1- **التوزيع البرنولي**: نسمي كل تجربة لها نتيجتان تجربة برنولية

مثال: إلقاء قطعة نقود متوازنة هي تجربة برنولية.

أ- **دالة الكثافة الاحتمالية**

$f_X(x) = p^x . q^{1-x} \quad ; x \in \{0,1\}$

حيث $0<p<1$ & $q = 1-p$

ب- **الدالة المولدة للعزوم**:

$M_X(t) = q + p.e^t$

جـ- **التوقع**:

$E(X) = p$

د- **التباين**: $Var(X) = p.q$

2- **التوزيع الحداني (الثنائي)**:

يستخدم عندما نكرر التجربة البرنولية وسيطها n, p مرة حيث $n \geq 2$ وكانت هذه التكرارات مستقلة عن بعضها

أ- **دالة الكثافة الاحتمالية**:

$f_X(x) = P(X=x) = C^n_x . p^x . q^{n-x}$

حيث:

$q=1-p \quad , \quad 0<p<1 \quad , \quad x=0,\dots n$

ب- **الدالة المولدة للعزوم**:

$M_X(t) = (p.e^t + q)^n$

جـ- **التوقع والتباين**:

$E(X) = n.p$

$Var(X) = n.p.q$

3- **التوزيع البواسوني**:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع البواسوني فإن X يمثل عدد الأحداث الملحوظة خلال وحدة قياس معينة زمناً أو مسافة أو مساحة أو حجماً.

أ- **دالة الكثافة الاحتمالية**

$f_X(x) = e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!} \quad ; x = 0,1,\dots$

مشاهير وأعلام

ب- الدالة المولدة:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

ج- التوقع الرياضي:

$$E(X) = \lambda$$

د- التباين:

$$Var(X) = \lambda$$

4- التوزيع المنتظم المتقطع:

(الجدول)

أ- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f_X(x) = \frac{1}{n} \quad ; \quad x = x_1, \dots, x_n$$

ب- التوقع:

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{X} \quad \text{(المتوسط الحسابي)}$$

ج- التباين:

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{n^2}$$

5- التوزيع المنتظم المستمر:

أ- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \ a \le x \le b \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ب- دالة توزيع المتجمع:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & ; \ t \le a \\ \frac{t-a}{b-a} & ; \ a < t < b \\ 1 & ; \ b \le t \end{cases}$$

ج- التوقع:

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

د- التباين:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

هـ- الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t) = \frac{(e^{tb} - e^{ta})}{t(b-a)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

حدث في مثل هذا اليوم

6- التوزيع الأسي:

أ- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ; x\geq 0\\ 0 & ; x<0\end{cases}$$

ب- دالة التوزيع التجميعي:

$$F_X(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & ; t>0\\ 0 & ; t\leq 0\end{cases}$$

جـ- التوقع:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

د- التباين:

$$Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

هـ- الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t} \quad ; t<\lambda$$

7- التوزيع الطبيعي (المستمر)

نقول عن المتغير العشوائي X المستمر بأنه يتبع التوزيع الطبيعي بالوسيطين (σ^2,μ) ونرمز له بـ $X\sim N(\sigma^2,\mu)$ إذا كانت له

أ- دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث:

$$-\infty<x<+\infty$$

$$-\infty<\mu<+\infty$$

$$0<\sigma<+\infty$$

ب- دالة التوزيع التجميعي:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

8- المتغير العشوائي المعياري:

إذا كان X متغيرا ما فإن المتغير المعياري له هو المتغير:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

حيث $E(X)=\mu$ ، $Var(X)=\sigma^2$

9- التوزيع الطبيعي المعياري:

نقول عن المتغير العشوائي Z أن له توزيعا طبيعيا معياريا

نرمز له ب $Z \sim N(0,1)$

إذا كانت له الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

حيث $-\infty < z < +\infty$

دالة التوزيع التجميعي:

$$\phi_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \quad \forall t \in R$$

علما أن $f(z) = f(-z)$

$$\phi_Z(-z) = 1 - \phi_Z(z)$$

10- مبرهنة النهاية المركزية:

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي جميعها لها التوزيع نفسه بتوقع μ وتباين σ^2 فإن:

تتبع تقريبا

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\mu}\right) \quad *$$

وللمعيار 3 * نضع:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

فيكون: $Z \approx N(0,1)$

ويكون التقريب جيد عندما $n \geq 30$

١١- إذا كان $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

حيث أن X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$

حيث

$Y \sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$

حيث a_1 و a_2 ثابتان حقيقيان

١٢- متراجحة ماركوف:

$$P(X \geq k) \leq \frac{E(x)}{k}$$

هنا في حال X موجبة

بينما في حال X سالبة:

$$P(|X| \geq k) \leq \frac{E|x|}{k}$$

تستخدم عندما يكون معطى المتوسط فقط

١٣- متراجحة تشيبشيف:

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

تستخدم عندما يكون معطى المتوسط والتباين معاً.

١٤- مجال الثقة لمتوسط متغير عشوائي طبيعي تباينه معلوم

إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X حيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
لدينا μ مجهول و تباينه σ^2 معلوم

فإن المجال:

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

هو مجال الثقة لمتوسط μ بثقة $100(1-\alpha)\%$

حيث $Z \sim N(0,1)$

يجب أن يكون $n \geq 30$

15- الخطأ الأعظمي المرتكب ε

$$\varepsilon = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right|$$

16- لتعيين حجم العينة حيث لا يتجاوز الخطأ المرتكب المقدار (ε) بثقة $(1-\alpha)100\%$:

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

17- في حالة كان σ^2 مجهولة من أجل $n \geq 30$

يكون تباين العينة S^2 مقدراً جيداً لـ σ^2، فيكون مجال الثقة لـ μ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$ هو

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

الخطأ الأعظمي:

$$\varepsilon = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right|$$

حجم العينة:

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot S}{\varepsilon} \right)^2$$

18- في حالة $n<30$ و σ مجهول

ثبات الاحصاء:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

ستيودنت

يكون مجال الثقة للمتوسط μ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

19- مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين عشوائيين طبيعيين تباينهما معلوم،

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ حيث μ_1 مجهول و σ_1^2 معلوم

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ حيث μ_2 مجهول و σ_2^2 معلوم

$$\Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 , \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وبالتالي فإن مجال الثقة $100(1-\alpha)\%$ للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ هو المجال:

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} ; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

حيث $n_1 \geq 30 , n_2 \geq 30$

وإذا كانت σ_1^2 , σ_2^2 مجهولين عندما يكون $n_1 \geq 30 , n_2 \geq 30$ فيمكن استبدالها بـ s_1^2 , s_2^2

20- مجال الثقة للنسبة الوسيطية p هو:

$$* \left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} ; \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right]$$

حيث $\hat{p} = \frac{Y}{n}$

Y يدل على عدد العناصر المحققة للصفة

* يمكن استبدال p , q بـ $\hat{p} , \hat{q}$

الخطأ الأعظمي:

$$e = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right|$$

حجم العينة:

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\varepsilon}\right)^2$$

21- مجال الثقة لفرق بين نسبتين مجتمعين : $P_1 - P_2$

يعطى مجال الثقة لـ $P_1 - P_2$ بمستوى الثقة $100(1-\alpha)\%$ بـ

$$\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \cdot \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \cdot \hat{q}_2}{n_2}}\right.$$

$$\left. ; (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \cdot \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \cdot \hat{q}_2}{n_2}}\right]$$

22 - مجال ثقة لتباين متغير عشوائي طبيعي وسيطاه مجهولان .

مجال الثقة لتباين المتغير العشوائي الطبيعي هو :

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot (n-1)} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

23- مجال الثقة للانحراف المعياري σ

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} ; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \cdot (n-1)}}\right]$$

لحل مجال الثقة :

1- ننظر إلى الـ n إذا كانت أكبر من 30 مستقلة عن خيارات السيودنت

2- ننظر لنص السؤال إذا كان يريد مجال الثقة لمتوسط أو مجال الثقة لـ μ

نضع $\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \ldots\right]$

3- إذا كان لدي نوعين وطلب مني ايجاد ثقة الفرق بين متوسطين

أو مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$

نضع $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$

4- إيجاد مجال ثقة لصفة معينة

نضع $\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \,,\, \ldots\right]$

حيث $s^2 = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2$

5- لإيجاد مجال ثقة لفرق صفتين

نضع: $\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1\cdot\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\cdot\hat{q}_2}{n_2}}\right.$

8- في حال $n < 30$

نستخدم

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\, \ldots\right]$$

6- طلب منا إيجاد مجال ثقة لتباين المجتمع

نضع $\left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \,,\, \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

24 تقريب التوزيع الحداني إلى توزيع طبيعي

في حال كان: $n.p \geq 5 \,,\, n.q \geq 5$

عندها $Y = \sum X_i \sim N(n.p \,,\, n.p.q)$

وعندها يكون:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\left(x_1 - \frac{1}{2} \leq Y \leq x_2 + \frac{1}{2}\right)$$

7- طلب منا ثقة للانحراف المعياري

نضع:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} \,,\, \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right]$$

حدث في مثل هذا اليوم

ماكتبش مهمين 25 و 26

25 - دالة الكثافة لـ كاي مربع

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \cdot \Gamma(\frac{v}{2})} \cdot x^{\frac{v}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

26 - دالة الكثافة لـ t - ستيودنت

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{2\pi}} \left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{v+}$$

27 - عزم العينة:

$$M_r = \frac{1}{n}\sum X_i^r$$

28 - عزم المتغير العشوائي:

$$m_r = E(X^r)$$

29 - طريقة العزوم في التقدير:

1 - ليكن X متغيراً عشوائياً يتبع توزيعاً ما

2 - وسطاء التوزيع $\theta_1, \dots, \theta_k$ مجهولة

3 - فإننا نكتب k معادلة على الشكل

$$m_r = M_r \;;\; r = 1, \dots, k$$

وبالحل المشترك نحصل على

$$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$$

30 - طريقة الإمكانية العظمى في التقدير:

1 - $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$

دالة الكثافة الاحتمالية

2 - $K(\theta) = \ln(L(\theta))$

3 - نشتق الدالة جزئياً بالنسبة لـ θ

أي يجب أن تكون $\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$

4 - نتحقق أن $\frac{\partial^2 K}{\partial \theta^2} < 0$

31 - المقدر المتحيز:

إذا كان $\hat{\theta}$ مقدراً للوسيط θ

فإننا ندعو $\hat{\theta}$ بالمقدر المتحيز

إذا حقق الشرط

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

كما أن $E(M_r) = m_r$

أي M_r مقدر متحيز لـ m_r

كما أن $E(\bar{X}) = \mu$

حيث $\bar{X}$ هو مقدر متحيز لـ μ

كما أن $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$

$$E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

الانحراف المعياري:

$\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$

نقصد بكلمة: القيمة المتوقعة
أو الإصابة المتوقعة أو ...
ب $E(X)$

إذا كان لـ X التوزيع الحداني
فإن القيمة الأكثر احتمالاً بين قيمة
هي العدد الصحيح الواقع داخل المجال

$[n.p - q \, , \, np + p]$

تقريب التوزيع الحداني إلى توزيع بواسون

يتم في حالة كانت قيم n كبيرة
p صغيرة

ويكون التقريب مقبولاً إذا حقق الشرط

$\lambda = n.p < 5$

على الأكثر:

$P(X \leq n)$

على الأقل:

$P(X \geq n) = 1 - P(X<n)$

العمر الوسطي هو المتوسط وهو التوقع

مبرهنة: إذا كانت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وكان
$Y = aX + b$ عندئذ

$Y \sim N(a\mu + b \, , \, a^2\sigma^2)$

ملاحظة

للاستفادة من الانتقال من دالة التوزيع الطبيعي إلى التوزيع المعياري

$$F_X(t) = P(X \le t)$$

$$= P(X - \mu \le t - \mu)$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z \sim N(0,1)} \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = P\left(Z \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \phi_z\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_X(t)}_{\sim N(\mu,\sigma^2)} = \phi\left(\underbrace{\frac{x-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)}\right)$$

في حال مثلاً نريد إيجاد x :

$$\phi\left(\frac{x-5}{2}\right) = 0.10 = \phi(Z_a)$$

وإذا 0.10 ليست موجودة ذاتها ولا يوجد ما يقاربها في الجدول فإننا نقوم بالإجراء

$$1 - 0.10 = 0.90$$

لتصبح

$$\phi(Z_a) = 0.90$$

نرى أيضاً أن 0.90 ليست في الجدول لكن توجد قيم تقاربها فنأخذ المتوسط الحسابي لأقرب قيمتين لها

$$\phi(1.28) < \phi(Z_a) < \phi(1.29)$$

$$\Rightarrow Z_a = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285$$

ومنه

$$\phi\left(\frac{x-5}{2}\right) = \phi(-1.285)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i , \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

نتحول عن المجال $[L_1, L_2]$ إنه مجال الثقة لـ θ بمستوى $100(1-\alpha)\%$ من الثقة إذا كان :

$$P(L_1 \le \theta \le L_2) = 1-\alpha$$

نستخدم متراجحة ماركوف وتشيبشيف عندما يكتب :

- ماذا يمكننا أن نقول عن احتمال.
- ماذا نقول عن احتمال.

دائماً قطعة النقود

$P = 0.5$

توزيع t ستودنت بدرجة حرية $(n-1)$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

توزيع كاي مربع بدرجة حرية $(n-1)$

$$\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

محاضرة 11

نستخدم توزيع كاي مربع عندما تكون المسألة كالتالي :

1- عندما يطلب منا إيجاد S^2 (تباين العي

2- عندما يطلب حساب الانحراف المعياري σ ثم نقوم بالتربيع لنظهر S^2

أي بالمختصر حين الاحتمال (أ) $P(S^2 > v$ أو $\le$

نستخدم توزيع ستودنت عندما تكون المسألة كالتالي :

1- إيجاد احتمال المتوسط لهذا

2- عندما يكون في نص السؤال :
"أخذت عينة عشوائية"