المحاضرة 2

1- مبرهنة: ليكن M هو A-مودول عندها:

1) $a.0_M = 0_M \quad : a \in A$

2) $0_A . m = 0_M$

3) $(-a).m = a.(-m) = -(a.m)$

الإثبات:

1] $a.0 = a.(0+0) = a.0 + a.0$

أي $\cancel{a.0} = \cancel{a.0} + a.0$

ومنه $0 = a.0$

2] $0.m = (0+0).m = 0m + 0m$

أي $\cancel{0.m} = \cancel{0m} + 0m$

$0 = 0.m$

3] $0.m = 0$

$(a+(-a)).m = a.m + (-a).m = 0$

أ) $\boxed{(-a).m = -(a.m)}$

وأيضاً:

$a.0 = 0$

$a(m+(-m)) = 0$

$a.m + a(-m) = 0$

ب) $\boxed{a(-m) = -(a.m)}$

من أ) و ب) ينتج

$(-a).m = a(-m) = -(a.m)$

المحاضرة 3

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ هي أسرة من المودولات الجزئية من M عندها

$\cap M_i = \{x \in M : x \in M_i , \forall i \in I\}$

أثبت أن: $\cap M_i$ تشكل مودول جزئي من M.

البرهان: لنثبت

1- نثبت أنها غير خالية: $\cap M_i \neq \emptyset$

$0_M \in M_i \quad \forall i \in I \Rightarrow 0_M \in \bigcap_{i\in I} M_i$

2- ليكن: $x, y \in \cap M_i$ عناصر كيفية و $\alpha, \beta \in A$

$x \in \bigcap_{i\in I} M_i \rightarrow x \in M_i \quad ; \forall i \in I$

$y \in \bigcap_{i\in I} M_i \rightarrow y \in M_i \quad ; \forall i \in I$

ولكن M_i هو مودول جزئي من M $(\forall i \in I)$

وبالتالي:

$\alpha x + \beta y \in M_i \quad : \forall i \in I$

وهذا ما يبين أن $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i\in I} M_i$

ملاحظة: إن $\cap M_i$ مودول جزئي من M_i

أي $\forall i \in I : \bigcap_{i\in I} M_i \subseteq M_i$

3- مبرهنة : ليكن M مودول على حلقة A ولتكن $M_1, \dots, M_r$ مودولات جزئية من M .

لنعرف العلاقة :

$$\sum_{i=1}^{r} M_i = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i \ ; \ x_i \in M_i \right\}$$

أثبت أن $\sum_{i=1}^{r} M_i$ مودول جزئي من M .

الاثبات :

1- $\sum_{i=1}^{r} M_i \neq \emptyset$ لأن :

$0_M \in M_i \quad \forall i \in I$

$0_M = 0_{M_1} + 0_{M_2} + \dots + 0_{M_r} \in \sum_{i=1}^{r} M_i$

2- ليكن $x, y \in \sum_{i=1}^{r} M_i$ ، $\alpha, \beta \in A$

$x = \sum_{i=1}^{r} x_i \ ; \ x_i \in M_i$

$y = \sum_{i=1}^{r} y_i \ ; \ y_i \in M_i$

$\alpha x + \beta y = \alpha\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{r} (\underbrace{\alpha x_i + \beta y_i}_{\in M_i}) \in \sum_{i=1}^{r} M_i$

4- مبرهنة : لتكن M مودول على حلقة A ولتكن : M_1 و M_2 و M_3 مودولات جزئية من M حيث $M_3 \subseteq M_1$

أثبت أن :

$$M_1 \cap (M_2 + M_3) = (M_1 \cap M_2) + M_3$$

الاثبات : أ) $\boxed{x \in M_1 \cap (M_2 + M_3)}$

الاتجاه الاول:

$\Rightarrow \begin{cases} x \in M_1 \\ x \in M_2 + M_3 \end{cases}$ و $: x = m_2 + m_3$

حيث $m_2 \in M_2$ و $m_3 \in M_3$

بما أن $x = m_2 + m_3$

ومنه $m_2 = \underbrace{x}_{\in M_1} - \underbrace{m_3}_{\in M_3 \subseteq M_1} \in M_1$

ومنه $m_2 \in M_1$ ، $m_2 \in M_2$

وبالتالي

$x = \underbrace{m_2}_{\in M_1 \cap M_2} + \underbrace{m_3}_{\in M_3} \in (M_1 \cap M_2) + M_3$

أي

ب) $\boxed{x \in (M_1 \cap M_2) + M_3}$

من أ) و ب) نجد : (1)

$M_1 \cap (M_2 + M_3) \subseteq (M_1 \cap M_2) + M_3$

المحاضرة 4

الاتجاه الثاني : أ

$\boxed{x \in (M_1 \cap M_2) + M_3}$

ومنه $x = n + m_3$

حيث $n \in (M_1 \cap M_2)$ و $m_3 \in M_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \underbrace{n}_{\in M_1} + \underbrace{m_3}_{M_3 \subset M_1} \in M_1 \\ x = \underbrace{n}_{M_2} + \underbrace{m_3}_{M_3} \in M_2 + M_3 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \boxed{x \in M_1 \cap (M_2 + M_3)}$

من أ) و ب) نستنتج :

(2)

$$\boxed{(M_1 \cap M_2) + M_3 \subseteq M_1 \cap (M_2 + M_3)}$$

من 1) و 2) نجد

$$M_1 \cap (M_2 + M_3) = (M_1 \cap M_2) + M_3$$

5- مبرهنة : ليكن $f : M \to N$ تشاكل مودولي

و M و N مودولين على A

وليكن :

X مودول جزئي من M.

Y مودول جزئي من N.

عندها : $\vec{f}(X)$ مودول جزئي من N

و $\overleftarrow{f}(Y)$ مودول جزئي معا M.

الاثبات 1) $\emptyset \neq \vec{f}(X)$ لأن

$0 = f(0) \in \vec{f}(X)$

لكون f تشاكل مودولي فهو تشاكل زمرة والتشاكل الزمري يحقق أن

$f(0) = 0$

2) $\forall x, y \in \vec{f}(X)$ ، $\forall \alpha, \beta \in A$

عندها : حسب تعريف

$\vec{f}(X) = \{ f(x) : x \in X \}$

$\exists z_1 \in X : x = f(z_1)$

$\exists z_2 \in X : y = f(z_2)$

$\alpha x + \beta y = \alpha f(z_1) + \beta f(z_2)$

لأن f تشاكل:

$= f(\underbrace{\alpha z_1 + \beta z_2}_{\in X})$

حسب الترتيب

ومنه $\alpha x + \beta y \in \vec{f}(X)$

مودول جزئي من المستقر

3) $\emptyset \neq \overleftarrow{f}(Y)$ لأن $0 \in \overleftarrow{f}(Y)$

4) ليكن $x, y \in \overleftarrow{f}(Y)$ ، $\alpha, \beta \in A$

ومنه $f(x) \in Y$ و $f(y) \in Y$

حسب تعريفه $\overleftarrow{f}(Y) = \{ m \in M : f(m) \in Y \}$

2] أ) $y \in \vec{f}(\overleftarrow{f}(N_1))$

حسب التعريف $\vec{f}(X) = \{f(x) : x \in X\}$

$\exists x \in \overleftarrow{f}(N_1) \quad ; \quad y = f(x)$

لدينا $y = f(x) \in \mathrm{Im} f$

$x \in \overleftarrow{f}(N_1) \Rightarrow f(x) \in N_1$

ب) $y \in N_1 \cap \mathrm{Im} f$

من أ) و ب)

$\vec{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) \subseteq N_1 \cap \mathrm{Im} f$

الاتجاه الثاني

$x \in N_1 \cap \mathrm{Im} f$

$x \in N_1 \quad , \quad \exists y \in M$

ومنه $x = f(y)$

فإن:

$x = f(y)$ و $x \in N_1$

ومنه

$x = f(y) \in N_1$

ومنه

$y \in \overleftarrow{f}(N_1)$

$\Rightarrow f(y) \in \vec{f}(\overleftarrow{f}(N_1))$

$\Rightarrow x \in \vec{f}(\overleftarrow{f}(N_1))$

ومنه

$N_1 \cap \mathrm{Im} f \subseteq \vec{f}(\overleftarrow{f}(N_1))$

ومنه

$\vec{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) = N_1 \cap \mathrm{Im} f$

7_ مبرهنة: ليكن M مودول على A و N مودول جزئي من M عندها: يوجد تطبيق f:

$f : \left\{ \begin{array}{c} \text{المودولات} \\ \text{الجزئية } P \text{ من } M \\ \text{التي تحوي } N \\ N \subseteq P \subseteq M \end{array} \right\} \overset{\text{تقابل}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{المودولات} \\ \text{الجزئية } M/N \end{array} \right\}$

$f : P \xrightarrow{\text{تقابل}} P/N$

الإثبات:

1) يجب إثبات أن P/N مودول جزئي من M/N

2) اثبات أن f تطبيق متباين غامر

1) من أجل $N \subset P \subset M$ بحيث P مودول جزئي من M فإن P/N مودول جزئي من M/N

إن $\emptyset \neq P/N$ لأن $0 + N \in P/N$

لكن:

لتكن $\alpha , \beta \in A$

و $(P_1+N) , (P_2+N)$ عناصر

كيفية من P/N

ومنه $\alpha(P_1+N)+\beta(P_2+N)$

$=(\alpha P_1+N)+(\beta P_2+N)$

$=\underbrace{(\alpha P_1+\beta P_2)}_{\in P}+N.$

ومنه $(\alpha P_1+\beta P_1)+N\in P/N$

(2) ب- تطبيق لتكن P_1 , P_2

عناصر من المنطلق بحيث $P_1=P_2$

ومنه $P_1+N=P_2+N$.

ب- متباين لأن إذا كان

$P_1/N=P_2/N$

حيث P_1 , P_2 مودولات جزئية من

M تحوي N

لنبرهن أن $P_1=P_2$

$r_1\in P_1 \Rightarrow r_1+N\in P_1/N$

$=P_2/N$

$r_1+N\in P_2/N$

ومنه

$\exists r_2\in P_2 : r_1+N=r_2+N$

ومنه $r_1\in r_2+N$

$\Rightarrow r_1=r_2+n \quad : n\in N$

$\Rightarrow r_1-r_2\in N\subset P_2$

$\Rightarrow r_1-r_2\in P_2 \Rightarrow r_1-r_2=\alpha$

$:\alpha\in P_2$

$\Rightarrow r_1=\underbrace{r_2}_{\in P_2}+\underbrace{\alpha}_{\in P_2}\in P_2$

ومنه $P_1\subseteq P_2$ وبنفس الأسلوب

نجد $P_2\subseteq P_1$ ومنه نجد $P_2=P_1$

ب- غامر لتكن Q مودول جزئي

من M/N ولنعرف المجموعة

$U=\{x\in M : x+N\in Q\}$

يجب إثبات:

أ) $U\in$ المنطلق

ب) $f(U)=Q$

(أ) U مودول جزئي في M يحوي N

$N\in Q$ لأن $U\neq\emptyset$

لتكن $x , y\in U$, $\alpha , \beta\in A$

عناصر كيفية

لنبرهن أن $(\alpha x+\beta y)+N\in Q$

$(\alpha x+\beta y)+N=\alpha(\underbrace{x+N}_{\in Q})$

$+\beta(\underbrace{y+N}_{\in Q})$

$\alpha(x+N)+\beta(y+N)\in Q$

$\alpha x+\beta y\in U$

ومنه U عنصر في المنطلق

ب) لنحسب $f(U)$

$f(U)=\{u+N\ ;\ u\in U\}$

$=\{u+N\in Q\}=Q$

ومنه $f(U)=Q$

المحاضرة 6

8- مبرهنة: ليكن M و N مودولات على حلقة A ولنأخذ:

$f: M\to N$

تشاكل مودولي

لنفرض P مودول جزئي من M حيث $P\subseteq \ker f$ عندها:

يوجد تشاكل وحيد:

$\tilde{f}: M/P\to N$

يحقق الشروط التالية:

1) $\tilde{f}\circ\pi=f$

2) $\ker\tilde{f}=\dfrac{\ker f}{P}$

3) $\operatorname{Im}\tilde{f}=\operatorname{Im} f$

البرهان: نريد أن نبرهن أولاً أن $\tilde{f}$ هو تطبيق تشاكل:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/P \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

إن $\boxed{\tilde{f}\ \text{تطبيق}}$ لأن:

أولاً نأخذ العلاقة:

$\tilde{f}: M/P\to N$

$m+P\to f(m)=\tilde{f}(m+P)$

لنثبت أن $\tilde{f}$ تطبيق:

$m_1+P=m_2+P$

$\Rightarrow m_1-m_2\in P\subseteq \ker f$

$\Rightarrow f(m_1-m_2)=0$

بما أن f تشاكل ومنه

$f(m_1)=f(m_2)\Rightarrow \tilde{f}(m_1+P)=\tilde{f}(m_2+P)$

$\boxed{\tilde{f}\ \text{تشاكل}}$ لأن

أ) $\tilde{f}[(m_1+P)+(m_2+P)]$

$=\tilde{f}[(m_1+m_2)+P]=f(m_1+m_2)$

f تشاكل ومنه

$=f(m_1)+f(m_2)$

$=\tilde{f}(m_1+P)+\tilde{f}(m_2+P)$

ب) $\tilde{f}[\lambda.(m_1+P)]=\tilde{f}(\lambda m_1+P)$

$$f(\lambda m_1) \underset{\downarrow}{=} \lambda f(m_1)$$

تشاكل f

ومنه $= \lambda \tilde{f}(m_1+P)$

ومنه $\tilde{f}$ تطبيق تشاكل.

حيث $\lambda \in A$ و m_1+P ، m_2+P عناصر كيفية من M/P

لنثبت الشروط:

(1 $\tilde{f} \circ \pi(m) = \tilde{f}(\pi(m))$

من المخطط نجد $= f(m)$

ومنه $\tilde{f} \circ \pi(m) = f(m)$

(2 $\ker \tilde{f} = \{m+P \in \frac{M}{P} : \tilde{f}(m+P)=0\}$

$f: M \to N$

حسب التعريف $\ker f = \{r \in M : f(r)=0\}$

$$\ker \tilde{f} = \{m+P \in \frac{M}{P} : f(m)=0\}$$

$$= \{m+P \in \frac{M}{P} : m \in \ker f\}$$

$$= \frac{\ker f}{P}$$

ومنه $\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P}$

(3 $\operatorname{Im} \tilde{f} = \{\tilde{f}(m+P) \in N ; m+P \in \frac{M}{P}\}$

حسب التعريف

$f: M \to N$

$\operatorname{Im} f = \{f(r) \in N : r \in M\}$

$$\operatorname{Im} \tilde{f} = \{f(m) ; m \in M\} = \operatorname{Im} f$$

ومنه $\operatorname{Im} \tilde{f} = \operatorname{Im} f$

في حال كانت $P = \ker f$ فيكون:

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P} = \frac{\ker f}{\ker f} = \{0\}$$

ومنه $\tilde{f}$ متباين حسب الخاصة

(f تشاكل متباين $\Leftrightarrow$ $\ker f = 0$)

و مبرهنة: ليكن M موديول على A وليكن N_1 و N_2 موديولين جزئيين من M حيث $\boxed{N_1 \le N_2}$ عندها:

$$\frac{M/N_1}{N_2/N_1} \cong \frac{M}{N_2}$$

الإثبات: لدينا

$$f: M \to \frac{M}{N_2}$$
$$m \to m+N_2$$

هو تشاكل غامر قانوني (تشاكل تام)

ونواته $\ker f = N_2$

ولدينا فرضاً

$N_1 \subseteq N_2 = \ker f$

و N_1 موديول جزئي من M

ومنه حسب المبرهنة 8

يوجد تشاكل:

$$\tilde{f} : \frac{M}{N_1} \longrightarrow \frac{M}{N_2}$$

$$m+N_1 \to \tilde{f}(m+N_1) = f(m) = m+N_2$$

وذلك حسب المخطط:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M/N_2 \\ M/N_1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

كذلك من المبرهنة 8 :

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{N_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

وكون f غامر نجد أن $\tilde{f}$ غامر

أي $\tilde{f} : \frac{M}{N_1} \longrightarrow \frac{M}{N_2}$

$\tilde{f}$ هو تشاكل غامر

أي

$$Im\, \tilde{f} = \frac{M}{N_2} \quad \text{و} \quad \ker \tilde{f} = \frac{N_2}{N_1}$$

حسب إحدى النتائج التي تقول

ليكن $f : M \to N$ تشاكل

f تشاكل غامر عندها

$$\frac{M}{\ker f} \cong N$$

وبالتالي

$$\frac{\frac{M}{N_1}}{\ker \tilde{f}} \cong \frac{M}{N_2}$$

ومنه

$$\frac{\frac{M}{N_1}}{\frac{N_2}{N_1}} \cong \frac{M}{N_2}$$

و.هـ.م

10 - مبرهنة المباشرة : ليكن M موديول على الحلقة A

ولتكن N_1 و N_2 موديولين جزئيين من M

عندها

$$\frac{N_1+N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

الإثبات:

$$N_2 \xrightarrow{f_1} N_1+N_2 \xrightarrow{f_2} \frac{N_1+N_2}{N_1}$$

$[n_2 \to 0+n_2]$ $[n_1+n_2 \to n_1+n_2+N_1]$

عندها يوجد تشاكل:

$$f : N_2 \longrightarrow \frac{N_1+N_2}{N_1} \quad *$$

$$n_2 \longrightarrow n_2+N_1$$

لكن $n_2+n_1+N_1 \to n_1 \in N_1$

ومنه $n_1+n_2+N_1 = n_2+N_1$

حيث f ناتج من تركيب f_2 و بعد f_1

$$\ker f = \{n_2 \in N_2 \ : n_2 + N_1 = N_1\}$$

$$= \{n_2 \in N_2 \ : n_2 \in N_1\}$$

$$= N_1 \cap N_2$$

ومنه

$$\ker f = N_1 \cap N_2$$

نريد الان اثبات أن f غامر:

نختار عنصر من المستقر

$$n_1+n_2+N_1 \in \frac{N_1+N_2}{N_1}$$

لأن $n_1 \in N_1$

حيث $n_1+n_2+N_1 = n_2+N_1$

ومنه يوجد عنصر من المنطلق

ولكن $n_2 \in N_2$

حيث حسب *

$$f(n_2) = n_2 + N_1 = n_1+n_2+N_1$$

وبما أن f تشاكل غامر فإنه

حسب النتيجة التي تقول: $f: M \to N$

$\frac{M}{\ker f} \cong N \Leftarrow$ f تشاكل غامر

ومنه $\frac{N_2}{\ker f} \cong \frac{N_1+N_2}{N_1}$

وبالتالي $\frac{N_2}{N_1 \cap N_2} \cong \frac{N_1+N_2}{N_1}$

11 - مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A ولنأخذ N, N', P, P' أربعة مودولات جزئية من M حيث

$N \subset P$ و $N' \subset P'$

$$\frac{N+(P\cap P')}{N+(P\cap N')} \cong \frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(P\cap N')} \cong \boxed{\frac{N'+(P\cap P')}{N'+(N\cap P')}}$$

الاثبات:

نستخدم ~~...~~ المبرهنة 10

ونستخدم:

$(A\cap C)+B = A\cap(C+B)$ * حيث $B \subseteq A$

لدينا المبرهنة 10:

$$\frac{N_1+N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

نفرض أن $N_1 = N+(P\cap N')$

$N_2 = P \cap P'$

ومنه

بالتقاطعات: نأخذ $N\cap N'$ إلى $P\cap P'$ ونأخذ ... $P\cap P'$

بالجمع: مقارن التقاطعات لنرى من ...

$$N_1+N_2=(P\cap P')+(N+(P\cap N'))$$

$$=(P\cap P')+N$$

حيث $P\cap N'\subset P\cap P' \Leftarrow N'\subset P'$

$$N_1+N_2=(P\cap P')+N$$

$$N_1\cap N_2=(P\cap P')\cap(N+(P\cap N'))$$

حسب ★ نجد

$$N_1\cap N_2=((P\cap P')\cap N)+(P\cap N')$$

$$=(N\cap P')+(P\cap N')$$

لأن $N\cap P=N \Leftarrow N\subset P$

$$N_1\cap N_2=(N\cap P')+(P\cap N')$$

ومنه حسب المبرهنة 10:

$$\frac{P\cap P'}{(N\cap P')\cap(P\cap N')}\cong\frac{N+(P\cap P')}{N+(P\cap N')}$$

التماثل الثاني بنفس الطريقة:

نفرض: $N_2=P\cap P_1$

$$N_1=N'+(N\cap P')$$

$$N_1+N_2=(P\cap P')+N'+(N\cap P')$$

ومنه $\boxed{N_1+N_2=P\cap P'+N'}$

$$N_1\cap N_2=(P\cap P')\cap(N'+(N\cap P'))$$

$(P\cap P'\cap N')+(N\cap P')$

ومنه

$$\boxed{N_1\cap N_2=(N\cap P')+(P\cap N')}$$

حسب المبرهنة 10:

$$\frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(P\cap N)}\cong\frac{N'+(P\cap P')}{N'+(N\cap P')}$$

١٢- مبرهنة:

$$M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}P$$

حيث g و f تشاكلات مودولية

كشف ها:

$$\mathrm{Im}f\leq\ker g \Leftrightarrow g\circ f=0$$

الاثبات:

نفرض: $g\circ f=0$ ومنه

$$n\in \mathrm{Im}f \Longrightarrow \exists m\in M: f(m)=n$$

حسب تعريف الـ $\mathrm{Im}f=\{f(r)\in N : r\in M\}$

$$g(n)=g(f(m))=g\circ f(m)=0$$

إذاً $n\in\ker g$

ومنه $\mathrm{Im}f\leq\ker g$

الاثبات الثاني:

نعرف أن : $Im f \subseteq \ker g$

ومنه :

ليكن $m \in M$ عندها

$$g \circ f(m) = g(\underbrace{f(m)}_{\in Im f \subseteq \ker g}) = 0$$

حسب تعريف الـ $f : M \to N$

$\ker f = \{ r \in M : f(r) = 0 \}$

ومنه :

$$g \circ f = 0$$

١٣ـ مبرهنة :

$$(*) \quad \dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$$

هي تامة $\Longrightarrow f_i \circ f_{i-1} = 0$

الاثبات : إذا كانت $*$ تامة

فإن $Im f_{i-1} = \ker f_i$

ومنه

$$Im f_{i-1} \subset \ker f_i$$

حسب المبرهنة 12 نجد

$$f_i \circ f_{i-1} = 0$$

١٤ـ مبرهنة :

$$(**) \quad 0 \xrightarrow{1} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{2} 0$$

هذه متتالية قصيرة

نقول عن المتتالية القصيرة إنها تامة

إذا وفقط إذا :

1ـ f متباين

2ـ $Im f = \ker g$

3ـ g غامر.

الاثبات : إن $(**)$ تامة $\Longleftrightarrow$ تامة في M ، تامة في N ، تامة في P

(1) $Im(1) = \ker f$ $\Longleftrightarrow$ تامة $**$

$\Longleftrightarrow 0 = \ker f$

$\Longleftrightarrow$ f متباين

(2) $Im f = \ker g$

(3) $\Longleftrightarrow Im g = \ker(2)$

$\Longleftrightarrow Im g = P$

g غامر

المحاضرة 8

١٥ـ مبرهنة :

$$\begin{array}{ccccccc}
M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\
N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4
\end{array}$$

نريد أن نثبت أن $\beta(f_1(m_2)+m_2)=n_2$

متتالية تامة

عندها :

(1) γ , α غامرين و δ متباين

عندها β غامر

الاثبات : ليكن $n_2 \in N_2$ ومنه

$g_2(n_2) \in N_3$

لدينا γ غامر ومنه :

$\exists m_3 \in M_3 : \gamma(m_3) = g_2(n_2)$

لنأخذ صورة الطرفين وفق g_3

$g_3(\gamma(m_3)) = g_3(g_2(n_2))$

$= g_3 \circ g_2(n_2) = 0$ متتالية تامة

ومنه :

$g_3 \circ \gamma(m_3) = 0$ ، $\delta \circ f_3(m_3) = 0$

وذلك لأن المتتالية تامة

$\delta(f_3(m_3)) = 0$

ومنه كون $f_3(m_3) \in \ker \delta$

δ متباين ومنه

$f_3(m_3) = 0 \Rightarrow m_3 \in \ker f_3 = Im f_2$

ومنه

$\exists m_2 \in M_2 : \boxed{f_2(m_2) = m_3}$

ومنه

$g_2(n_2) = \gamma(m_3) = \gamma(f_2(m_2))$

$= g_2(\beta(m_2))$

ومنه $g_2(n_2 - \beta(m_2)) = 0$

$n_2 - \beta(m_2) \in \ker g_2 = Im g_1$

$\exists n_1 \in N_1 : g_1(n_1) = n_2 - \beta(m_2)$

إن α غامر فنجد :

$\exists m_1 \in M_1 : \alpha(m_1) = n_1$

ومنه

$g_1(\alpha(m_1)) = n_2 - \beta(m_2)$

$\beta(f_1(m_1)) = n_2 - \beta(m_2)$

$\beta(\underbrace{f_1(m_1) + m_2}_{\in M_2}) = n_2$

ومنه β غامر

(2) (δ , β متباين ، α غامر)

ومنه γ متباين

الاثبات :

$m_3 \in \ker \gamma$

$\gamma(m_3) = 0$ ، $g_3(\gamma(m_3)) = 0$

تشاكل زمري

$\delta(f_3(m_3)) = 0$ ، $f_3(m_3) = 0$

$f_3(m_3) \in \ker \delta$

$\Rightarrow m_3 \in \ker f_3 = \operatorname{Im} f_2$

(1 $\exists m_2 \in M_2 ,\ f_2(m_2) = m_3$

$\gamma(f_2(m_2)) = \gamma(m_3) = 0$

$g_2(\beta(m_2)) = 0$

$\beta(m_2) \in \ker g_2 = \operatorname{Im} g_1$

$\exists n_1 \in N_1 ;\ g_1(n_1) = \beta(m_2)$

α غامر وبالتالي:

$\exists m_1 \in M_1 ;\ \alpha(m_1) = n_1$

$g_1(\alpha(m_1)) = \beta(m_2)$

$\beta(f_1(m_1)) = \beta(m_2)$

β متباين:

$f_1(m_1) = m_2$

نعوض في العلاقة (1)

$m_3 = f_2(m_2) = f_2(f_1(m_1))$

$= \underbrace{f_2 \circ f_1}_{\text{هي 0 كون المتتالية تامة}}(m_1) = \underbrace{0(m_1)}_{0}$

ومنه $m_3 = 0 \Rightarrow \ker \gamma = 0$

وبالتالي يكون γ متباين

تمرين 16: $f, h \in Hom(M,N)$

$g, k \in Hom(N,P)$

حيث M, N, P ثلاث مودولات على حلقة A أثبت أن:

(1 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(2 $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

(3 $(f+h)^* = f^* + h^*$

(4 $(g+k)_* = g_* + k_*$

الإثبات:

ليكن Q مودول على حلقة A

$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \ :\ g \circ f : M \to P$

$(g \circ f)^* : Hom(P, Q) \to Hom(M, Q)$

$u \to (g \circ f)^*(u) = u \circ (g \circ f)$

$(g \circ f)_* : Hom(Q, M) \to Hom(Q, P)$

$v \to (g \circ f)_*(v) = (g \circ f) \circ v$

$f^*: Hom(N,Q) \to Hom(M,Q)$

$u \to f^*(u) = u \circ f$

$f_*: Hom(Q,M) \to Hom(Q,N)$

$v \to f_*(v) = f \circ v$

$g^*: Hom(P,Q) \to Hom(N,Q)$

$u \to g^*(u) = u \circ g$

$g_*: Hom(Q,N) \to Hom(Q,P)$

$v \to g_*(v) = g \circ v$

لنبرهن الإثبات: $u \in Hom(P,Q)$

2) $(g \circ f)^*(u) = u \circ (g \circ f)$

$= (u \circ g) \circ f = (g^*(u)) \circ f$

$= f^*(g^*(u)) = f^* \circ g^*(u)$

1) $v \in Hom(Q,M)$

$(g \circ f)_*(v) = (g \circ f) \circ v$

تركيب التطبيقات تجميعي

$= g \circ (f \circ v) = g \circ (f_*(v))$

$= g_*(f_*(v))$

$= (g_* \circ f_*) v$

ومنه $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

3) $v \in Hom(N,Q)$

$(f+h)^*(v) = v \circ (f+h)$

تركيب التطبيقات توزيعي على جمع التطبيقات

$= v \circ f + v \circ h$

$= f^*(v) + h^*(v)$

ومنه: $(f+h)^* = f^* + h^*$

4) $v \in Hom(Q,N)$

$(g+k)_*(v) = (g+k) \circ v$

تركيب التطبيقات توزيعي على جمع التطبيقات

$= g \circ v + k \circ v$

$= g_*(v) + k_*(v)$

ومنه $(g+k)_* = g_* + k_*$

مبرهنة 7: ليكن M, M', M'' 3 مودولات على حلقة A ولتكن المتتالية التالية:

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

متتالية قصيرة تامة عندها: لنأخذ N مودول على حلقة A فإن المتتالية:

$$0 \to Hom(N,M') \xrightarrow{f_*} Hom(N,M) \xrightarrow{g_*} Hom(N,M'') \quad (*)$$

أثبت التامة

الإثبات: يجب إثبات أن:

1) f_* متباين

2) $Im f_* = ker g_*$

لنثبت (1):

$$\forall v \in ker f_* \Rightarrow v \in Hom(N,M')$$

$$f_* v = 0 \Rightarrow v \in Hom(N,M')$$

$$N \xrightarrow{v} M' \xrightarrow{f} M$$

إن $f \circ v = 0$ ومنه

$$f \circ v = f \circ 0$$

$f \circ 0 = f(0) = 0$ لأن f خطي

$\forall n \in N : f \circ v(n) = f \circ 0(n)$

$$f(v(n)) = f(0(n)) \underset{متباين}{\overset{f}{\Longrightarrow}} v(n) = 0(n)$$

ومنه $\forall n \in N : v(n) = 0 \Rightarrow v = 0$

ومنه

$0 = ker f_* \Leftarrow$ f_* متباين

2) نريد إثبات $Im f_* = ker g_*$

الاحتواء الأول:

$$\boxed{u \in Im f_*} \Rightarrow u \in Hom(N,M)$$

ومنه حسب تعريف $Im f_*$

يوجد $v \in Hom(N,M')$ حيث $f_*(v) = u$

أي:

$$u \in Hom(N,M) \wedge \exists v \in Hom(N,M')$$

$$f \circ v = u$$

لدينا: $\boxed{g_*(u)} = g \circ u = g(f \circ v)$

$$= \underbrace{(g \circ f)}_{0} \circ v = 0 \circ v$$

ومنه $g_*(u) = 0 \Rightarrow \boxed{u \in ker g_*}$

ومنه $Im f_* \subseteq ker g_*$

الاحتواء الثاني:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[ru, "v?"] \arrow[r, "u"'] & M \end{tikzcd}$$

ليكن $u \in \ker g_*$ والمطلوب

برهان: أي برهان $u \in \operatorname{Im} f_*$ أي

$\exists w \in Hom(N,M') : f_*(w)=u$

$: f\circ(w)=u$

$u \in \ker g_* \Rightarrow u \in Hom(N,M)$

ومنه $g_*(u)=0$ أي

$\Rightarrow u \in Hom(N,M)$

ومنه $g\circ(u)=0$

$\Rightarrow u \in Hom(N,M)$

$\operatorname{Im} u \subseteq \ker g$.

$\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} f$.

وذلك 68 $*$ تامة

لنقوم بإنشاء w:

ليكن $n \in N$ ومنه

$u(n) \in \operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} f$.

$\exists m' \in M' : f(m')=u(n)$;

عندها نعرف: $w(n)=m'$

حيث $w : N \to M'$

يجب إثبات أن w تطبيق تشاكل

وبأنه يجعل المخطط تبديلي.

لنعرف العلاقة:

$w : N \longrightarrow M'$

$n \mapsto m'$: $u(n)=f(m')$

إن w تطبيق 68:

$n_1=n_2 \Rightarrow u(n_1)=u(n_2) \Rightarrow f(m'_1)=f(m'_2)$

$\xRightarrow[\text{متباين}]{f} m'_1=m'_2 \Rightarrow w(n_1)=w(n_2)$

إن w تشاكل 68:

$n_1, n_2 \in N$, $\alpha, \beta \in A$

ومنه $u(\alpha n_1+\beta n_2)=\alpha u(n_1)+\beta u(n_2)$

وذلك 68 u تشاكل:

$=\alpha \cdot f(m'_1)+\beta f(m'_2)$

$= f(\underbrace{\alpha m'_1+\beta m'_2}_{m'})$

وذلك 68 f تشاكل

إذا: $w(\alpha n_1+\beta n_2)=\alpha m'_1+\beta m'_2$

$=\alpha w(n_1)+\beta w(n_2)$

حيث $u(n_i)=f(m'_i) \Rightarrow w(n_i)=m'_i$

$i=1,2,\ldots$

ومنه $w \in Hom(N,M')$

لنثبت أن المخطط تبديلي أي:

$f_*(w) \overset{?}{=} u$

$f\circ w(n)=f(w(n))=f(m')$

$\boxed{n \in N}$ $=u(n)$

ومنه

$f_*(w)=u$

المتحقق الثاني :

$0 \to Hom(M'',N) \xrightarrow{g^*} Hom(M,N) \xrightarrow{f^*} Hom(M',N)$

اثبات انها تامة.

الاثبات: يجب برهان أن:

1) g^* متباين

2) $Img^* = ker f^*$

اثبات أن g^* متباين:

$v \in ker g^* \Rightarrow v \in Hom(M'',N)$

$\wedge \ g^*(v) = 0 \to v \circ g = 0$

$\Rightarrow v \circ g = 0 \circ g$

إن g غامر فهو قابل للاختصار من اليمين لنبرهن ذلك

إن g تشاكل غامر $g : M \to M''$

فعندما يمكن إيجاد تطبيق s بحيث

$s : M'' \to M$

$m'' \to m$

$g \circ s = id$

كون g غامر :

$\forall m'' \in M'' , \exists m \in M : g(m) = m''$

إذن :

$g \circ s(m'') = g(s(m'')) = g(m) = m''$

$= Id_{M''}(m'')$

ومنه $g \circ s = Id$ تطبيق مطابق

ومنه نستنتج :
g غامر ⇐ يوجد تطبيق s
بحيث $g \circ s = Id$

لدينا $v \circ g = 0 \circ g$

$(v \circ g) \circ s = (0 \circ g) \circ s$

$v \circ (g \circ s) = 0 \circ (g \circ s)$

$v \circ Id = 0 \circ Id$

$v = 0$

ومنه $ker g^* = 0$ إذن g^* متباين

2) لنثبت أن $Img^* = ker f^*$

$\boxed{v \in Img^*} \to v \in Hom(M,N)$

حسب تعريف Img^* :

$\exists u \in Hom(M'',N) : g^*(u) = v$

$u \circ g = v$

لكننا :

$f^*(v) = v \circ f = (u \circ g) \circ f$

$= u \circ (g \circ f) = u \circ 0 = 0$

ومنه $\boxed{v \in ker f^*}$

$Img^* \subseteq ker f^*$

$w(m'') = u(n)$

$g(m) = m''$

المستوى الثاني :

$$u \in \ker f^* \Rightarrow \begin{cases} u : M \xrightarrow{\text{تشاكل}} N \\ u \circ f = 0 \end{cases}$$

لنثبت أن $u \in \operatorname{Im} g^*$

أي يجب برهان على وجود تشاكل:

$\exists\, w : M'' \to N$

حيث $w \circ g = u$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & N \\ M'' \arrow[ur, dashed, "w"'] & \end{tikzcd}$$

لدينا العلاقة:

$w : M'' \to N$

$m'' \to w(m'') = u(m)$

حيث $g(m) = m''$

إن w $\boxed{\text{تطبيق}}$ لأن:

$m''_1 = m''_2$

g غامر ومنه يوجد $m_1, m_2 \in M$

حيث $g(m_1) = m''_1$, $g(m_2) = m''_2$

ومنه إذا كان $m''_1 = m''_2 \Rightarrow g(m_1) = g(m_2)$

$\Rightarrow g(m_1 - m_2) = 0$

$\Rightarrow m_1 - m_2 \in \ker g$

لكن لدينا $u \circ f = 0 \Leftarrow \operatorname{Im} f \subseteq \ker u$

وبما أن $(*)$ تامة فإن $\ker g = \operatorname{Im} f$

وبالتالي:

$\ker g \subseteq \ker u$

$m_1 - m_2 \in \ker g \subseteq \ker u$

ومنه $u(m_1 - m_2) = 0$

وبما أن u تشاكل فإن

$u(m_1) = u(m_2)$

$w(m''_1) = w(m''_2)$

إن w $\boxed{\text{تشاكل مودولي}}$ لأن:

$\forall m''_1, m''_2 \in M''$, $\forall \alpha, \beta \in A$

$: w(\alpha m''_1 + \beta m''_2)$

بما أن g غامر فإن: $\exists m_i \in M : g(m_i) = m''_i$ $(i = 1, 2)$.

ومنه $w(\alpha . g(m_1) + \beta g(m_2))$

بما أن g تشاكل فإن

$w(g(\alpha m_1 + \beta m_2))$

وحسب قاعدة ربط w فإن:

$u(\alpha m_1 + \beta m_2) \underset{\text{تشاكل}}{\overset{u}{=}} \alpha u(m_1) + \beta u(m_2)$ ★

حسب قاعدة ربط w فإن نعوض بـ ★ فينتج

$\alpha\, w(g(m_1)) + \beta\, w(g(m_2))$

ومنه

$\alpha \,.\, w(m'_1) + \beta\, w(m'_2)$

ومنه أي:

$w(\alpha . m'_1 + \beta m'_2) = \alpha . w(m'_1) + \beta w(m'_2)$

الآن سنتأكد من كون المخطط تبديلي:

$g^*(w) = u \Rightarrow w \circ g = u$

$w \circ g(m) = w(g(m)) = w(m') = u(m)$

إذا $w \circ g = u$

المحاضرة 11

18- مبرهنة: لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على A

إن $(\prod M_i , \{pr_i\})$ تشكل جداء لها.

الإثبات:

يجب إثبات وجود تشاكل وحيد بحيث يجعل المخطط تبديلي

لتكن $(N , \{f_i\})$ حيث N هو A- مودول

$f_i : N \to M_i \quad \forall i \in I$ (تشاكل)

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f_i"] \\ \prod M_i \arrow[r, "pr_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

نعرف $h : N \to \prod M_i$

$n \to h(n) = (f_i(n))_{i \in I}$

لنثبت أن h تطبيق تشاكل وأنه وحيد.

إن $\boxed{h \text{ تطبيق}}$ لأن:

$\forall n_1, n_2 \in N \quad : n_1 = n_2$

نأخذ صورة بالنسبة لـ f_i $(i \in I)$

$\forall i \in I \quad : f_i(n_1) = f_i(n_2)$

$(f_i(n_1))_{i \in I} = (f_i(n_2))_{i \in I}$

$h(n_1) = h(n_2)$

إن $\boxed{h \text{ تشاكل}}$ لأن:

$\forall n_1, n_2 \in N \quad , \lambda \in A \quad \forall i \in I$

(1) $h(n_1 + n_2) = (f_i(n_1 + n_2))_{i \in I}$

وبما أن $\{f_i\}$ أسرة من التشاكلات المودولية فإن:

$= (f_i(n_1) + f_i(n_2))_{i\in I}$

$= (f_i(n_1))_{i\in I} + (f_i(n_2))_{i\in I}$

$= h(n_1) + h(n_2)$

(2) $h(\lambda . n_1) = (f_i(\lambda . n_1))_{i\in I}$

بما أن $\{f_i\}_{i\in I}$ جماعة تشاكلات المودولية فإن:

$(\lambda . f_i(n_1))_{i\in I}$

$\lambda . f_i(n_1) = \lambda . h(n)$

ومنه λ تطبيق تشاكل.

لنثبت أن: $p_i^r \circ h = f_i$

أي المخطط يلي ((

$p_i^r \circ h(n) = p_i^r(h(n)) = p_i^r(f_i(n))$

$= f_i(n)$ حسب التعريف $(p_j^r(m_i) = m_j)$

$\forall i \in I$ و $n \in N$

لنثبت أن h وحيد:

$k : N \to \pi_{i\in I} M_i$

حيث تحقق مهما يكن $i \in I$ فإن

$p_i^r \circ k = f_i$

مهما يكن $n \in N$:

$f_i(n) = p_i^r \circ k(n) = p_i^r \circ h(n)$

$p_i^r(k(n)) = p_i^r(h(n)) \quad \forall i \in I$

ومنه المركبة i للعنصر $k(n)$ تساوي المركبة i للعنصر $h(n)$ وذلك مهما يكن $i \in I$

إذاً $k(n) = h(n)$ مهما يكن $n \in N$

ب - برهنة: ليكن $\{M_i\}$ أسرة من المودولات على الحلقة A، ونعتبرها

أي جداء لهذه الأسرة سيكافئ

$(\pi_{i\in I} M_i , \{p_i^r\}_{i\in I})$

الإثبات: إن $(\pi M_i , \{p_i^r\})$ جداء للأسرة $\{M_i\}$

وبالتالي:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, "h \text{ وحيد}"'] \\ \pi M_i \arrow[r, "p_i^r"'] \arrow[ur, shift right, "k \text{ وحيد}"'] & M_i \end{tikzcd}$$

$\exists h : N \to \pi M_i$ وحيد

بحيث $p_i^r \circ h = f_i$

لنفرض وجود جداء آخر $(N , \{f_i\}_{i\in I})$ للأسرة $\{M_i\}$

وبالتالي

$\exists k : \pi M_i \to N$

بحيث $k_i \circ k = p_i^r$

لنثبت أن $h \circ k = k \circ h = 1$

تطبيق مطابق

$\forall i \in I \quad : f_i = p_i^r \circ h$

$= (f_i \circ k) \circ h$

ومنه $k \circ h$

$f_i = f_i \circ (k \circ h)$

لكن $f_i = f_i \circ 1$

إذاً $\boxed{k \circ h = 1}$

من جهة أخرى

$\forall i \in I \quad : p_i^r = f_i \circ k$

$= (p_i^r \circ h) \circ k$

$= p_i^r \circ (h \circ k)$

ومنه $h \circ k$

لكن : $p_i^r = p_i^r \circ 1$

إذاً $\boxed{h \circ k = 1}$

ومنه h تماثل وتماثله العكسي هو k

المحاضرة 12

20- مبرهنة: ليكن $(\oplus M_i, \{In_i\}_{i \in I})$ تشكل جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$

الإثبات: لأجل كل $(N, \{g_i\}_{i \in I})$ حيث N هو A مودول

تشاكل $(i \in I)$: $g_i : M_i \to N$

المطلوب إيجاد:

$h : \oplus M_i \to N$

حيث $h \circ In_i = g_i$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "g_i"'] & \oplus M_i \arrow[dl, dashed, "h"] \\ N & \end{tikzcd}$$

نعرف العلاقة الآتية:

$h : \underset{i \in I}{\oplus} M_i \to N$

$(m_i) \longrightarrow h(m_i) = \underbrace{\sum g_i(m_i)}$

مجموع منتهي لأن $m_i \in \oplus M_i$

إذاً كل المركبات أصفار إلا عدد منتهي منها

إذاً $\boxed{h \text{ تطبيق}}$ لأن:

$\forall (m_i)_{i \in I}, (m'_i)_{i \in I} \in \underset{i \in I}{\oplus} M_i$

$(m_i)_{i \in I} = (m'_i)_{i \in I}$

نطور وفق تشاكل الاسقاط القانوني

$p_i^r(m_i)_{i \in I} = p_i^r(m'_i)_{i \in I}$

$\Rightarrow \quad m_i = m'_i$

$\forall i \in I \quad g_i$ نطور وفق

$(\forall i\in I)\ g_i(m_i) = g_i(m'_i)$

نجمع حدود الطرفين على i.

$\sum_{i\in I} g_i(m_i) = \sum_{i\in I} g_i(m'_i)$.

$\Rightarrow h((m_i)) = h((m'_i))_{i\in I}$

إذن h تشاكل مودولي:

$\forall (m_i)_{i\in I}, (m'_i)_{i\in I} \in \oplus M_i$

$\lambda \in A$

•) $h((m_i)_{i\in I} + (m'_i)_{i\in I}) = h(m_i+m'_i)_{i\in I}$

$= \sum g_i(m_i+m'_i) \quad \forall i\in I$

بما أن g_i تشاكل مودولي $_{i\in I}$

$= \sum_{i\in I}(g_i(m_i)+g_i(m'_i))$

$= \sum_{i\in I} g_i(m_i) + \sum_{i\in I} g_i(m'_i)$

$= h((m_i))_{i\in I} + h((m'_i))_{i\in I}$

••) $h(\lambda(m_i)_{i\in I}) = h((\lambda.m))_{i\in I}$

$= \sum g_i(\lambda.m_i)$

بما أن g_i تشاكل مودولي $\forall i\in I$

فإن:

$= \sum \lambda.g_i(m_i)$

$= \lambda.\sum g_i(m_i) = \lambda\, h((m_i))$

ومنه h تشاكل

تحقق

$h\circ in_i(m_i) = h(in_i(m_i))$

$= h(0,\dots,0,m_i,0,\dots)$

$= g_i(m_i)$

ومنه مهما تكن $m_i\in M_i$ فإن:

$h\circ in_i(m_i) = g_i(m_i)$

إثبات h وحيد لأن:

لنفرض وجود:

$k: \oplus M_i \to N$

تحقق $k\circ in_i = g_i$

$\forall i\in I$

ومنه $\forall m_i \in M_i$

$k\circ in_i(m_i) = g_i(m_i) = h\circ in_i(m_i)$

$k(\dots,0,m_i,0,\dots) = h(\dots,0,m_i,0,\dots)$

المحاضرة 13 24 / /

مبرهنة 21 : لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من الموديولات على حلقة A وليكن N موديول على A عندها:

تماثل زمري

$$Hom_A(N, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} Hom_A(N, M_i) \quad (1)$$

الإثبات:

$$\delta : Hom(N, \prod_{i\in I} M_i) \to \prod Hom_A(N, M_i)$$

$$f \to \delta(f) = (p_i^r \circ f)_{i\in I}$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & \prod M_i \arrow[d, "p_i^r"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

- δ تطبيق إذ نضيف p_i^r بالطرفين

$$f_1 = f_2 \Rightarrow p_i^r \circ f_1 = p_i^r \circ f_2 \quad \forall i \in I$$

$$\Rightarrow (p_i^r \circ f_1)_{i\in I} = (p_i^r \circ f_2)_{i\in I}$$

$$\delta(f_1) = \delta(f_2)$$

- δ تشاكل زمري

$$\delta(f_1 + f_2) = (p_i^r \circ (f_1 + f_2))_{i\in I}$$

$$= (p_i^r \circ f_1)_{i\in I} + (p_i^r \circ f_2)_{i\in I}$$

$$h((m_i)_{i\in I}) =$$

$$= (0, \dots, 0, m_{10}, 0, m_{12}, 0, 0, m_{15}, 0, \dots)$$

$$= h[(0, \dots, 0, m_{10}, 0, \dots) + (0, \dots, 0, m_{12}, 0, \dots) + (\dots, 0, m_{15}, \dots)]$$

$$= h(0, \dots, m_{10}, \dots) + h(0, \dots, m_{12}, \dots) + h(0, \dots, m_{15}, \dots)$$

$$= k(\dots, 0, m_{10}, \dots) + k(\dots, 0, m_{12}, \dots) + k(\dots, 0, m_{15}, \dots)$$

$$= k(\dots, m_{10}, 0, m_{12}, 0, 0, m_{15}, \dots)$$

$$h((m_i)) = h\sum(\dots, 0, m_i, 0, \dots)$$

$$= \sum h(\dots, 0, m_i, \dots) \leftarrow$$ h تشاكل

$$= \sum k(\dots, m_i, \dots)$$

$$= k(\sum(\dots, 0, m_i, \dots))$$

مجموع منتهي

$$= k((m_i)_{i\in I})$$

2ع

ص 115 كتاب

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "0"] \\ \prod M_i \arrow[r, "p_i^r"'] & M_i \end{tikzcd}$$

δ متباين لأن: $h \in \ker\delta$ فإن $\delta(h)=0$ أي $(p_i^r \circ h)=0$ / لأن التشاكل h هو التشاكل الوحيد الذي يجعل المخطط تبديلي ومنه $h=0$

$= \delta(f_1) + \delta(f_2)$

$\boxed{\text{δ تقابل}}$ لأن: δ غامر لأن:

$(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(N, M_i)$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g_i"] \arrow[dr, "h"'] & M_i \\ & \prod M_i \arrow[u, "p_i^r"'] \end{tikzcd}$$

ومنه من كون $\prod_{i\in I} M_i$ هو جداء لـ $\{M_i\}_{i\in I}$ $(\prod M_i, p_i^r)$ إذاً يوجد تشاكل وحيد:

$\exists h \in \mathrm{Hom}(N, \prod_{i\in I} M_i)$

فإن $p_i^r \circ h = g_i \quad \forall i\in I$

$\Rightarrow (p_i^r \circ h) = (g_i)_{i\in I}$

$\delta(h) = (g_i)_{i\in I}$

نجد غامر ومتباين لكون h وحيد

2) $\mathrm{Hom}(\oplus M_i, N) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$

$$\begin{tikzcd} \oplus M_i \arrow[r, "f"] & N \\ M_i \arrow[u, "in_i"] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

$\delta : \mathrm{Hom}(\oplus M_i, N) \to \prod \mathrm{Hom}(M_i, N)$

$f \to \delta(f) = (f\circ in_i)$

الإثبات:

δ تطبيق لأن:

$f_1 = f_2 \Rightarrow f_1\circ in_i = f_2\circ in_i \quad \forall i\in I$

$\Rightarrow (f_1\circ in_i)_{i\in I} = (f_2\circ in_i)_{i\in I}$

$\Rightarrow \delta(f_1) = \delta(f_2)$

$\boxed{\text{δ تشاكل زمري}}$:

$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(\oplus M_i, N)$

$\delta(f_1+f_2) = ((f_1+f_2)\circ in_i)_{i\in I}$

$= (f_1\circ in_i)_{i\in I} + (f_2\circ in_i)_{i\in I}$

$= \delta(f_1) + \delta(f_2)$

δ تقابل:

$\oplus M_i$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

$\forall (g_i) \in \prod \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$

$\Rightarrow \exists h \in \mathrm{Hom}_A(\oplus M_i, N)$

حيث h وحيد.

اثبات تشابها : $h \in \ker \delta$

$(h \circ i_i) = 0 \quad \forall i \quad \delta(h) = 0$

علماً أن h تشاكل الوحيد الذي يحقق الخاصية تبديلي ومنه $h = 0$ ومنه متباين

$h \circ i_i = g_i \quad \forall i \in I$

$(h \circ i_i) = (g_i)_{i \in I}$

$\Rightarrow \delta(h) = (g_i)_{i \in I}$

وبالتالي δ غامر ومتباين

---

22 مبرهنة : إن أي جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}$ يماثل $(\oplus M_i, \{i_i\})$

الاثبات :

ليكن $(\oplus M_i, \{i_i\})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}$

ولنفرض وجود جداء آخر $(N, \{g_i\})$ جداء مرافق لـ $\{M_i\}$

عندئذ :

من $(\oplus M_i, \{i_i\})$ يوجد تشاكل وحيد وليكن

$\exists h : \oplus M_i \to N$

بحيث تحقق $h \circ i_i = g_i$

من الجداء المرافق $(N, \{g_i\})$ يوجد تشاكل وحيد وليكن

$k : N \to \oplus M_i$

تحقق $k \circ g_i = i_i$

لنثبت أن : $h \circ k = k \circ h = 1$

$g_i = h \circ i_i$

$g_i = h \circ (k \circ g_i)$

$= (h \circ k) \circ g_i$

$g_i = g_i \cdot 1$ لكن $h \circ k$ وحيد

ومنه

$\boxed{h \circ k = 1}$

$i_i = k \circ g_i$

$= k \circ (h \circ i_i)$

$= (k \circ h) \circ i_i$

إذ $k \circ h$ وحيد

لكن $i_i = i_i \cdot 1$

ومنه $\boxed{k \circ h = 1}$

ومنه

$k \circ h = h \circ k = 1$

23 - برهنة لتكن :

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0 \quad (*)$$

متتالية قصيرة تامة عندها :

* منشطرة $\Leftrightarrow N = N_1 \oplus \ker g$

من أجل N_1 مودول جزئي من N محدد

الإثبات : [$\Leftarrow$

لدينا * منشطرة أي يوجد تشاكل

$S : P \to N$; $g \circ S = 1$

$g(n) \to S(g(n))$

ولدينا : $g : N \to P$

$n \to g(n)$

ليكن : $n \in N$ عندها $n - S(g(n)) \in N$

لنبرهن أن : $n - S(g(n)) \in \ker g$

$$g(n - S(g(n))) = g(n) - g(S(g(n)))$$

$g \circ S = 1$

$$= g(n) - g(n)$$

$$= 0$$

إذاً $n - \underbrace{S(g(n))}_{\in \operatorname{Im} S} \in \ker g$

ومنه ننقل الطرف الثاني

$$n \in \operatorname{Im} S + \ker g$$

أي

$$N = \operatorname{Im} S + \ker g$$

لنبرهن أنه + هي $\oplus$ أي :

$$\forall x \in \operatorname{Im} S \cap \ker g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{Im} S \Rightarrow \exists p \in P : S(p) = x \\ x \in \ker g \Rightarrow g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = g(S(p)) = 0$$

أي $\underbrace{(g \circ S)}_{1}(p) = 0 \Rightarrow p = 0$

ومنه $S(0) = x$

لكون S تشاكل مودولي فهو تشاكل زمرة

وبالتالي $S(0) = 0 = x$

وهذا يعني أن $0 = \ker g \cap \operatorname{Im} S$

نجد مما سبق أن

$$N = \operatorname{Im} S \oplus \ker g$$

الاتجاه الثاني : [$\Rightarrow$

لدينا $N = N_1 \oplus \ker g$

المطلوب إيجاد تشاكل $S : P \to N$

حيث $g \circ S = 1$

لنأخذ : $g|_{N_1} : N_1 \to P$

هي تشاكل مقصور g على N_1

ولنبرهن أن $g|_{N_1}$ هو تقابل :

$g|_{N_1}$ غامر :

$\forall p \in P \xrightarrow[\text{لكون}]{g \text{ غامر}} \exists n \in N : g(n)=p$

ولكن $n=n_1+a$

حيث $n_1 \in N_1$ و $a \in \ker g$

$p = g(n) = g(n_1+a) = g(n_1)+g(a)$

$= g(n_1)+0$

$= g|_{N_1}(n_1)+0$

$= g|_{N_1}(n_1)$

ومنه $g|_{N_1}(n_1) = p$

$g|_{N_1}$ متباين : لأن

$\boxed{n_1 \in \ker g|_{N_1}} \Rightarrow n_1 \in N_1 : g|_{N_1}(n_1)=0$

$\Rightarrow n_1 \in N_1 : n_1 \in \ker g$

$n_1 \in N_1 \cap \ker g = 0$ لأن $N=N_1 \oplus \ker g$

$\Rightarrow \boxed{n_1=0}$

وبالتالي $g|_{N_1}$ تقابل

لأن $g|_{N_1}$ تقابل فيوجد تطبيق عكسي $(g|_{N_1})^{-1}$

لنرمز $s=(g|_{N_1})^{-1}$

$s : P \to N$

كل ...

نحقق ما يلي

$g \circ s(p) = g(s(p))$

$= g|_{N_1}(s(p))$

$= g|_{N_1} \circ s(p)$

$= g|_{N_1} \circ (g|_{N_1})^{-1} \circ p = p$

ومنه

$g \circ s(p) = p$

$p = p \circ 1$

ومنه $g \circ s = 1$

25 - مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A عندها:
M نوثري $\Leftrightarrow$ M يحقق الشرط الاعظمي (أي كل أسرة من المودولات الجزئية من M تملك عنصراً أعظمي بالنسبة للاحتواء)

الاثبات: الاتجاه الاول: لتكن Γ أسرة من المودولات الجزئية من M وليكن $\boxed{M_0 \in \Gamma}$ ومنه إذا كان M_0 عنصر اعظمي تم المطلوب وإلا يوجد $\boxed{M_1 \in \Gamma}$ بحيث $M_0 \subset M_1$ إذا كان M_1 اعظمي تم المطلوب وإلا فإنه يوجد $\boxed{M_2 \in \Gamma}$ بحيث $M_0 \subset M_1 \subset M_2$ إذا كان M_2 اعظمي تم وإلا ....

وبإعادة العملية نحصل على سلسلة $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ هي سلسلة من المودولات الجزئية من M لكن M نوثري إذاً يوجد $r \in N$ بحيث $M_r = M_i$ مهما يكن $i \geq r$ إذاً M_r عنصر أعظمي

الاتجاه الثاني: لتكن
$(*) \quad M_0 \subset M_1 \subset \ldots$
سلسلة من المودولات الجزئية من M عندها المودولات $M_0, M_1, \ldots$ تشكل أسرة من المودولات الجزئية من M. لنفرض M_r هو عنصر أعظمي لهذه الاسرة

إذاً السلسلة $(*)$ تثبت من الحد M_r (لكونه عنصر اعظمي)
أي $\forall i \geq r$ فإن $M_i = M_r$

26 - مبرهنة:
M آرتيني $\Leftrightarrow$ M يحقق الشرط الاصغري

الاثبات:
الاتجاه الاول: لتكن Γ أسرة من المودولات الجزئية من M وليكن $M_0 \in \Gamma$ ومنه إذا M_0 اصغري تم وإلا يوجد $M_1 \in \Gamma$ بحيث $M_0 \supset M_1$ إذاً M_1 اصغري تم وإلا ...
بتكرار العملية نحصل على سلسلة
$M_0 \supset M_1 \supset M_2$
هي سلسلة من المودولات الجزئية من M لكن M آرتيني إذاً يوجد $r \in N$ بحيث $M_r = M_i$ $\forall i \geq r$ إذاً M_r أصغري.
نكمل كما في المبرهنة 25

27 - مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A عندها:

1) M نوثري $\Leftarrow$ كل مودول جزئي من M نوثري

الإثبات: ليكن N مودول جزئي من M ولتكن $N_0 \subset N_1 \subset \dots$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية إذاً هي سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M ولدينا فرضاً M نوثري ومنه السلسلة تثبت عند حد معين $r \in \mathbb{N}$

---

2) M آرتيني $\Leftarrow$ كل مودول جزئي من M آرتيني

الإثبات: ليكن N مودول جزئي من M ولتكن $N_0 \supset N_1 \supset \dots$ سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية إذاً هي سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من M ولدينا فرضاً M آرتيني ومنه السلسلة تثبت عند حد معين $r \in \mathbb{N}$

3) M مودول نوثري وليكن N مودول جزئي من M عندها M/N نوثري

الإثبات: لتكن $P_0 \subset P_1 \subset \dots$ سلسلة من المودولات الجزئية من M/N حسب التقابل بين المودولات الجزئية من M/N والمودولات الجزئية من M (التي تحوي N) نحصل:

$(*)\; M_0 \subset M_1 \subset \dots$

سلسلة من المودولات الجزئية من M ولكن M نوثري إذاً $(*)$ تثبت عند حد معين $r \in \mathbb{N}$

أي $M_r = M_i \quad \forall i \geq r$

ومنه بالتقابل نجد: $\exists r \in \mathbb{N}$

$P_r = P_i \quad \forall i \geq r$

أي M/N نوثري

---

4 - M آرتيني و N مودول جزئي من M عندها M/N آرتيني.

الإثبات: لتكن $P_0 \supset P_1 \supset \dots$ سلسلة من المودولات الجزئية من M/N حسب التقابل بين المودولات الجزئية من M/N والمودولات الجزئية من M (التي تحوي N) نحصل $M_0 \supset M_1 \supset \dots$

سلسلة من المودولات الجزئية من M
وبما أن M آرتيني فإن السلسلة
تثبت عند حد معين $\exists r \in \mathbb{N}$
$M_i = M_r \quad ; \forall i \geq r$
وبالمثل نجد: $\exists r \in \mathbb{N}$
$P_i = P_r \quad \forall i \geq r$
ومنه M/N آرتيني.

---

5) ليكن N مودول جزئي من M
حيث تحقق ما يلي:
N نوثري و M/N نوثري
عندها M نوثري

الاثبات:
ليكن * $M_0 \subset M_1 \subset \dots$
سلسلة من المودولات الجزئية من M
عندها
$M_0 \cap N \subset M_1 \cap N \subset \dots$
سلسلة من المودولات الجزئية من N
وبما N نوثري إذاً يوجد $t \in \mathbb{N}$
حيث $M_i \cap N = M_t \cap N \quad i \geq t$

كذلك: $\pi : M \to M/N$
تشاكل غامر قانوني

تصور حدود * بالتشاكل π نحصل على
$\pi(M_0) \subset \pi(M_1) \subset \dots$
سلسلة متزايدة من M/N ولكن M/N
نوثري ومنه $\exists k \in \mathbb{N}$
$\pi(M_k) = \pi(M_i) \quad \forall i \geq k$
لنفرض $r = \max(t, k)$ ولنبرهن أن:
$M_r = M_i$
لدينا $\forall i \geq r$ $\boxed{M_r \subset M_i}$

الاحتواء الثاني:
$x \in M_i \Rightarrow \pi(x) \in \pi(M_i) = \pi(M_r)$ أ
$\exists y \in M_r : \pi(x) = \pi(y)$ بدل M_r نضع y
$x + N = y + N$ ومن تعريف M/N $(m+n) : m \in M$
$\Rightarrow \boxed{x - y \in N}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} x \in M_i \\ y \in M_r \subset M_i \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x - y \in M_i} \; (2)$$
لدينا

من 1 و 2 نجد
$x - y \in M_i \cap N = M_r \cap N$
إذاً
$$\left.\begin{array}{l} x - y \in M_r \\ y \in M_r \end{array}\right\} \to (x-y)+y \in M_r \to x \in M_r \quad \text{ب}$$

من أ و ب نجد $\boxed{M_i \subset M_r} \Rightarrow M_i = M_r$ ومنه

6- N آرتيني و M/N آرتيني ⟸ M آرتيني

الإثبات: ليكن:

* $M_0 \supset M_1 \supset \dots$

سلسلة من المودولات الجزئية من M

عندها

$M_0\cap N \supset M_1\cap N \supset \dots$

سلسلة من المودولات الجزئية من N و N آرتيني ومنه يوجد $t\in N$

حيث $M_t\cap N = M_i\cap N \quad \forall i\geq t$

ليكن:

$\pi : M \to M/N$

تشاكل الغمر القانوني

نطبق على * بالتشاكل π

فنحصل على:

$\pi(M_0)\supset \pi(M_1)\supset \dots$

سلسلة جزئية من M/N

وبما أن M/N آرتيني ومنه

يوجد $k\in N$ حيث

$\pi(M_k)=\pi(M_i) \quad \forall i\geq k$

لنثبت أن $M_r=M_i$

حيث $r=\max(t,k)$

لدينا: $M_r\supset M_i \quad \forall i\geq r$

الاحتواء المعاكس:

$\forall x\in M_r : \pi(x)\in\pi(M_r)=\pi(M_i)$

$\exists y\in M_i : \pi(x)=\pi(y)$

$x+N=y+N$

1) $\boxed{x-y\in N}$

لدينا

$\left.\begin{array}{l} x\in M_r \\ y\in M_i\subset M_r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x-y\in M_r}$ (2

من 1 و 2 نجد

$x-y\in M_r\cap N = M_i\cap N$

$\left.\begin{array}{l} x-y\in M_i \\ y\in M_i \end{array}\right\} \Rightarrow x\in M_i$

(المحاضرة 16)

28 مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن:

$(S_1) : M=M_0\supset M_1\supset\dots\supset M_r=0$

$(S_2) : M=N_0\supset N_1\supset\dots\supset N_t=0$

S_1 و S_2 سلسلتين تطبيعيتين عندها يوجد تحسين T_1 و T_2 لكل من S_1 و S_2 على الترتيب بحيث

T_1 تكافئ T_2

الإثبات:

لنفرض:

$M_{iJ} = M_{i+1} + (M_i \cap N_J)$

$i = 0, 1, 2, \dots, r-1$

$J = 0, 1, \dots, t$

$N_{iJ} = N_{J+1} + (N_J \cap M_i)$

$J = 0, 1, \dots, t-1$

$i = 0, 1, \dots, r$

إذاً $M_{i0} = M_{i+1} + (M_i \cap N_0)$

$= M_{i+1} + (M_i \cap M)$

$= M_{i+1} + M_i = M_i$

وإن $M_{i-1,t} = M_i + (M_{i-1} \cap N_t)$

$= M_i + (M_{i-1} \cap 0)$

$= M_i$

ومنه

$M_i = M_{i0} = M_{i-1,t}$

وأيضاً

$N_J = N_{0J} = N_{r,J-1}$

فنحصل على:

(T_1) : $M = M_{00} = M_0 \supset M_{01} \supset M_{02} \supset \dots \supset M_{0,t} = M_{1-1,t} = M_1 \supset \dots \supset M_{11} \supset M_{12} \supset \dots \supset M_{1,t}$

$M_{1,t} = M_{2-1,t} = M_2 \supset M_{21} \supset \dots \supset M_{r-1,t} = 0$

(T_2) $M = N_{00} = N_0 \supset N_{10} \supset N_{20} \supset \dots \supset N_{r0} = N_{r,1-1} = N_1 \supset N_{11} \supset N_{21} \supset N_{31} \supset \dots \supset N_{r,t-1} = 0$

ولكن حسب رابع مبرهنة من مبرهنات التماثل.

$$\frac{N + (P \cap P')}{N + (P \cap N')} \cong \frac{(P \cap P')}{(N \cap P') + (P \cap N')} \cong \frac{N' + (P \cap P')}{N' + (N \cap P')}$$

1 $M_{iJ} = M_{i+1} + (M_i \cap N_J)$ 2 $N_{iJ} = N_{i+1} + (N_J \cap M_i)$

5 $(M_i \cap N_J)$

3 $M_{i,J+1} = M_{i+1} + (M_i \cap N_{J+1})$ 4 $N_{i+1,J} = N_{i+1} + (N_J \cap M_{i+1})$

6 $(M_i \cap N_{J+1}) + (N_J \cap M_{i+1})$

$$\frac{1}{3} \cong \frac{5}{6} \cong \frac{2}{4}$$

ومنه $\dfrac{M_{iJ}}{M_{i,J+1}} \cong \dfrac{N_{iJ}}{N_{i+1,J}}$

إذاً T_1 و T_2 متكافئين

كبرج جوردان هولدر $\Longleftrightarrow$ S سلسلة نظامية أعظمية

34 / 17

29 مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A عندها كل أبراج جوردان هولدر لـ M متكافئة

الإثبات: أريد أن أثبت $s_1=t_1$ و $s_2=t_2$

أي البرج S_2 لا يملك تنقيحة فعلية

ومن التالي حسب المبرهنة 28 نكون $S_1 \sim S_2$ وهو المطلوب.

$\Longleftarrow$ نفرض أن لدي برج جوردان هولدر ولنبرهن أن كل من S_1 و S_2 سلاسل أعظمية

ليكن S_2 و S_1 برجي J.H لـ M

$(S_1): M=M_0\supset M_1\supset\dots\supset M_r=0$

$(S_2): M=N_0\supset N_1\supset\dots\supset N_h=0$

لنثبت أن كل برج جوردان هولدر هو سلسلة نظامية أعظمية (لا يملك تنقيحة فعلية).

ليكن $M=M_0\supset M_1\supset\dots\supset M_r=0$ حيث M_i/M_{i+1} عوامل بسيطة

لنفرض: $M_i\supset N\supset M_{i+1}$ حيث N مودول جزئي من M

نحتاج بوضع حد ما بين الحدين

$\frac{N}{M_{i+1}} \subset \frac{M_i}{M_{i+1}} \quad \forall i=0,\dots,r-1$

ولكن $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ بسيط (لا يملك إلا 0 أو المودول نفسه)

إذاً $\frac{N}{M_{i+1}}$: $\frac{M_{i+1}}{M_{i+1}}=0$ أو $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

عندها N إما تساوي M_i أو N تساوي M_{i+1}

وبالتالي لا توجد تنقيحة فعلية لـ (S_1) أي هو سلسلة نظامية أعظمية

$\Longrightarrow$ لنفرض أن (لنفرض أنه توجد سلسلة أعظمية) ولنبرهن أنها جوردان هولدر وذلك من خلال العوامل البسيطة

$S: M=M_0\supset M_1\supset\dots\supset M_t=0$

هي سلسلة نظامية أعظمية

لنثبت أن M_i/M_{i+1} بسيطة ((أي S هو برج جوردان هولدر))

نفرض جدلاً أن M_i/M_{i+1} ليس بسيط عندها

نفرض جدلاً أنه يوجد P بين الصفر و $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

$$\frac{M_{i+1}}{M_{i+1}}=0 \subsetneq P \subsetneq \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

عندها. حسب التقابل بين المودولات الجزئية من $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ مع المودولات الجزئية من M_i التي تحوي M_{i+1}

نجد انه يوجد مودول جزئي من M هو N حيث:

$$M_{i+1} \subsetneq N \subsetneq M_i$$

(P_i يقابل N و M_i يقابل $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ و M_{i+1} يقابل $0 = \frac{M_{i+1}}{M_{i+1}}$)

وهذا يناقض كون (S) أعظمية

إذاً الفرضية الجدلية خاطئة إذاً:

كل بر.ج جوردان هو سلسلة نظامية أعظمية.

لدينا (S_1) و (S_2) برجي J.H

حسب المبرهنة 28 توجد (T_1) و (T_2) تنقيحة لـ (S_1) و (S_2) بالترتيب حيث T_1 و T_2 متكافئتان

ولكن (S_1) و (S_2) هما J.H إذاً $S_1 = T_1$ و $S_2 = T_2$ ويتم المطلوب

بملاحظة أن T_1 و T_2 متكافئتين

ومنه S_1 و S_2 متكافئتين

30 - مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A ولنأخذ N مودول جزئي من M

عندها:

M يملك بر.ج جوردان $\Leftrightarrow$ N و $\frac{M}{N}$ يملكان بر.ج جوردان

وعندها:

$$l(M) = l(N) + l\left(\frac{M}{N}\right)$$

الاثبات:

[$\Leftarrow$ $(S): M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_h = 0$ بر.ج جوردان لـ M

1) لنأخذ: $M_0 \cap N \supset M_1 \cap N \supset \dots \supset M_h \cap N = 0$ سلسلة نظامية لـ N

نريد أن نثبت بأنها J.H أي عواملها بسيطة.

نلاحظ أن $\boxed{N = M_i \cap N}$

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} = \frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap (M_i \cap N)} \cong \frac{M_{i+1} + (M_i \cap N)}{M_{i+1}}$$

(كون تقاطع تجميعي $(M_i \cap)$)

عرفنا التماثل من خلال فرضنا ((ديما طع جنبذ لتحقق))

$N_1 = M_{i+1}$

$N_2 = M_i \cap N$

وباستخدام المبرهنة 10 نجد التماثل

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

ومنه

$$\frac{M_i\cap N}{M_{i+1}\cap N} \cong \underbrace{\frac{M_{i+1}+(M_i\cap N)}{M_{i+1}}}_{P} \subseteq \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

أي

$$\frac{M_i\cap N}{M_{i+1}\cap N} \cong P \subseteq \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

حيث P موديول جزئي من $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

ولكن $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ بسيط إذاً :

$$\frac{M_i\cap N}{M_{i+1}\cap N} \begin{cases} \cong 0 \\ \cong \frac{M_i}{M_{i+1}} \text{ بسيط} \end{cases}$$

ومنه $\frac{M_i\cap N}{M_{i+1}\cap N}$ بسيط

2) لنأخذ سلسلة تركيبية لـ $\frac{M}{N}$ ولتكن :

$$\frac{M}{N} = \frac{M_0+N}{N} \supseteq \frac{M_1+N}{N} \supseteq \dots \supseteq \frac{M_k+N}{N} = 0$$

نريد أن نثبت أنه يحقق J.H أي عوامله بسيطة

$$\frac{f_i}{f_{i+1}} = \frac{\frac{M_i+N}{N}}{\frac{M_{i+1}+N}{N}} \cong \frac{M_i+N}{M_{i+1}+N}$$

التماثل من خلال المبرهنة 9

$$\frac{\frac{M}{N_1}}{\frac{M_2}{N_1}} \cong \frac{M}{M_2}$$

وبالتالي $\boxed{N_1 = M_{i+1}+N}$

$$\frac{M_i+N}{M_{i+1}+N} = \frac{M_i+(M_{i+1}+N)}{(M_{i+1}+N)} \cong \frac{M_i}{M_i\cap(M_{i+1}+N)}$$

$(M_{i+1}+)$ لأن مجموعة

التماثل خلال فرضنا

$N_1 = M_{i+1}+N$

$N_2 = M_i$

ومن المبرهنة 10 نستخدم التماثل

$$\frac{N_1+N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1\cap N_2}$$

كما أن :

$$\frac{M_i}{M_i\cap(M_{i+1}+N)} \cong \frac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{\underbrace{\frac{M_i\cap(M_{i+1}+N)}{M_{i+1}}}}$$

للقاسم موديول جزئي من $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

نرمز له بـ P

وبالتالي :

$$\frac{F}{F_{i+1}} \cong P = \frac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{\frac{M_i\cap(M_{i+1}+N)}{M_{i+1}}} \begin{cases} 0 \\ \frac{M}{M_{i+1}} \end{cases}$$

ومنه:

$$\frac{f}{f_{i+1}} \cong \frac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{0} = \boxed{\frac{M_i}{M_{i+1}}}$$

$$\frac{f}{f_{i+1}} \cong \frac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{\frac{M_i}{M_{i+1}}} = \boxed{0}$$

وبالتالي:

$$\frac{f}{f_{i+1}} = \frac{\frac{M_i+N}{N}}{\frac{M_{i+1}+N}{N}}$$

هي بسيط.

ومنه كلاً من N و $\frac{M}{N}$ يملكان برجي جوردان هولدر

الاتجاه الثاني:

لدينا: $\Longrightarrow$

$(S_N): N = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_r = 0$ (1)

J.H لـ N

$S(M/N): \frac{M}{N} = U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_h = 0_{M/N} = \frac{N}{N}$

J.H لـ $\frac{M}{N}$

نريد اثبات أن لـ M برج JH

حسب التقابل بين الموديولات الجزئية من $\frac{M}{N}$ و الموديولات الجزئية من M التي تحوي N نجد

أنه يوجد سلسلة ولتكن:

$$M = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_h = N \quad (\star)$$

حيث $\frac{V_i}{N} = U_i$: $\forall i = 0,\dots,h$

وكذلك: $\frac{V_i}{V_{i+1}} \cong \frac{\frac{V_i}{N}}{\frac{V_{i+1}}{N}} = \frac{U_i}{U_{i+1}}$

ولكن $\frac{U_i}{U_{i+1}}$ بسيط $\forall i = 0,\dots,h-1$

إذاً $\frac{V_i}{V_{i+1}}$ بسيط مهما يكن $i = 0,\dots,h-1$

بوصل السلسلة (1) مع السلسلة ★ نحصل على:

$$M = V_0 \supset \dots \supset V_h = N = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_r = 0$$

هي سلسلة نظامية لـ M

كذلك عوامل هذه السلسلة بسيطة ومنه ((M يملك برج JH لـ M

طوله

$$l\left(\frac{M}{N}\right) + l(N) = h + r = l(M)$$

3.1 مبرهنة: لتكن M موديول على حلقة A. ولتكن S مجموعة جزئية من M

S قاعدة لـ $M \Leftrightarrow M \cong A^{[S]}$

الإثبات: نفرض أن S قاعدة لـ M ولنثبت أن $M \cong A^{[S]}$

لنأخذ العلاقة:

$$\phi : A^{[S]} \to M$$
$$(\alpha_s)_{s\in S} \to \sum_{s\in S} \alpha_s . s$$

إن ϕ تطبيق لأن:

$\forall (\alpha_s)_{s\in S}, (\alpha'_s)_{s\in S} \in A^{[S]}$

$(\alpha_s)_{s\in S} = (\alpha'_s)_{s\in S}$

وحسب تعريف $A^{[S]}$ فإن

$$\sum_{s\in S} \alpha_s = \sum_{s\in S} \alpha'_s$$

$$\forall s\in S : \sum_{s\in S} \alpha_s . s = \sum_{s\in S} \alpha'_s . s$$

$$\phi((\alpha_s)_{s\in S}) = \phi((\alpha'_s)_{s\in S})$$

إن ϕ تشاكل موديولي لأن:

$\forall (\alpha_s), (\alpha'_s) \in A^{[S]}, \beta \in A$

1) $\phi((\alpha_s) + (\alpha'_s)) = \phi((\alpha_s + \alpha'_s))$

حسب قاعدة ربط ϕ

$= \sum (\alpha_s + \alpha'_s) . s$

$= \sum \alpha_s . s + \sum \alpha'_s . s$

$= \phi((\alpha_s)_{s\in S}) + \phi((\alpha'_s)_{s\in S})$

2) $\phi(\beta(\alpha_s)_{s\in S}) = \phi((\beta . \alpha_s))$

$= \sum (\beta . \alpha_s) . s$

$= \beta . \sum \alpha_s . s$

$= \beta . \phi((\alpha_s)_{s\in S})$

ϕ غامر لأن S مولدة لـ M

ϕ متباين لأن S حرة

ومنه ϕ تقابل وتشاكل وبالتالي $M \cong A^{[S]}$

$\{\sum\alpha_s.\varnothing(e_s)=0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_s=0$ نريد أن نثبت أنها حرة أي نفرض

الاتجاه الثاني :

لنفرض أن $M \cong A^{[S]}$

ولنثبت أن S قاعدة لـ M

لنأخذ الأسرة $\{e_s\}_{s\in S}$ حيث :

$$e_s = (e_{si})_{i\in S} = \begin{cases} e_{ss} & : s=i \\ 0 & : s\neq i \end{cases}$$

إن $\{e_s\}$ تشكل قاعدة لـ $A^{[S]}$ تدعى القاعدة القانونية

مما فرضنا المبرهنة لدينا التماثل التالي:

$$\varnothing : A^{[S]} \to M$$

ولدينا $\{e_s\}$ تشكل قاعدة لـ $A^{[S]}$

ومنه $\{\varnothing(e_s)\}$ تشكل قاعدة لـ M

وذلك لأن:

$$m\in M \Rightarrow \varnothing^{-1}(m)\in A^{[S]}$$

$$\Rightarrow \varnothing^{-1}(m) = \sum_{s\in S}\alpha_s e_s$$

(مجموع منتهٍ)

$$\Rightarrow m = \sum \alpha_s.\varnothing(e_s)$$

أصبحت $\varnothing(e_s)$ مولدة لـ M

$$\sum\alpha_s.\varnothing(e_s)=0 \xRightarrow{\varnothing \text{ تشاكل}} \varnothing\left(\sum\alpha_s.e_s\right)=0$$

$$\xRightarrow{\varnothing \text{ تماثل}} \sum\alpha_s(e_s)=0 \Rightarrow \alpha_s=0$$

أصبحت حرة

لكون $\{e_s\}$ قاعدة قانونية لـ $A^{[S]}$ بالتالي هي حرة وبالتالي فإن $\{\varnothing(e_s)\}$ هي حرة ومولدة فهي تشكل قاعدة لـ M

محاضرة 19

32- مبرهنة: أي مودول وليكن M منتهي التوليد يماثل مودول قسمة لمودول حر معين

الإثبات :

M منتهي التوليد ومنه يوجد حسب التعريف

$$S=\{s_1,\dots,s_t\}\subseteq M$$

حيث $M=\langle S\rangle$. لنأخذ التطبيق:

$$\varepsilon : A^t \to M$$

حيث $\varepsilon(e_i)=s_i$ ، $i=1,\dots,t$

$$\varepsilon\left(\sum\alpha_i e_i\right) = \sum\alpha_i\,\varepsilon(e_i)$$

حيث $\{e_1,\dots,e_t\}$ عناصر القاعدة القانونية للمودول الحر A^t ((معلومة سابقة

حيث $e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_t=(0,\dots,1)$

إذن ε تشاكل لأن :

$\forall x, y \in A^t \quad , \lambda , \beta \in A$

حيث

$\varepsilon : A^t \longrightarrow M$

$x \to \varepsilon(x) = x_1 \varepsilon(e_1) + x_2 \varepsilon(e_2) + \dots + x_t \varepsilon(e_t) \quad = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 \dots$

$\varepsilon(\lambda x + \beta y) = (\lambda x_1 + \beta y_1)\varepsilon(e_1) + \dots + (\lambda x_n + \beta y_n).\varepsilon(e_n)$

$= (\lambda x_1 + \beta y_1).s_1 + \dots + (\lambda x_n + \beta y_n) s_n$

$= \lambda x_1 s_1 + \beta y_1 s_1 + \dots + \lambda x_n s_n + \beta y_n . s_n$

$= \lambda x_1 s_1 + \dots + \lambda x_n . s_n + \beta y_1 s_1 + \dots + \beta y_n . s_n$

$= \lambda (x_1 . \varepsilon(e_1) + \dots + x_n \varepsilon(e_n)) + \beta (y_1 . \varepsilon(e_1) + \dots + y_n \varepsilon(e_n))$

$= \lambda . \varepsilon(x) + \beta \varepsilon(y)$

و ε غامر لأن $\langle S \rangle = M$

أي :

$\forall m \in M \Rightarrow m = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_t s_t$ ($s_1 = \varepsilon(e_1)$, $s_t = \varepsilon(e_t)$)

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in A$

$\Rightarrow \exists a : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_t e_t \in A^t$

ومنه $\varepsilon(a) = m$

وحسب النتيجة إذا f تشاكل غامر

$f : M \to N$

فإن $\frac{M}{\ker f} \cong N$

ومنه $\boxed{\frac{A^t}{\ker \varepsilon} \cong M}$

المحاضرة 20

33 - مبرهنة : ليكن M مودول على حلقة A حر ومنتهي التوليد . عندها M مودول بلا فتل

الاثبات : بما أن M حر ومنته التوليد عندئذ لـ M قاعدة ولتكن $E = \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ حرة ومولدة

ليكن m عنصر فتل لـ M

$\exists \alpha \in A^* : \alpha . m = 0$

العكس البرهنة: نفرض أنه يوجد تشاكل مودولي $\vartheta' : P \to M$ يجعل المخطط تبديلياً أي أن $f\circ\vartheta' = \vartheta$ ومنه $f_*(\vartheta') = \vartheta$ وبالتالي تشاكل $f_* : Hom(P,M) \to Hom(P,N)$ هو تشاكل غامر

لـ

بما أن $m \in M$ فإن
$$m = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i e_i$$
$$\alpha . m = \alpha(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_t e_t) = 0$$
$$= \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \dots + \alpha\alpha_t e_t = 0$$
إن E مستقلة ومنه
$$\alpha\alpha_i = 0 \quad : i \in \{1,\dots,t\}$$
A منطقة تكاملية لا تحوي قواسم للصفر.
$$\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow 0 = m = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i e_i$$
$$\forall i \in \{1,\dots,t\}$$

المحاضرة 21

34- مبرهنة: ليكن P مودول على حلقة A

1) P تصاعدي $\Longleftrightarrow$

لاجل كل مخطط من النمط:
$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\vartheta'"'] \arrow[d, "\vartheta"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad (\text{تامة})$$
يوجد تشاكل $\vartheta' : P \to M$ بحيث $f\circ\vartheta' = \vartheta$

(أي يجعل المخطط تبديلي)

الاثبات: P تصاعدي $\Longleftrightarrow$ $M \xrightarrow{f} N \to 0$ تامة

يوجد تشاكل غامر
$$f_* : Hom(P,M) \to Hom(P,N)$$
$$f_*(\vartheta) = f\circ\vartheta \quad : \vartheta \in Hom(P,M)$$
f_* غامر (تشاكل) ومنه $\Longleftrightarrow$:
$$\forall \vartheta \in Hom(P,N) ; \exists \vartheta' \in Hom(P,M)$$
بحيث
$$f_*(\vartheta') = \vartheta$$
$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\vartheta'"'] \arrow[d, "\vartheta"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad (\text{تامة}) \Longleftrightarrow$$
$$f\circ\vartheta' = \vartheta$$

2) P افقي $\Longleftrightarrow$

لاجل كل مخطط من النمط
$$(\text{تامة}) \quad \begin{tikzcd} & & P & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "\vartheta"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[ul, "\vartheta'"'] \end{tikzcd}$$
يوجد تشاكل
$$\vartheta' : N \to P$$
بحيث $\vartheta'\circ f = \vartheta$

الاثبات: P افقي $\Longleftrightarrow$ $0 \to M \xrightarrow{f} N$ تامة

يوجد تشاكل غامر
$$f^* : Hom(N,P) \to Hom(M,P)$$
$$\vartheta'\circ f = f^*(\vartheta')$$

$\Leftrightarrow$ f تشاكل متباين ، f^* تشاكل غامر

فإن

$\forall v \in Hom(M,P)$

$\exists v' \in Hom(N,P)$

$f^*(v') = v$

$$\begin{tikzcd} & & P & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur] \arrow[r] & N \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

أي $v' \circ f = v$

3.5 - ليكن P مودول إسقاطي على حلقة A عندها

لأجل كل مخطط من النمط

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r, "h"'] & Q \end{tikzcd}$$

حيث السطر الأفقي تام

و $h \circ f = 0$

عندها يوجد تشاكل مودولي $v: P \to M$

حيث $g \circ v = f$

الإثبات: بما أن $h \circ f = 0$

فإن: $Im f \subseteq ker h$

وبكون السطر الأفقي تام

فإن $Im g = ker h$

وبالتالي ينتج $Im f \subseteq Im g$

وهذا يمكننا من صياغة التشاكلين

المودوليين

(1 $g_1 : M \to Im g$

$m \mapsto g_1(m) = g(m)$

(2 $f_1 : P \to Im g$

$p \mapsto f_1(p) = f(p)$

وبما أن المودول P إسقاطي

فإنه من أجل المخطط

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, "f_1"] & \\ M \arrow[r, "g_1"'] & Img \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

يوجد تشاكل مودولي

$v : P \to M$

من أجله يكون

$g_1 \circ v = f_1$

ومنه $\forall p \in P$

$(g \circ v)(p) = g(v(p))$

$= g_1(v(p))$

$= (g_1 \circ v)(p)$

$= f_1(p) = f(p)$

36- مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن $\{M_i\}^n$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من M عندها:

1) $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي $\Leftrightarrow$ M_i إسقاطي مهما يكن $i=1,\dots,n$

الإثبات: لنفرض أن المودول $\oplus M_i$ إسقاطي لنأخذ مخطط التشاكلات المودولية.

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[d, "v"] & \\ N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

لنبرهن على وجود التشاكلات المودولية:

$v_i : M_i \to N_1$

حيث $f\circ v_i = v$

$\forall i = 1,\dots,n$

لنأخذ المخطط:

$$\begin{tikzcd} & \oplus M_i \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, shift left, "p_i^r"] & \\ & M_i \arrow[u, shift left, "in_i"] \arrow[d, "v"] & \\ N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

بما أن $\oplus M_i$ إسقاطي فيوجد تشاكل:

$w : \oplus M_i \to N_1$

$f\circ w = v\circ p_i^r$ بحيث تحقق:

ومنه $(f\circ w)\circ in_i = (v\circ p_i^r)\circ in_i$

وبملاحظة أن $p_i^r\circ in_i = 1$

ومنه $f\circ(w\circ in_i) = v$

وبالتالي يوجد تشاكل

$v_i = w\circ in_i : M_i \to N_1$

من أجله يكون

$f\circ v_i = v$

$\Leftarrow$] الاتجاه الثاني

نفرض أن M_i إسقاطي عندها ليكن لدينا المخطط

$$\begin{tikzcd} & \oplus M_i \arrow[d, "u"] & \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

إن M_i إسقاطي إذاً لنأخذ المخطط

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[d, shift left, "in_i"] & \\ & \oplus M_i \arrow[u, shift left, "p_i"] \arrow[dl, "w"] \arrow[d, "u"] & \\ N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

إذا يوجد $u_i : M_i \to N_1$ حيث $f\circ u_i = u\circ in_i$

$i = 1, \dots, n$

لنأخذ العلاقة

$w : \oplus M_i \to N_1$

هي تشاكل $w(m_i) = \sum u_i(m_i)$

حيث $w = u_i \circ p_i^r$

ليتم المطلوب يجب أن يكون

$f\circ w = u$

$f\circ w = f\circ(u_i\circ p_i^r)$

ولدينا

$f\circ u_i = u\circ in_i$

$\Rightarrow f\circ w = (f\circ u_i)\circ p_i^r$

$= (u\circ in_i)\circ p_i^r$

$= u\circ(in_i\circ p_i^r) = u$

---

2) $\oplus M_i$ أنتقي $\Longleftrightarrow$

M_i انتقي $\forall i = 1, \dots, n$

الاثبات: لنفرض أن $\oplus M_i$ انتقي لنأخذ مخطط التشاكلات المودولية:

$$\begin{tikzcd} & M_i & \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[u, "v"] \arrow[r, "f"'] & N_2 \end{tikzcd}$$

لنبرهن على وجود التشاكلات المودولية

$w' : N_2 \to M_i$

من أجلها يكون:

$$w'\circ f = v$$

لنتأمل المخطط

$$\begin{tikzcd} & \oplus M_i \arrow[d, shift right, "p_i^r"'] & \\ & M_i \arrow[u, shift right, "in_i"'] & \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[u, "v"] \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[uul, "w"'] \end{tikzcd}$$

بما أن $\oplus M_i$ مودول انتقي فيوجد تشاكل مودولي

$W : N_2 \to \oplus M_i$

من أجله يكون

$$W\circ f = in_i \circ v$$

وبالتالي يكون

$$p_i^r\circ(W\circ f) = p_i^r\circ(in_i\circ v)$$

ومنه نجد:

$$(p_i^r\circ W)\circ f = v$$

وبالتالي يوجد تشاكل
مودولي

$w' = P_i^r o w : N_2 \to M_i$

من أجله يكون

$v_i o g = f_i$

وهذا يثبت أن المودول

M_i أغمي $\forall i = 1, ..., n$

⟸ الاتجاه الثاني

لنأخذ المخطط

$$\begin{tikzcd} & \oplus M_i & \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f"'] & N_2 \arrow[ul, "w"'] \end{tikzcd}$$

لدينا M_i أغمي ولنبرهن
على وجود تشاكل مودولي

$w : N_2 \to \oplus M_i$

حيث $w o f = u$

لنأخذ المخطط

$$\begin{tikzcd} & M_i & \\ & \oplus M_i \arrow[u, "pr_i"] & \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[ul, "w"'] \arrow[uul, "u_i"'] \end{tikzcd}$$

لدينا M_i أغمي إذا يوجد u_i تشاكل

$u_i : N_2 \to M_i$

حيث $* \; u_i o f = p_i^r o u$

لنأخذ العلاقة

$w : N_2 \to \oplus M_i$

$w(\alpha) = (u_1(\alpha), ..., u_n(\alpha))$

$\alpha \to (u_1(\alpha), u_2(\alpha) - u_n(\alpha)) \; \forall i = 1, ..., n$

إذا w تشاكل وضعية

كذلك $w o f = u$

وذلك لأن مهما يكن $B \in N_1$

فإن

$w o f(B) = w(f(B))$

(حسب قاعدة الربط) $= (u_1(f(B)), u_2(f(B)), ..., u_n(f(B)))$

$= u_1(f(B)) + u_2(f(B)) + ... + u_n(f(B))$

حسب *

$= p_1^r o u(B) + ... + p_n^r o u(B)$

$= (P_1^r(u(B)), ..., P_n^r(u(B)))$

$\Rightarrow P_1^r(u(B)) = u(B)$

المركبة الأولى لـ $u(B)$

$P_n^r(u(B)) = u(B)$

المركبة n لـ $u(B)$