_n, y_n = z$$

ومنه $x\,T\,z$

مبرهنة 4 : ليكن لدينا $G(V;E)$ بيان مترابط عدد عقده $|V| = n$

عندئذ يكون عدد أضلاعه :

$|E| \geq n-1$

حيث $n \geq 1$

الإثبات : نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي :

1- نفرض صحتها من أجل $n = 1, 2$

$n=1 \Leftarrow$

$|E| = n-1 = 1-1 = 0 \Rightarrow |E| \geq 0$

محققة

$n=2 \Leftarrow$

$|E| = n-1 = 2-1 = 1 \Rightarrow |E| \geq 1$

محققة

2- نفرض صحتها من أجل $n=k \Leftarrow$

$|E| \geq k-1 \quad (*)$

3- لنثبت صحتها من أجل $n = k+1$.

ليكن لدينا البيان $H(V_n, E_n)$ مترابط

حيث : $|V_n| = k+1$

نشكل المجموعة S :

$S = \{m$: عدد الأضلاع في البيانات المترابطة التي عدد عقدها $k+1\}$

المجموعة S مرتبة وبالتالي يوجد عنصر أصغري t

البيان الموافق لـ t نسميه H_t وبما أن t أصغرية أي هو البيان الذي يحتوي على أقل عدد أضلاع بحيث يبقى البيان مترابط وبحذف ضلع واحد يصبح غير مترابط .

أي $\exists e \in E_t \ , \ H_t - \{e\}$ غير مترابط $\Leftarrow$ وبالتالي سيحوي مركبتين :

$$H'_t = (V'_t, E'_t) \ , \ H''_t = (V''_t, E''_t)$$

ومنه $V_t = V'_t \cup V''_t \quad (**)$

$E_t = E'_t \cup E''_t \cup \{e\}$

SABBAGH STATIONERY

بما أن $|V_n| = k+1$ ومن ★★ نجد:

$$|V'_t| < k+1$$

ومنه من ★ :

1) $|E'_t| \geq |V'_t| - 1$

وأيضاً $|V''_t| < k+1$

وإن

2) $|E''_t| \geq |V''_t| - 1$

وبالتالي:

$$E_t = E'_t + E''_t + \{e\}$$

$$\Rightarrow |E_t| = |E'_t| + |E''_t| + 1$$

من 1) و 2)

$$|E_t| \geq |V'_t| - 1 + |V''_t| - 1 + 1$$

$$\Rightarrow |E_t| \geq |V_t| - 1 \Rightarrow |E_t| \geq k+1-1$$

$$\Rightarrow |E_t| \geq k$$

مبرهنة 5 : اثبت أن:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - (k-1)\left(2\sum n_i - k\right)$$

الاثبات : نأخذ المجموعة التالية:

$$(n_1-1), (n_2-1), \dots, (n_k-1) \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

حيث $(n_i - 1) \geq 0 : i=1,2,\dots,k$

نجمع الأعداد السابقة:

$$(n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1) = \sum_{i=1}^{k} (n_i-1)$$

بتجميع الحدود المتشابهة:

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i-1) = (n_1+n_2+\dots+n_k) - \underbrace{(1+\dots+1)}_{k \text{ مرة}}$$

$$\Rightarrow \sum (n_i-1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

تربيع الطرفين:

$$\left[\sum_{i=1}^{k} (n_i-1)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{k} n_i - k\right]^2$$

نفك تربيع الطرف اليساري:

$$\left[\sum (n_i-1)\right]^2 = \left(\sum n_i\right)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2 \quad ★$$

وأيضاً:

$$\left[\sum (n_i-1)\right]^2 = \left[(n_1-1)+\dots+(n_k-1)\right]^2$$

$$= \sum (n_i-1)^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} (n_i-1)(n_j-1) \quad ★★$$

ومنه من ★ و ★★

SABBAGH STATIONERY

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(n_i-1)(n_j-1)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}(n_i)\right)^2-2k\sum_{i=1}^{k}n_i+k^2$$

نحذف $2\sum\sum(n_i-1)(n_j-1)$

ومنه:

$$\sum(n_i-1)^2\le\left(\sum n_i\right)^2-2k\sum_{i=1}^{k}n_i+k^2$$

نفك التربيع:

$$\sum_{i=1}^{k}n_i^2-2\sum n_i+k\le\left(\sum n_i\right)^2-2k\sum n_i+k^2$$

$$\sum n_i^2\le\left(\sum n_i\right)^2+2\sum n_i-k-2k\sum n_i+k^2$$

ومنه:

$$\sum n_i^2\le\left(\sum n_i\right)^2-2(k-1)\sum n_i+k(k-1)$$

ومنه

$$\sum n_i^2\le\left(\sum n_i\right)^2-(k-1)\left(2\sum n_i-k\right)$$

مبرهنة 6 : لدينا البيان البسيط $G=(V,E)$ فيه $|V|=n$

إذا كان البيان G مكون من k مركبة عندئذ يكون عدد الأضلاع فيه:

$$|E|\le\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

الإثبات: نستخدم طريقة الاستقراء:

1 نثبت صحتها من أجل $k=1$

$$k=1\Rightarrow|E|\le\frac{(n-1)n}{2}$$

وهي علاقة صحيحة

2 - نفرض العلاقة صحيحة من أجل $k=m$

$$|E|\le\frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)$$

3- نثبت صحتها من أجل $k=m+1$

أي نثبت: $|E|\le\frac{1}{2}(n-m-1)(n-m)$

إن كل مركبة من مركبات البيان تحقق العلاقة لأنها بحد ذاتها بيان

أي :

$$|E_1| \le \frac{1}{2}(n_1)(n_1-1)$$

$$|E_2| \le \frac{1}{2}(n_2)(n_2-1)$$

$$\vdots$$

$$|E_{m+1}| \le \frac{1}{2}(n_{m+1})(n_{m+1}-1)$$

اجتماع اضلاع المركبات هو اضلاع البيان الكلي :

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m+1} = \bigcup_{i=1}^{m+1} E_i = E$$

بما أن المركبات مستقلة فإن :

$$|E_1| + |E_2| + \dots + |E_{m+1}| = |E|$$

وبما أن :

$$V_1 \cup V_2 \dots \cup V_{m+1} = V$$

$$\Rightarrow |V_1| + |V_2| + \dots + |V_{m+1}| = |V| = n$$

$$\Rightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_{m+1} = n$$

وبالتالي :

$$\sum_{i=1}^{m+1} n_i = n$$

ولدينا :

$$\sum_{i=1}^{m+1} |E_i| = |E| < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1} n_i(n_i-1)$$

نوزع الضرب :

$$\sum_{i=1}^{m+1} |E_i| = |E| < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1} n_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1} n_i$$

ومنه حسب المبرهنة السابقة

في المنهج يجب اثباتها كلا عند ذكرها.

$$|E| = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i| \le$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sum n_i\right)^2 - (\overset{m+1}{k}-1)\left(2\sum_{i=1}^{m+1} n_i \underbrace{-m_i-1}_{+k}\right) - \sum_{i=1}^{m+1} n_i\right]$$

ومنه

$$|E| = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i| \le \frac{1}{2}\left[n^2 - m(2n-m-1) - n\right]$$

$$\le \frac{1}{2}\left[n^2 - 2mn + m^2 + m - n\right]$$

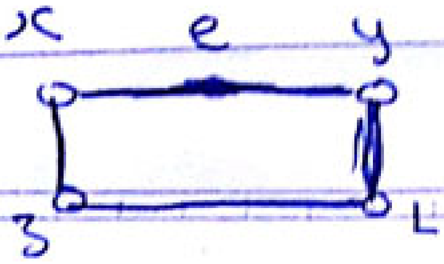
$$|E| = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i| \le \frac{1}{2}(m-n)^2 + m - n$$

نخرج $(m-n)$

$$|E| = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i| \le \frac{1}{2}(m-n)(m-n+1)$$

SABBAGH STATIONERY

$G-\{e\}$ ومنه مترابط



مبرهنة 7: ليكن لدينا $G=(V,E)$

وليكن $e\in E$ عندئذ:

e جسر $\Longleftrightarrow$ $G \supseteq C \not\ni e$

أي e جسر $\Longleftrightarrow$ (e لا ينتمي لدائرة محتواة في البيان)

$(\Longleftarrow)$

الإثبات: لنفرض أن $e=(x,y)$ جسر في البيان G إذاً $G-\{e\}$ غير مترابط

ولنثبت أن $e\notin C$

نفرض جدلاً أن الضلع e محتوى في الدائرة C والتي هي:

$x=x_1,e_1,x_2,e_2,\dots,x_{i-1},e_{i-1}$

$,\underbrace{x_i}_{=y},\underbrace{e_i}_{=e},x_{i+1}=x$

إذاً لدي:

$x=x_1,e_1,x_2,\dots,x_{i-1},e_{i-1},x_i=y$

$y=x_i,\underbrace{e_i}_{=e},x_{i+1}=x$

وهما ممران يربطان بين x , y

نلاحظ أن الممر الأول لا يحوي e بينما الممر الثاني يحوي e

إذاً وجد ممر لا يحوي e ويربط بين المقدين x , y وبالتالي $G-\{e\}$ مترابط وهذا يناقض كون $G-\{e\}$ غير مترابط أي يناقض الفرض

وبالتالي فإن الضلع e غير محتوى في أي دائرة من دوائر البيان G

أي $e\notin C\subseteq G$

$(\Longrightarrow)$: نفرض أن $e\notin C$ ولنثبت أن e جسر:

نفرض جدلاً أن e ليس جسراً في البيان G أي ($G-\{e\}$ مترابط)

ومنه: يوجد ممر من v_1 إلى v_2 حيث $e=(v_1,v_2)$: $v_1,v_2\in V$

$e\notin P=\langle v_1,e_1,\dots,v_2\rangle$

$P\cup e=C=\langle v_1,e_1,\dots,e,v_2\rangle$

إذاً $e\in C$ وهذا يناقض الفرض ومنه e جسر

SABBAGH STATIONERY

مبرهنة 8 : إذا كان البيان G بسيطاً

فإن البيان G أو البيان $\bar{G}$ (المتمم)

بياناً مترابطاً.

الإثبات: نفرض أن G غير مترابط

ولنثبت أن $\bar{G}$ مترابط.

((كل من عقد G وعقد $\bar{G}$ لها نفس

مجموعة العقد))

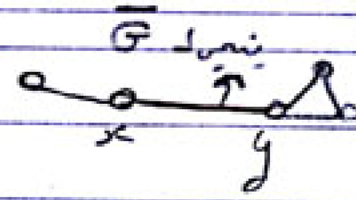
لتكن $C_1 , C_2 , \dots , C_m$ هي مركبات G

وليكن $x , y \in \underbrace{V}_{\text{عقدة موجودة بـ } G \text{ و } \bar{G}}$ حيث $x \neq y$

نميز حالتين:

1) $x \in V_r$, $y \in V_k$

حيث $k \neq r$



فإن $\underbrace{(x,y)}_{\text{ضلع}} \in \bar{E}$

وبالتالي: $x , (x,y) , y$ هو ممر

من العقدة x إلى العقدة y في

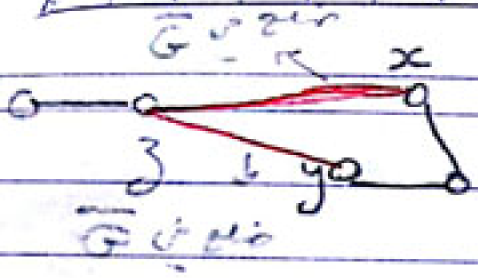
البيان $\bar{G}$

2) $x , y \in V_t$

نختار أي عقدة $z \in V_r$

حيث $t \neq r$ إذاً:

$\underbrace{(x,z)}_{\text{ضلع}} , \underbrace{(z,y)}_{\text{ضلع}} \in \bar{E}$



وبالتالي فإن الممر:

$\underbrace{x}_{\text{عقدة}} , \underbrace{(x,z)}_{\text{ضلع}} , \underbrace{z}_{\text{عقدة}} , \underbrace{(z,y)}_{\text{ضلع}} , \underbrace{y}_{\text{عقدة}}$

وهو ممر من العقدة x إلى العقدة y

في البيان $\bar{G}$ إذاً البيان $\bar{G}$

هو بيان مترابط

مبرهنة 9 : ليكن لدينا البيان

$G=(V;E)$ حيث $|V|=2n$

$\forall C \in G : |C| > 3$

أثبت أن عدد الأضلاع G

يحقق: $|E| \leq n^2$

الإثبات: نستخدم الاستقراء

الرياضي:

1- لنثبت صحتها من أجل $n=1$

$\Rightarrow |V|=2 \Rightarrow |E| \leq n^2 = 1$

أي إذا كان G مترابط فإن عدد الأضلاع

هو 1 وإذا كان غير مترابط فعدد

الأضلاع هو صفر

SABBAGH STATIONERY

من أجل $n=2$

$\Rightarrow |V|=4 \Rightarrow |E| \le (2)^2$

2_ نفرض صحة العلاقة من أجل

$n=k$:

$|V|=2k \rightarrow |E| \le k^2$

3_ لنثبت صحتها من أجل $n=k+1$

$\Rightarrow |V|=2k+2$

ومنه لنثبت أن:

$|E| \le (k+1)^2$

إن البيان الموافق من أجل

$n=k+1$ نسميه H

والبيان الموافق من أجل

$n=k$ نسميه H_1

نفترض أن البيانين H_1 ، H ترابطين

لنفرض أنه:

$\exists u,v \in H : u \neq v$

بحذف المقدتين u , v نحصل

على البيان:

$H' = H - \{\{u\} \cup \{v\}\}$

ومنه $H' = (V' ; E')$

حيث $V' = V - \{u,v\}$

$\rightarrow |V'_H| = 2k \Rightarrow |E'| \le k^2$

لأن: $|V| = 2k+2 \Rightarrow |V'_H| = 2k+2-2$
$= 2k$

نضيف المقدتين v , u للبيان H'

نحصل على H الذي عدد عقده $2k+2$

في البيان H

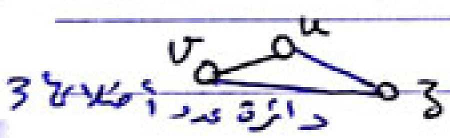
- بما أن $u \neq v$ نستطيع أن نفرض أن u , v

متجاورتين وأي عقدة ترتبط بـ v لا ترتبط

بـ u لأن $|C|>3$ لأنه في حالة كانت

أي عقدة ترتبط بـ v وترتبط بـ u ستكون

الـ $|C| \le 3$ مثال



ومنه لنفرض $deg(v) = l \le 2k+1$

$deg(u) = 2k+1 - l$

ومنه:

$|E| \le k^2 + l + 2k+1 - l$

$\le k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

ومنه: $|E| \le (k+1)^2$

SABBAGH STATIONERY

مبرهنة 10: ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V,E)$ بحيث:

$x,y \in V \;,\; x \neq y \;,\; |V|=n$

عندئذ يكون:

1- إذا كان:

$x = x_1, e_1, x_2, \dots, e_n, x_n = y$

ممرًا من x إلى y فإنه يوجد طريق من x إلى y

الإثبات: نفرض أن:

$w = \langle x = x_1, \dots, x_n = y \rangle$ ليس طريقًا

ومنه يوجد تكرار للأضلاع

أي $e_i \equiv e_j$

حيث $i,j \in \mathbb{Z} : 1 \leq i,j \leq n$

وهذا ينافي كون w ممر

إذا الفرض الجدلي خاطئ ومنه w طريق

2- إذا كان:

$x = x_1, e_1, \dots, x_n = x$

ممرًا من x إلى x فإن:

$\langle x_1, e_1, \dots, x_n \rangle$

دائرة.

الإثبات: نفرض أن

$C = \langle x = x_1, e_1, \dots, x_n = x \rangle$

ليس دائرة إذا يوجد

$i,j \in \mathbb{Z} : 1 \leq i,j \leq n$

حيث $e_i \equiv e_j$

كون الضلعين متطابقين يوجد عقدتين بحيث تكون هاتين العقدتين متكررتين بالمتتالية. وهذا ينافي كون C ممر

ومنه C دائرة.

مبرهنة 11: ليكن لدينا $G=(V,E)$ وليكن $x,y \in V$ بحيث $x \neq y$ عندئذ

1- إذا كان $L = \langle x = x_1, \dots, x_n = y \rangle$ مسار من x إلى y فإنه يوجد ممر من x إلى y

2- إذا كان $L' = \langle x_1, \dots, x_n = x \rangle$ مسار من x إلى x فإنه يوجد دائرة من x إلى x

الإثبات:

1- لدينا مسار من x إلى y

$L = \langle x, x_1, \dots, y \rangle$

نشكل المجموعة:

$A = \{ r : r \in \mathbb{Z} :$ يوجد مسار L طوله r $\}$

أ) $A \neq \emptyset$

ب) A مجموعة مرتبة لا نهائية من الأعداد الصحيحة $r \in \mathbb{Z}$: وبالتالي

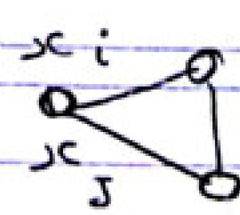
يوجد عنصر أصغري وليكن s

$\exists s \in A \; ; \forall \alpha \in A : s \leq \alpha$

ومنه L_s طول أصغر مسار بين العقدة x و y لنثبت أن L_s هو ممر لنفرض جدلاً أن المسار ليس ممر (أي يوجد تكرار للعقد)

أي:

$\exists i, j : 1 \leq i, j \leq n \; ; x_i = x_j$



هذا المسار له الشكل $|C| \geq 2$

بحذف الدائرة C من L_s أي: $L_s \setminus C$ فنحصل على L'_s

بحيث: $|L'_s| < |L_s|$

وهنا تناقض لأننا فرضنا أن L_s هو أصغر مسار بين x و y

ومنه الفرض الجدلي خاطئ ومنه يوجد ممر من x إلى y

مبرهنة 12: ليكن لدينا $G = (V, E)$ بيان بسيط ومترابط وليكن

$x, y \in V \; ; x \neq y$

إذا وجد ممران مختلفان من x إلى y فإن البيان G يحوي دائرة C

الإثبات:

ليكن لدينا الممران:

$L_1 = \langle x = x_1, e_1, \dots, x_n = y \rangle$

$L_2 = \langle x = y_1, e'_1, \dots, y_n = y \rangle$

حيث $L_1 \neq L_2$

نميز حالتين:

1) لا يوجد عقدة من L_2 تطابق عقدة من L_1

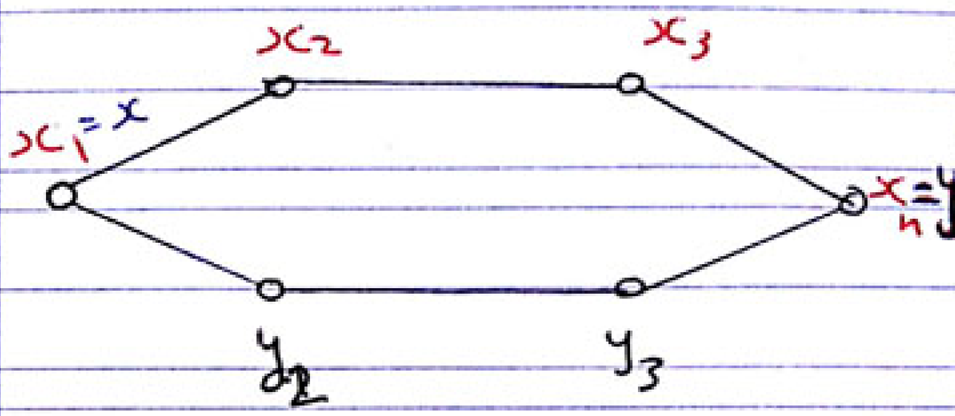
وأيضاً لا يوجد عقدة من L_1 تطابق عقدة من L_2

(ماعدا عقدتي البداية والنهاية)

أي البداية والنهاية يتطابقون

عندئذ : $L = L_1 \cup L_2$

تمثل دائرة بسيطة كما في الشكل

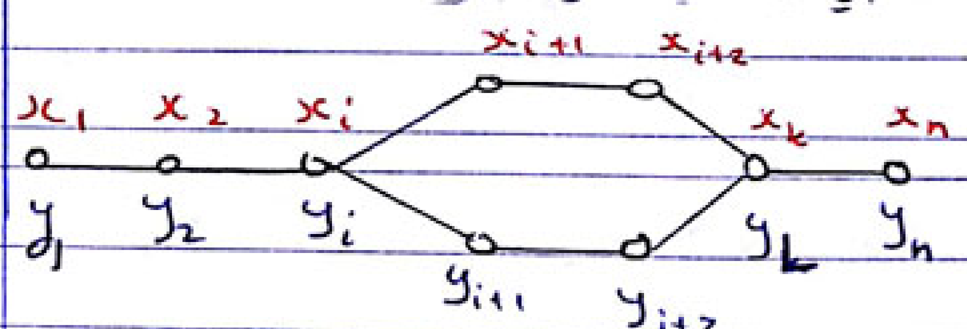


2) توجد عقدة من L_2 تطابق العقدة التي في L_1

وأيضاً توجد عقدة في L_1 تطابق العقدة التي في L_2

(وذلك عدا عقدتي البداية والنهاية)

أي العقدتين لا تتطابقوا



نشكل مجموعة A :

$A = \{ r \in \mathbb{Z} : x_i \equiv y_j \}$

$i \le r \le j$

نختار عقدتين $(x_i, y_i) , (x_j, y_j)$

1) $A \neq \emptyset$

2) A هي مجموعة مرتبة جيداً

عنصر أصغري s :

$\exists s \in A : \forall \alpha \in A : s \le \alpha$

$s = i : \Rightarrow x_i \equiv y_i$

ولدينا t بحيث :

$\beta \in A ; \quad \exists t \in A , s < t \le \beta$

$\beta \neq s$

$k \neq L ; \quad \Rightarrow x_k \equiv y_L$

$k \le t \le L$

نشكل ممر من x_i إلى x_k

$L_1 = < x_i , e_{i+1} , \dots , x_k >$

وممر من y_i إلى y_L

$L_2 = < y_i , e'_{i+1} , \dots , y_L >$

لدينا أن $x_i \equiv y_i$ ، $x_k \equiv y_L$

إذاً $L = L_1 \cup L_2$

تمثل دائرة بسيطة

مبرهنة 13: ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بيان مترابط يحوي دارة

$C=<x,e_1,\dots,x_n=x> \subseteq G$

لدينا البيان H بحيث:

$$H=(V;E-\{e_1,\dots,e_{n-1}\})$$

لدينا البيان G' بحيث:

★ $$G'=(V';E-\{e_1,\dots,e_{n-1}\})$$

عندئذ يكون مايلي محقق:

$$V'\cap\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\neq\emptyset$$

$V'=\{v\in V:$ عقدة غير معزولة $\}$

الاثبات: ليكن لدينا العقدتين:

$x\in\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

$y\in V$

وبما أن البيان G مترابط

فإنه يوجد ممر من x إلى y

أي:

$\exists P, x\to y$

$P=<x=y_1,e_1,y_2,\dots,y_m=y>$

ليكن لدينا r بحيث

$$1\le r\le m$$

حيث r هو أكبر عدد صحيح بحيث تكون

$$y_r\in\{x_1,\dots,x_n\}$$

نميز حالات:

1- $r=m$:

$\Rightarrow y_r=y_m \Rightarrow y_r\in\{x_1,\dots,x_n\}$

أي y_r تنتمي لمجموعة عقد الدائرة

وهي عقدة غير معزولة $\Leftarrow$ $y_r\in V'$

ومنه

$$V'\cap\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\neq\emptyset$$

(حيث يوجد y_r مشتركة بينهم)

2- $1\le r<m$

نستنتج من تعريف $\boxed{r}$ بأن:

$y_r\in\{x_1,\dots,x_n\}$

لكن

$y_{r+1}\notin\{x_1,\dots,x_n\}$

وبالتالي فإن $e_r\notin\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$

(لأن e_r هو الضلع الواصل بين y_r و y_{r+1})

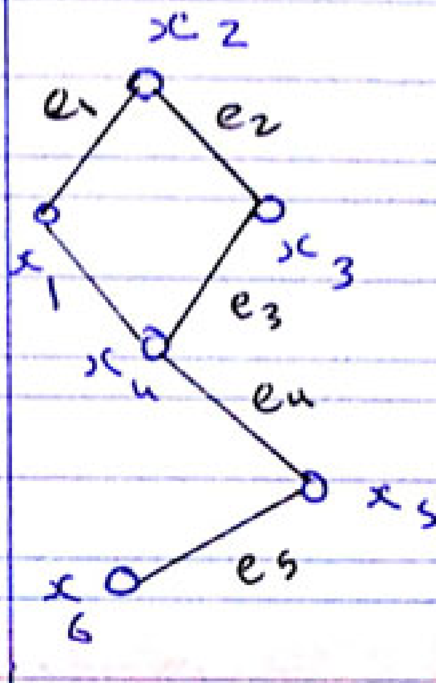
ومنه: $e_r\in E-\{e_1,\dots,e_{n-1}\} \Rightarrow e_r\in G'$

حسب ★ $\Leftarrow$ y_r عقدة غير معزولة

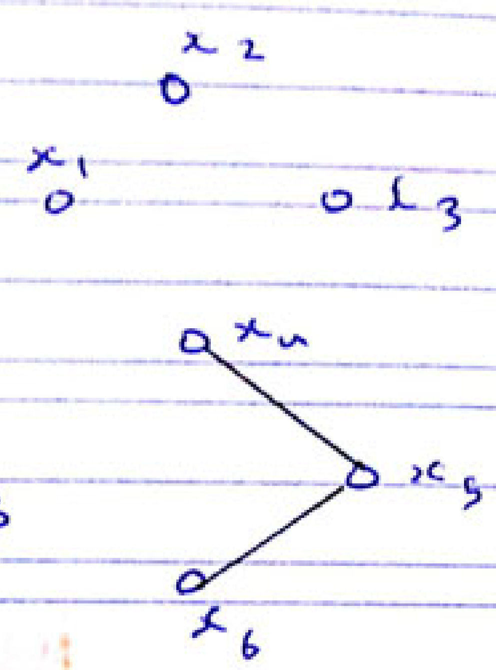
أي $y_r\in V'$ ومنه $V'\cap\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\neq\emptyset$

SABBAGH STATIONERY

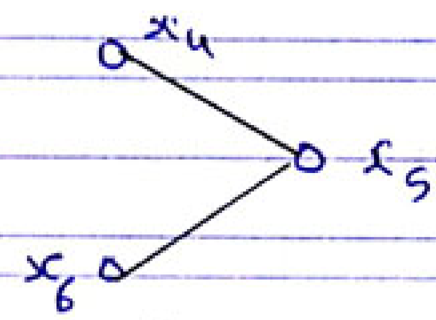
الرسم للمبرهنة 13 :



$G(V;E)$



$H(V, E`)$



$G`(V`;E`)$

مبرهنة 14 : ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ مترابطاً وجميع عقده زوجية عندئذ البيان G لا يحوي على جسور

((عقده زوجية : $\forall v \in V$ فإن $\deg(v) = 2k$ حيث $k \geq 1$ لكونه مترابط))

- هدفنا انشاء دائرة من x إلى x حيث تحوي أضلاع G ومنه يكون حسب المبرهنة (7) ← ثم لا تحوي على جسور

الاثبات : $\forall x_1, x_2 \in V$

عندئذ : $\exists e_1 = (x_1, x_2) \in E$

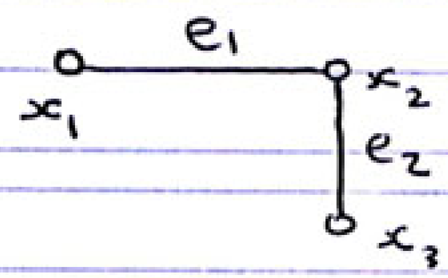
وبالتالي يوجد طريق :

$\langle x_1, e_1, x_2 \rangle$

وبما أن $2 \leq \deg(x_2)$ وبالتالي

يوجد العقدة $x_3 \in V$ حيث :

$e_2 = (x_2, x_3) \in E - \{e_1\}$



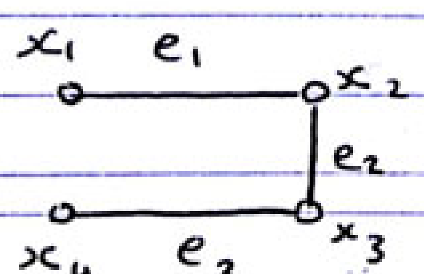
نحصل على الطريق :

$\langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3 \rangle$

وبما أن $2 \leq \deg(x_3)$ وبالتالي

يوجد العقدة $x_4 \in V$ حيث :

$e_3 = (x_3, x_4) \in E - \{e_1, e_2\}$



نحصل على الطريق :

$\langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4 \rangle$

ونستمر هكذا بعدد منته من الخطوات

لنفرض أننا حصلنا على الطريق :

$\langle x_1, e_1, \dots, x_n \rangle$

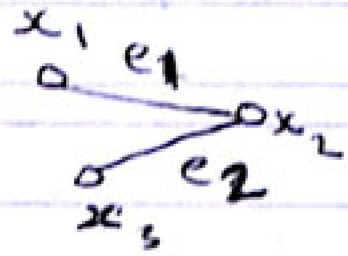
SABBAGH STATIONERY

إذاً فإن $deg(x_n) = 0$

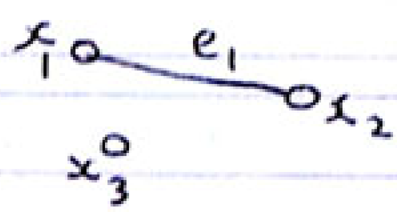
وذلك في البيان:

$H = (V ; E - \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$

لأن: مثلاً لدينا



وبالتالي $deg(x_3)$ عندما نحذف الضلع e_2 فتكون: $deg(x_3) = 0$



أي أن أي عقدة في المتتالية:

$e_1, x_2, \dots, e_{n-1}$

تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع الموجودة في هذه المتتالية

وبالتالي فإنه إذا كان $x_1 \neq x_n$ فإن العقدة x_n فردية

وهذا غير ممكن لأن جميع عقد البيان زوجية من الفرض،

وبالتالي: $x_1 = x_n$ وبالتالي فإن:

$x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$

هي دائرة تحوي جميع أضلاع البيان G وبالتالي لا يمكن لأي ضلع في G أن يكون جسراً منه

حسب المبرهنة 7

مبرهنة 15: ليكن لدينا $G=(V;E)$

إن البيان G نصف أويلر إذا وفقط إذا كان البيان G مترابطاً ويحوي عقدتين فرديتين فقط.

الإثبات:

($\Leftarrow$) نفرض البيان G أنه بيان نصف أويلر عندئذ يوجد طريق في G

$x = x_1, e_1, \dots, x_n = y$

ومنه نجد أن البيان G مترابط وأن كل من العقدتين x و y عقد فردية

بينما عقد البيان G الأخرى التي هي

$x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$

هي عقد زوجية

($\Rightarrow$) نفرض أن $G=(V;E)$ مترابطاً ويحتوي على عقدتين فرديتين x و y فقط

أي: $deg(x) = 2r+1$, $deg(y) = 2m+1$

حيث $r, m \in \mathbb{Z}^*$ وأنه:

$\forall z \in (V - \{x, y\}) : deg(z) = 2\ell : \ell \in \mathbb{Z}^*$

نضيف ضلع جديد $e = (x, y)$ (أي ضلع آخر بين الـ x وبين الـ y)

فنحصل على بيان جديد:

$H = (V; E \cup \{e\})$ وفي هذا البيان أصبح لدينا:

$deg(x) = 2r + 1 + 1 = 2(r+1)$ زوجي

$deg(y) = 2m + 1 + 1 = 2(m+1)$ زوجي

SABBAGH STATIONERY

وبالتالي جميع عقد البيان H زوجية

وحسب المبرهنة التي تنص :

((إذا كان البيان مترابط وجميع عقده زوجية فهو بيان أويلر))

وبالتالي H بيان أويلر وبالتالي

يحوي دائرة أويلر C في H

وعند حذف الضلع e من الدائرة

C نحصل على طريق أويلر في G

وبالتالي :

G بيان نصف أويلر

ملاحظة : كل بيان أويلر يمكن اعتباره نصف أويلر لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

مبرهنة 16 ((مبرهنة تدل على بيان هاملتون))

ليكن لدينا $G=(V,E)$ بحيث يكون :

$n=|V|>3$ ولتكن العقدتين

$\forall x,y \in V : x \neq y$

بحيث إذا كان :

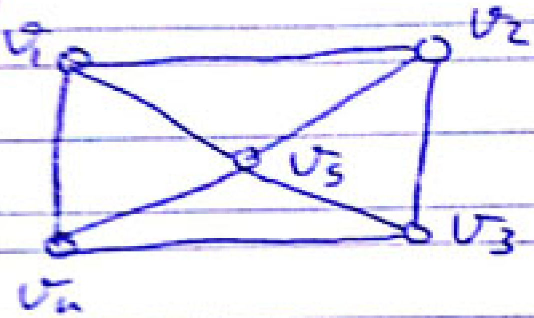
$deg(x)+deg(y) \geq n$

فإن G بيان هاملتون

((الشرط لازم وغير كافي))

أي يمكن أن يكون هاملتون ولا يحقق الشرط.

مثال:



عدد العقد :

$|V|=5$

وإن $v_i \neq v_j$

وإن $deg(v_i)+deg(v_j) \geq 5$

ومنه هو بيان هاملتون

مبرهنة 17 : ليكن لدينا البيان $G=(V,E)$ بيان مترابط

حيث $|V|=n$ وإن

$\forall x \in V : deg(x) \geq \frac{n}{2}$

عندئذ : G هو بيان هاملتون

الإثبات :

$\forall x,y \in G$

$deg(x) \geq \frac{n}{2} \quad , \quad deg(y) \geq \frac{n}{2}$

ومنه حسب المبرهنة 16 :

حيث $|V|=n>3$

و $x \neq y$ فإن

$deg(x)+deg(y) \geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n$

ومنه هو بيان هاملتون

GABBASH STATIONERY

مبرهنة 18 : ليكن لدينا البيان
البسيط $G(V,E)$ عدد عقده
حيث : $|V|=n\geq 3$

$(x,y)\in E \;, \forall x,y\in V \;; x\neq y$

$\deg(x)+\deg(y)\geq n-1$

عندئذ G نصف هاملتون

الاثبات: نفرض أن :

$\forall x,y\in V : x\neq y$

$\Rightarrow \deg(x)+\deg(y)\geq n-1$

نضيف العقدة x_0 إلى البيان G

بحيث الـ x_0 تجاور جميع عقد البيان

وبالتالي يصبح لدينا البيان: $G'(V',E')$

حيث:

$E'=E\cup\{e'_1,\dots,e'_n\}$

$V'=V\cup\{x_0\}$

حيث $e'_i=(x_0,x_i)$ وبالتالي: $i=1,\dots,n$

$\forall x\in V'-\{x_0\}$

فإن: $\deg_{G'}(x)=\deg_{G}(x)+1$

حسب الفرض : $\forall x,y\in V \,,\, x\neq y$

$\deg(x)+\deg(y)\geq n-1$

نضيف 2 للطرفين :

$\deg_{G}(x)+1+\deg_{G}(y)+1\geq n+1$

يمكن تصغير الحد الادنى (الحد اليساري)

$\deg_{G'}(x)+\deg_{G'}(y)\geq n+1$

ومنه :

$\forall x,y\in V' : x\neq y$:

$\deg(x)+\deg(y)\geq n$

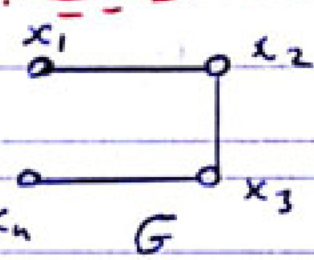
وبالتالي G' هو بيان هاملتون أي أنه

يوجد دائرة هاملتون وبحذف العقدة x_0
تصبح الدائرة هي ممر هاملتون

وبالتالي G بيان نصف هاملتون

مثال توضيحي :

$\forall x_i,x_j\in V$

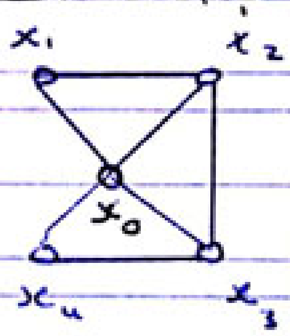


$\deg(x_i)+\deg(x_j)$
$=2+2=4$

$n-1=3$

بإضافة العقدة x_0 التي تجاور جميع العقد في G :

$\forall x_i,x_j\in V'$



$\deg(x_i)+\deg(x_j)$
$=3+3=6\geq n=5$

أو $3+4=7\geq n=5$

أو $2+3=5\geq 5$

أو $2+4=6\geq 5$

ومنه G' هاملتون ودائرته هي $<x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_0>$
وبحذف الـ x_0 والأضلاع التي تؤثر بها x_0
نحصل على G وبالتالي تصبح الدائرة هي ممر $<x_1,x_2,x_3,x_4>$

مبرهنة 19 : ليكن لدينا البيان المنتظم $G(V;E)$ من الدرجة r وليكن $|V|=n$ عندئذ :

$$|E| = \frac{n\cdot r}{2}$$

الاثبات : نعلم أن

$$\sum_{x\in V} \deg(x) = 2|E|$$

وبما أن $\forall x\in V: \deg(x)=r$

$$\sum r = 2|E| \Rightarrow n\cdot r = 2|E|$$

$$\Rightarrow E = \frac{n\cdot r}{2}$$

مبرهنة 20 : ليكن $G=(V;E)$ بيان بسيطا وتام حيث $|V|=n$ ؛ $|E|\neq\emptyset$

فإن : $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$

الاثبات : إن البيان G بيان منتظم من الدرجة $n-1$ ونعلم أن

$$\sum \deg(x) = 2|E|$$

$$\Rightarrow \sum(n-1) = 2|E|$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 2|E|$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

مبرهنة 21 : ليكن لدينا البيان الزوجي البسيط الترابط : $G=(V_1,V_2;E)$ حيث $|V_1|=n$ ، $|V_2|=m$

عندئذ : $|E|=m\cdot n$

الاثبات : $\forall x\in V_1: \deg(x)=m$

$\forall y\in V_2: \deg(y)=n$

ومنه :

$$\sum \deg(x) + \sum \deg(y) = 2|E|$$

$$\sum m + \sum n = 2|E|$$

$$\Rightarrow n\cdot m + m\cdot n = 2|E|$$

$$\Rightarrow 2(m\cdot n) = 2|E|$$

$$\Rightarrow |E| = m\cdot n$$

مبرهنة 22 : ليكن لدينا البيان الزوجي البسيط الترابط $G=(V_1,V_2;E)$ حيث $|V_1|=n$ ، $|V_2|=m$

عندئذ في حال كان G غير تام فإن :

$$|E| \le m\cdot n$$

الاثبات : $\forall x\in V_1: \deg(x)\le m$

$\forall y\in V_2: \deg(x)\le n$

$$\Rightarrow \sum \deg(x) + \sum \deg(y) \geq 2|E|$$

$$\Rightarrow n\cdot m + n\cdot m \geq 2|E| \Rightarrow |E| \le n\cdot m$$

مبرهنة 23 : ليكن لدينا الشجرة $T=(V;E)$

عندئذ $|E|=n-1$.

الإثبات: نثبت صحتها باستخدام الاستقراء الرياضي :

من أجل $n=1 \Rightarrow |E|=0$

$n=2 \Rightarrow |E|=1$

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n=k$

$\Rightarrow |E|=k-1$

ولنثبت صحتها من أجل : $n=k+1$

حيث $|V'|=k+1$

فتكون الشجرة $T'=(V',E')$

نريد إثبات $|E'|=k$

$\exists x\in V' : deg(x)=1$

$\Rightarrow \exists e=(x,y)\in E'$

نحذف x :

$T''=(V'-\{x\} ; E''=E'-\{e\})$

ومنه :

$|V'-\{x\}|=k \Rightarrow E''=|E'-\{e\}|=k-1$

$((k+1-1=k))$

نرد و نضيف الضلع الذي حذفناه

$T'=(V',E')$

$\Rightarrow |E'|=k$

مبرهنة 24 : ليكن لدينا الشجرة $T(V;E)$

عندئذ : يوجد على الأقل عقدتين $x,y\in V$ و $x\neq y$ بحيث قدر كل منهما تساوي الواحد : $deg(x)=deg(y)=1$

الإثبات : بفرض T شجرة ، نوجد كل الممرات في هذه الشجرة ونختار منها الممر الأعظمي وليكن :

$W=<x_1,e_1,x_2,\dots,x_n=y>$

ولنثبت أن $deg(y)=deg(x)=1$

نفرض جدلاً أن $deg(x)>1$

عندئذ يوجد $z\in V$ بحيث

$z\neq(x_n=y)$: $e=(x,z)\notin W$

عندئذ: وجدنا ممر آخر :

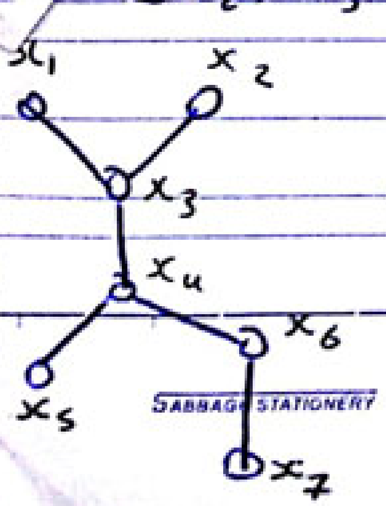
$W'=<z,e,x_1,e_1,\dots,x_n>$

بحيث $|W'|>|W|$ وهذا يناقض كون W أعظم ممر وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ وإن $deg(x)=1$

مثال توضيحي : الممران الأعظميان :

$<x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7>$

$<x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7>$



نلاحظ أن : $deg(x_1)=deg(x_2)=deg(x_7)=1$

مبرهنة 25: إذا كان البيان لايحوي دائرة فإن البيان شجرة وعدد الأضلاع هو $(n-1)$

الاثبات: إذا كان البيان شجرة حسب المبرهنة السابقة:

$|E| = n-1 \quad : \quad |V| = n$

إذا كان البيان لايحوي دائرة لنثبت أن البيان شجرة

إذا لم يكن البيان شجرة فيوجد

ضلع واحد على الأقل ليس جسراً

ليكن $G=(V,E)$ بيان لايحوي دائرة

$|V|=n \ , \ |E|=n-1$

لنفرض أن G ليس شجرة.

$\Rightarrow e \in E$

حيث يكون e ليس جسراً

$\Leftarrow$ $G-\{e\}$ مترابط وبالتالي

$G' = (V, E' = E-\{e\})$ ومنه:

$|V| = n \ , \ |E'| = (n-1)-1 = n-2$

وهذا يناقض أن البيان

لايحتوي على دائرة $\Leftarrow$ البيان شجرة

مبرهنة 26: يكون البيان شجرة $\Longleftrightarrow$

كل ضلع في البيان هو جسر

الاثبات: البيان شجرة $\Leftarrow$ كل ضلع هو جسر

وإذا كان كل ضلع هو جسر فلنثبت أن البيان شجرة.

لدينا البيان مترابط وكل ضلع هو جسر

فكل ضلع في البيان لاينتمي لدائرة هو شجرة

مبرهنة 27: إذا كان البيان $T=(V,E)$ شجرة

عندئذ: $\forall x,y \in V \ : \ x \neq y$

فإنه يوجد ممر وحيد بينهما.

الاثبات: ليكن لدينا الممر:

$L = \langle x, \dots, y \rangle$

وهو ليس وحيداً $\Leftarrow$ يوجد ممر ثان

$\Leftarrow$ البيان يحوي دائرة وهذا تناقض

كون T شجرة $\Leftarrow$ الممر وحيد.

مبرهنة 28: ليكن لدينا الشجرة $T=(V,E)$

إن اضافة أي ضلع يصل بين عقدتين

غير متجاورتين فإننا نحصل على دائرة وحيدة

الاثبات: ليكن: x, y عقدتان مختلفتان

وبالتالي يوجد ممر: $W = \langle x, \dots, y \rangle$

نضيف الضلع e' إلى الممر: $W \cup \{e'\} = C$

SABBAGH STATIONERY

لنثبت أن الدائرة C وحيدة

نفرض جدلاً وجود دائرة أخرى C' بحيث:

$$e' \in C \wedge e' \in C'$$

، $C \neq C'$

ومنه:

$w \subseteq C : w = \langle x, \dots, y \rangle$

$w' \subseteq C' : w' = \langle x, \dots, y \rangle$

وجدنا ممران بين x و y وهذا تناقض

29- ليكن لدينا البيان البسيط المترابط $G(V;E)$ حيث $|V|=n$ و $|E|=m$ عندئذ: إذا كانت $T=(V;E)$ شجرة مولدة للبيان G فإن البيان G يملك $m-n+1$ وتراً

الاثبات:

بما أن عدد أضلاع البيان G هو m وعدد أضلاع الشجرة T هو $n-1$

فإن الأضلاع التي لا تنتمي للشجرة هي الأوتار إذاً عدد الأوتار هو:

$$r = m - (n-1) = m-n+1$$

مبرهنة 30. ليكن لدينا $T=(V;E)$ شجرة و $|V|=n$ ، $|E|=n-1$ وكان T شجرة ثنائية منتظمة فإن (n عدد فردي)

الاثبات: نعلم أن بيان عدد العقد التي درجاتها فردية هو عدد زوجي ولدينا جميع العقد الداخلية والمعلقة هي عقد فردية والجذر درجته يساوي 2

$\Rightarrow$ (الجذر) + (العقد الفردية = عدد زوجي) =

n عدد فردي = عدد زوجي + 1

مبرهنة 31: ليكن لدينا $T=(V;E)$ شجرة ثنائية منتظمة ، $|V|=n$ فإن عدد العقد المعلقة في هذه الشجرة هو $\frac{n+1}{2}$

الاثبات: نفرض أن m عدد العقد المعلقة وعدد أضلاع T هو $|E|=n-1$ وعدد العقد الداخلية $n-m-1$

ومنه

$$\sum deg(s) + \sum deg(y) + \sum deg(x) = 2|E|$$

$$\Rightarrow m + 3(n-m+1) + 2 = 2(n-1)$$

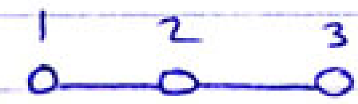
بالحل ،

$$m = \frac{n+1}{2}$$

SABBAGH STATIONERY

مبرهنة 32: كل شجرة تملك عقدة مركزية أو عقدتين على الأكثر.

الإثبات: حسب الاستقراء الرياضي:



$e(1) = 2$, $e(2) = 1$

$e(3) = 2$

ومنه

$r_G = 2$

$e(1) = 3$, $e(2) = 2$

$e(3) = 2$ $e(4) = 3$

ومنه $r_G = 2$

العلاقة صحيحة من أجل $n = 1, 2$

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n = k$ ولنثبت صحتها من أجل $n = k+1$

وذلك بحذف أوراق الشجر المعطاة بشكل متتالي فنحصل على العقد المركزية أو نواة البيان

مبرهنة 33: إذا كان $G=(V,E)$ بيان أويلر فإن كل طريق منشأة بواسطة خوارزمية فلوري هي دائرة أويلر في G

الإثبات: لتكن الطريق $W_n = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ طريق في G منشأة بواسطة خوارزمية فلوري، أن $deg(x_n) = 0$ في G_n

إذاً العقدة $x_n = x_0$ وبالتالي فإن W_n دائرة

- لنفرض أن الطريق W_n لا تحتوي على جميع أضلاع G

لتكن مجموعة العقد في G_n

$S = \{x \in V : deg(x) > 0\}$

و $\bar{S} = S - V$ وإن $S \neq \emptyset$

حسب مبرهنة سابقة نجد أن

$S \cap \{x_0, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$

إذاً فإن $x_n \in \bar{S}$ ، لكن $0 < m < n$

أكبر عدد صحيح يحقق: $x_{m+1} \in \bar{S} \wedge x_m \in S$

لتكن المجموعة:

$A = \{e \in E :$ e يربط بين عقدة من S وعقدة من $\bar{S}$ $\}$

من تعريف $\bar{S}$ ينتج $A \cap [E - \{e_1, \ldots e_m, e_n\}] \neq \emptyset$

وبالتالي: $A \cap (E - \{e_1, \ldots, e_m\}) \subseteq \{e_{m+1} \ldots e_n\}$

$A \cap (E - \{e_1, \dots, e_m\}) = \{e_{m+1}\}$

ومنه فإن e_{m+1} جسر في
البيان G_m

وبما أن العقدة $x_m \in S$ فإن
$deg(x_m) > 0$ في البيان G_n
إذا يوجد ضلع e يؤثر على العقدة
x_m حيث $e \neq e_{m+1}$ ، $e \neq e_m$

وبما أن الضلع e_{m+1} جسر في G_m
وحسب خوارزمية فلوري
فإن e جسر في البيان G_m

ليكن $G_m[S]$ هو البيان
المولد بوساطة المجموعة S في
البيان G_m وليكن $G_n[S]$
هو البيان المولد بوساطة المجموعة
S في البيان G_n

بما أن G_n بيان جزئي من G_m
وبالتالي فإن $G_n[S]$ هو بيان
جزئي من البيان $G_m[S]$

وبما أن الضلع e جسر في البيان
G_m
فإن الضلع e جسر في البيان $G_n[S]$

ومن جهة أخرى: بما أن الضلع
e_{m+1} جسر في G_m

وبما أن $0 < m < n$ هو أكبر عدد صحيح
حيث $x_m \in S$ فإن $G_m[S] = G_n[S]$

ولكن لكل عقدة $x \in S$ فإن
$deg(x)$ في $G_n[S] = deg(x)$ في G_n

إذاً جميع عقد البيان $G_n[S]$ زوجي
حسب مبرهنة سابقة نجد أن $G_n[S]$
لا يحتوي على جسور وهذا تناقض

وبالتالي W_n هو دارة في G

مبرهنة 34: ليكن لدينا $G=(V;E)$
حيث $|V|>1$ عندئذ يكون G بيان زوجي

$\Leftrightarrow$ البيان G لا يحتوي على دوائر
فردية

الإثبات: $(\Rightarrow)$ G بيان زوجي
ومنه

$G=(V_1, V_2; E)$; $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$\forall e \in E$; $e=(x,y)$: $x \in V_1$, $y \in V_2$

لتكن لدينا الدائرة التالية:

$C = \langle v_1, e_1, v_2, \dots, v_n \rangle \subseteq G$
ولنثبت أن هذه الدائرة زوجية

((عدد أضلاعها زوجي))

SABBAGH STATIONERY

لدينا C دارة $\Leftarrow v_1 = v_n$

C دارة بسيطة

نفرض: $x \in V_1$ فإن $x \notin V_2$

أي:

$v_1 \in V_1 , v_2 \in V_2 , v_3 \in V_1$

$v_4 \in V_2$

وبالتالي

فردي $\forall i = 1 \to n$

عندئذ يكون $v_i \in V_1$

زوجي $\forall j = 2 \to n-1$

يكون $v_j \in V_2$

ومنه:

زوجي $n-1 \Rightarrow n$ فردي

زوجي $\Rightarrow |C|$

دارة بسيطة $\forall C \subseteq G$ $(\Longrightarrow)$

زوجية عندئذ يكون G بيان

زوجي لنثبت ذلك

حتى يكون G بيان زوجي

يجب أن يتحقق

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ∧ $V_1 \cup V_2 = V$

نعرف V_1 و V_2 كما يلي

$V_1 = \{x \in V : d(x,y)$ فردي$\}$

$V_2 = \{l \in V : d(l,z)$ زوجي$\} = V - V_1$

$\forall x,y \in V_1 , x \neq y$

لنثبت أن العقدتين y و x غير

متجاورتين أي $(x,y) \notin E$

لنفرض جدلاً أن: $e = (x,y) \in E$

$\exists z \in V_2$

فإن $\left\{ \begin{array}{l} d(x,z) \\ d(z,y) \end{array} \right.$ فردي

وبالتالي سيكون لدينا المسارين:

$L_1 = \langle x_1, e_1, x_2, \ldots, z \rangle$

$L_2 = \langle z, \ldots, y \rangle$

$C = L_1 \cup L_2 \cup e$

$|C| =$ فردي + فردي + 1 = فردي

وهذا تناقض ومنه $e = (x,y) \notin E$

الحالة الثانية : في حالة C ليست

دائرة بسيطة ونحن على الأقل

سيكون لدينا عقدة مكررة

تختلف عن عقدة البداية والنهاية

ومنه

$\exists\, i = 1 \rightarrow n-1$

$\exists\, J = 1 \rightarrow m-1$

ومنه $\exists\, x_i = y_J$

لدينا ثلاث حالات :

$i = J$ أو $i < J$ أو $i > J$

من اجل $i > J$ فإن :

$L = L_1 \cup L_2 = \langle x_1, .. x_i, .. y_J \rangle$

$\Leftarrow$ لدينا ممر من x_1 إلى J

أصغر من الممر الذي تم اختياره

وهذا تناقض

ومن أجل $i < J$ أيضا نحصل

على التناقض

ومن أجل $i = J$ هي نفس

الحالة الماضية

انتهى

زينه البني