## التابع الأسي العقدي

حل المعادلة (هل يوجد $z$ فقط)

$$e^{z} = a$$

$$e^{x+iy} = |a|\, e^{i\,Arg\,a}$$

$$e^{x}\cdot e^{iy} = |a|\, e^{i\,Arg\,a}$$

$$\left.\begin{aligned} & e^{x} = |a| \Leftrightarrow x = \ln|a| \\ & y = Arg\,a + 2\pi k \ : k\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow z = \ln|a| + i(Arg\,a + 2\pi k) \ : k\in\mathbb{Z}$$

## التابع اللوغاريتمي

$$\log z = w$$

نحولها للشكل الأسي

حيث $z = e^{w}$ و $z = re^{i\theta}$

$$e^{u+iv} = re^{i\theta}$$

$$e^{u}\cdot e^{iv} = re^{i\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} & e^{u} = r \Leftrightarrow u = \ln r \\ & v = \theta + 2\pi k \ : k\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right\}$$

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2\pi k) \ : k\in\mathbb{Z}$$

* $l_k$ هي قيمة اللوغاريتم الموافق لـ $k$ (الوحيدة القيمة)

$$l_k = l_0 + 2\pi k i$$

$$l_k : \mathbb{C}^* \to R_k = \{-\pi + 2\pi k < Im\,w \le \pi + 2\pi k\}$$

حيث $w\in\mathbb{C}$

* $l_0$ نسميها القيمة الرئيسية للوغاريتم ونرمز لها بـ $Log(z)$

أي هي القيمة الرئيسية للوغاريتم الموافق لـ $k=0$

$$Log = l_0 : \mathbb{C}^* \to R_0 = \{-\pi < Im\,w \le \pi\}$$

* $e^{z}_{|R_k}$ (مقصور $e^{z}$ على أي شريط عرضه $2\pi$) $e^{z}_{|R_k} : R_k \to \mathbb{C}^*$

هو تقابل (أي غير دوري)

والتقابل العكسي له هو $l_k$ حيث $l_k : \mathbb{C}^* \to R_k$

**برهنة ١**: إن التوابع $l_k$ هي توابع غير مستمرة عند أي نقطة من $ox^-$

**الإثبات**: لدينا $l_k = l_0 + 2\pi k i$

نثبت أن $l_0$ غير مستمرة عند $\bar{x}o$ فينتج لدينا أن $l_k$ غير مستمر عند $ox^-$

أولاً: نأخذ نقطة من $ox^-$ ولتكن $z_0$ بحيث تكون صورتها

$$l_0(z_0) = \ln r_0 + i\pi$$

ثانياً: نأخذ نقطة أسفل $ox^-$ ولتكن $z_2$ بحيث تكون صورتها

$$\star \quad l_0(z_2) = \ln r_0 + i(-\pi+\varepsilon)$$

ثالثاً: نأخذ نقطة أعلى $ox^-$ ولتكن $z_1$ بحيث تكون صورتها

$$\star\star \quad l_0(z_1) = \ln r_0 + i(\pi-\varepsilon_1)$$

ثم نأخذ نهاية كل من ★ و ★★

$$\lim_{z_2 \to z_0} l_0(z_2) = \ln r_0 + i(-\pi) \neq l_0(z_0)$$

$$\lim_{z_1 \to z_0} l_0(z_1) = \ln r_0 + i\pi = l_0(z_0)$$

وبالتالي نجد: $\lim\limits_{z_1 \to z_0} l_0(z_1) \neq \lim\limits_{z_2 \to z_0} l_0(z_2)$

وبالتالي $l_0$ غير مستمر عند $ox^-$ ومنه $l_k$ غير مستمر

مبرهنة 2 : إن التوابع $l_{k|\mathbb{C}\setminus ox^-}$ جميعها توابع تحليلية على $\mathbb{C}\setminus ox^-$

(( $l_k = l_{k|\mathbb{C}\setminus ox^-}$ ))

ملاحظة: أثبت أن :

$$l_k'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus ox^-$$

الإثبات : لدينا خاصة تقول :

$$(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z_0))}$$

حيث $f^{-1}$ تابع عكسي لـ $f$

نعلم أن $l_k$ تابع معاكس لـ $e^z_{|R_k}$ وإن $e^z$ قابل

للاشتقاق على كل $\mathbb{C}$ وبالتالي هو قابل للاشتقاق على $R_k$

$$(e^z)' = e^z \neq 0 \quad \forall z \in R_k$$

ينتج أن حسب

$$l_k'(z) = \frac{1}{(e^z)'_{|l_k(z)}} = \frac{1}{e^{l_k(z)}} = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus ox^-$$

---

إن التابع $l_k$ توابع وحيدة القيمة ومعرفة على $\mathbb{C}^*$ بكاملها

ولكنها ليست مستمرة عند $ox^-$ وبالتالي هي غير قابلة للاشتقاق

عند $ox^-$ وغير تحليلي عند $ox^-$

(( ولجعله تحليلي نأخذ $l_{k|ox^-}$ ))

---

$$e^z_{|R} : R \to \mathbb{C}^* \qquad (e^z_{|R})^{-1} : \mathbb{C}^* \to R$$

تابع معاكس

وهو غير تحليلي على $\mathbb{C}^*$

لكن هو تحليلي على $\mathbb{C}\setminus D$ (أي دون الحافتين)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{iz} = \sum \frac{(iz)^n}{n!}$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 + \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 - \cos z_1 \cdot \sin z_2$$

إن نقاط التفرع لـ $\log(f)$

هي اصفار التابع ، أي حلول

المعادلة $f=0$

مثلاً : إن نقاط تفرع $\log(z^2+9)$

هي $+3i$ ، $-3i$

(والتي أمنع الاتصال من فرع إلى فرع

فأقوم بمنع الدوران حول النقطتين

$3i$ و $-3i$)

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}$$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$ (تابع فردي)

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$ (تابع زوجي)

$\sin z' = \cos z \quad , \quad \cos z' = \sin z$

$\cos(-z) = \cos z$ تابع زوجي $\cos z$

$\sin(-z) = -\sin z$ تابع فردي $\sin z$

## إيجاد الجزء الحقيقي والتخيلي لـ $\cos z$

$$\cos z = \cos(x + iy)$$

$$= \cos x \cdot \cos iy - \sin x \cdot \sin iy$$

$$= \cos x \cdot \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} - \sin x \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i}$$

$$= \cos x \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} - \sin x \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$$

$$= \cos x \cdot ch\, y - \sin x \cdot sh\, y$$

## التابع المثلثي العكسي

$$\cos z = a$$

لحلها نستخدم الدساتير التي تعطي الـ $\cos$ بدلالة التابع الأسي

$$\cos z = a \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = a$$

نضرب الطرفين بـ 2 ومن ثم نضرب بـ $e^{iz}$

ومنه:

$$(e^{iz})^2 + 1 - 2a e^{iz} = 0$$

ثم نستبدل كل $e^{iz}$ بـ $w$

$$w^2 - 2aw + 1 = 0$$

ثم نحلها بالـ $\Delta$

فيصبح لدي:

$$e^{iz} = w_2 \quad , \quad e^{iz} = w_1$$

ومن ثم نكمل حلها عن طريق التابع الأسي

$$e^{z} = |a| e^{i\,\mathrm{Arg}\,a}$$

$$ch\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

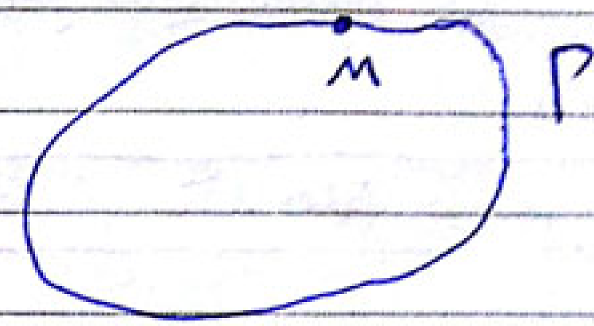
$$ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$sh\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Subject

# المنحنيات




إن النقطة $M$ تقع على $\Gamma$ إذا وفقط إذا وجد $t\in[a,b]$ حيث يكون $\gamma(t)=M$ وتدعى $t$ القيمة الوسيطية المقابلة لـ $M$

- $\gamma^{-1}(\{M\})=\{t_1,\dots,t_m\}$ الصورة العكسية

$m=1$ نسمي $M$ نقطة بسيطة

$m=2$ نسمي $M$ نقطة مضاعفة

---


$\Gamma$ يرسم $\gamma(t_1)$ قبل $\gamma(t_2)$ إذا كانت $t_1 < t_2$

## أشكال المنحنيات

$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$

$\gamma(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$

$\gamma$ يمثل منحنياً عقدياً موجهاً لـ $\Gamma$

لنرى ما هو هذا المنحني

1- أن $\gamma$ يمثل منحنياً عقدياً موجهاً لـ $\Gamma$ وذلك لأن $\gamma(t)$ مستمر على المجال $[0,2\pi]$ حيث $\cos t$ مستمر على كامل $\mathbb{R}$ فهو مستمر على أي مجال جزئي من $\mathbb{R}$ وكذلك الأمر بالنسبة لـ $\sin t$

2- نأخذ طويلة $e^{it}$ :

$\forall t\in[0,2\pi]:|\gamma(t)|=|e^{it}|$

$=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$

وهذا يعني أن $\gamma(t)$ تقع على دائرة الواحدة

3- نعوض قيم المجال في التابع $\gamma(t)$:

$\Gamma$ مغلق $\Leftarrow \begin{cases} \text{بداية } \gamma \quad \gamma(0)=e^{i0}=1 \\ \text{نهاية } \gamma \quad \gamma(2\pi)=e^{i2\pi}=1 \end{cases}$

4- $t$ هي زاوية لـ $\gamma(t)$

((ومنه عندما $t$ تمسح المجال من $0$ الى $2\pi$ فإن $\gamma(t)$ تمسح دائرة الواحدة مرة واحدة وبالاتجاه الموجب انطلاقاً من $z=1$ ))

ندعو $\gamma$ تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به لـ $\Gamma$

$\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$

$\gamma_1(t) = e^{i2\pi t}$

1_ $\gamma$ تابع مستمر على المجال $[0, 1]$

2_ $|e^{i2\pi t}| = 1$

3_ $\gamma_1(0) = \cos 2\pi(0) + i\sin 2\pi(0)$

$= 1 + 0 = 1$

$\gamma_1(1) = \cos 2\pi(1) + i\sin 2\pi(1)$

$= 1 + 0 = 1$

ومنه $\Gamma$ منحني مغلق

4_ زاوية $\gamma(t)$ هي $2\pi t$

ومنه عندما $t$ تمسح المجال من $0$ إلى $1$ فإن $\gamma_1(t)$ تمسح دائرة الواحدة مرة واحدة وبالاتجاه الموجب انطلاقاً من $z=1$ ))

وبالتالي $\gamma_1$ تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به لـ $\Gamma$ السابقة ((لأنه نفس المنحني))

$\gamma_2 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma_2(t) = e^{it}$

1- $\gamma$ تابع مستمر على المجال $[-\pi, \pi]$

2- $|e^{it}| = 1$

3) $\gamma_2(-\pi) = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$

$= -1$

$\gamma_2(\pi) = \cos\pi + i\sin\pi$

$= -1$

ومنه $\Gamma$ منحني مغلق

4- زاوية $\gamma(t)$ هي $t$

ومنه عندما $t$ تمسح المجال من $-\pi$ الى $\pi$ فإن $\gamma_2(t)$ تمسح دائرة الواحدة مرة

واحدة، وبالاتجاه الموجب لكن انطلاقاً من $-1$

وبالتالي $\gamma_2(t)$ لا تمثيل غير مسموحاً به لـ Γ لأنه ليس له نفس نقطة البداية .

---

$$\gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma_3(t) = e^{-it}$$

1- تابع مستمر

2- $|e^{-it}| = 1$

3- $\gamma_3(0) = \cos(-0) - i\sin(0) = 1$

$\gamma_3(2\pi) = \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 1$

Γ مغلق

4- زاويته هي $t$

ومنه عندما $t$ تمسح المجال $[0, 2\pi]$ فإن $\gamma_3(t)$ تمسح دائرة الواحدة مرة واحدة وبالاتجاه السالب انطلاقاً من $z=1$

---

$$\gamma_4 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma_4(t) = e^{it}$$

1- تابع مستمر

2- $|e^{it}| = 1$

3- $\gamma_3(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$

$\gamma_3(\pi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

Γ مفتوح

4- الزاوية هي $t$

ومنه عندما $t$ تمسح المجال $[0, \pi]$ فإن $\gamma_4(t)$ تمسح نصف دائرة الواحدة

---

$$\gamma_5 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma_5(t) = e^{it}$$

تمثل دائرة الواحدة الموجهة مرتين وبالاتجاه الموجب انطلاقاً من $z=1$

## المنحنى البسيط

1- المنحنى البسيط المفتوح: إذا لم يقطع المنحنى نفسه.

2- المنحنى البسيط المغلق: هو منحنى جميع نقاطه بسيطة باستثناء نقطة بدايته يجب أن تكون مضاعفة من المرتبة الثانية

$\Gamma$ بسيط مفتوح $\Longleftrightarrow$ لا متباين على المجال

المغلق

$\Gamma$ بسيط مغلق $\Longleftrightarrow$ لا متباين على المجال

النصف مفتوح

$\Gamma$ منحنى أملس إذا تحققت الشروط التالية:

1- لا مشتق مستمر على $[a,b]$

2) $\forall t\in[a,b]: \gamma'(t)\neq 0$

3) لا متباين على $[a,b]$ إذا كان $\Gamma$ مفتوح

لا متباين على $[a,b[$ و $\gamma(a)=\gamma(b)$ إذا كان $\Gamma$ مغلقاً.

مثال على ذلك: دائرة الواحدة الموجهة مرة واحدة بالاتجاه السالب أو الموجب هي منحنى أملس:

$\gamma(t)=e^{it}$ أو $\gamma(t)=e^{-it}$

$\forall t\in[0,2\pi]$

لأن: 1- لا مشتق هو $\gamma'(t)=-ie^{it}$ وهو مستمر على $[0,2\pi]$

2- $\forall t\in[0,2\pi]: |\gamma'(t)|=1\neq 0$

3- لا متباين على $]0,2\pi]$

$\gamma(0)=\gamma(2\pi)$

لأن دائرة الواحدة منحنى مغلق

دائرة الواحدة الموجهة أكثر من مرة ليست منحنى أملس لأن الشرط 3 غير محقق

(( التضاعف يؤدي إلى أنه غير متباين (دوري) ))

التمثيل للقطعة المستقيمة (والقطعة هي منحنى أملس)

$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + t z_2$$

حيث $0 \le t \le 1$ .

**$\Gamma$ أملس قطعياً:**

نقول أن $\Gamma$ أملس قطعياً إذا كان تابع عن متتالية مرتبة منتهية من المنحنيات الملساء ولتكن $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ نهاية كل منها هي بداية للمنحني الذي يليها ونكتب $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots$

((دائرة الواحدة الموجهة أكثر من مرة هي أملس قطعياً))

نرمز للاتجاه المعاكس للمنحني $\Gamma$ بـ إما $\bar{\gamma}$ أو $\gamma^-$ ويكتب بالشكل:

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$$

مثال: $\gamma(t) = e^{it}$ : $t \in [0, 2\pi]$

$$\bar{\gamma}(t) = e^{i(0+2\pi-t)}$$

مبرهنة: إذا كان $\Gamma$ منحني أملس و $\gamma$ تمثيلاً له فإن $\Gamma$ طريق وإن طوله يعطى بالمساواة التالية:

$$L(\Gamma) = L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

((عقدي))

ملاحظة مهمة: نقول عن تابع عقدي $f$ إنه تابع تحليلي على مجموعة مفتوحة $A$ إذا كان $f$ قابل للاشتقاق على $A$

لاثبات انه قابل للاشتقاق:

1- $u$ و $v$ قابلان للاشتقاق التام على $A$

2- $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

مبرهنة: إذا كان $f$ مستمراً على طريق $\Gamma$ فإن $f$ تكامل على $\Gamma$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ نحن اختيار

وإذا كان $\Gamma$ أملس وممثله بـ $\gamma$ فإن $f$ تكامل على $\Gamma$ وإن:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

كل أملس هو أملس قطعياً
وكل أملس قطعياً يكون طريق

أي تابع مستمر على مجال مغلق يكون محدود على المجال المغلق
مثلاً: كل من $\gamma'(t)$ و $f(\gamma(t))$ محدودان على المجال $[a,b]$
لأن كل منها مستمر على $[a,b]$

**مبرهنة:** إذا كان لدي تابع مستمر قطعياً على المنحني وكان المنحني أملس قطعياً فإن التكامل يعطى:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

**مثال لفهم تلك التعاريف والمبرهنات**

إن $f(z)=\frac{1}{z}$ محدود على دائرة الواحدة الموجهة مرة واحدة بالاتجاه الموجب

وذلك لأن: $f$ مستمر على $\mathbb{C}^*$ و $\mathbb{C}^*$ تحوي $C^+(0,1)$
و $C^+$ منحني أملس وله التمثيل $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ وبالتالي حسب المبرهنة السابقة $f$ محدود

**ولحساب تكامله نكتب القانون:**

$$\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = \int_a^b \frac{1}{\gamma(t)}\cdot\gamma'(t)\,dt$$

وإن التمثيل لـ $C^+(0,1)$ هو $\gamma(t)=e^{it}$ حيث $t\in[0,2\pi]$

ومنه

$$\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\cdot i e^{it}\,dt = i\,2\pi$$

أي منحني مغلق مركزه الصفر أي يحيط بالمبدأ فتكامله سيكون $2\pi i$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\mp1}\right|$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Subject / /

**مبرهنة:** إذا كان $f$ محدوداً على منحنى $\Gamma$

$$\exists M>0 \ , \ \forall z\in\Gamma : |f(z)|\leq M$$

فإن: $\left|\int_\Gamma f\right| \leq M\,\ell(\Gamma)$

**تطبيق عليه:**

أثبت أن

$$\left|\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz\right| \leq \frac{4\pi e^2}{3}$$

أول شي: نأثبت أن التابع مستمر على الدائرة $C^+(0,2)$

ثانياً: نثبت أن $z$ تنتمي للدائرة وبما أنه ينتمي للدائرة فإن الجزء الحقيقي سيكون بين $2$ و $-2$

ومنه $|e^z| = e^{Re z} \leq e^2$

هذا بالنسبة للبسط

أما بالنسبة للمقام

$$|z^2+1| \leq |z|^2+1$$

وبما أنه في المقام:

$$|z^2+1| \geq \left||z|^2-1\right|$$

$$|z|=2$$

نعوض

$$|z^2+1| \geq |4-1| = 3$$

$$\frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{e^z}{z^2+1}\right| = \frac{|e^z|}{|z^2+1|} \leq \frac{e^2}{3} = M$$

وبالتالي حسب المبرهنة السابقة يكون

$$\left|\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}\right| \leq M\,\ell(\Gamma)$$

حيث طول الدائرة هي المحيط وهو $2\pi r$

$$\leq \frac{e^2}{3}(4\pi)$$

وهو المطلوب

في حال طلب مني احسب $\int_\Gamma c\,dz$ حيث $c$ ثابت عقدي و $\Gamma$ طريق

أولاً: أن هذا التابع محول على $\Gamma$ لأن $c$ ثابت وهو مستمر على $\Gamma$ و $\Gamma$ طريق

Subject

هنا لا نتقي استخدام التمثيل لأنه لدي طريق لا أعرف صفاته فأستخدم القانون الذي ينص

لكن: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ تمثيلاً وسيطياً لـ $\Gamma$

و $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ هي تجزئة لـ $[a,b]$

و

$\sigma = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$

هي مجموعة نقاط $[a,b]$ تحقق: $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

ومنه المجموع:

$$S(P, \sigma, f, \gamma) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\gamma(t_n))}_{C} \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

ومنه

$$S(P, \sigma, f, \gamma) = C(\gamma(t_n) - \gamma(t_0))$$

ومنه

$$|S(P, \sigma, f, \gamma) - C(\gamma(t_n) - \gamma(t_0))| = 0$$

وكما نعلم إذا كان $f$ قابل للمكاملة فإننا نقول أن $f$ قابل للمكاملة (محول) على $\Gamma$ ونكتب:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

ومنه

$$\int_\Gamma C\,dz = \int_\gamma C\,dz = C(z_t - z_i)$$

التكامل مستقل عن الطريق المسلوك

نهاية الطريق ، بداية الطريق

$$\int z\,dz = \frac{z_t^2}{2} - \frac{z_I^2}{2}$$

وجود تكاملين غير متساويين على طريقين مختلفين فهذا يعني عدم الاستقلالية عن الطريق

مبرهنة: صحتها جعل التكامل مستقل عن الطريق المسلوك سواء كان الطريق أملس أو أملس قطعياً

تنص: إذا كان $f$ مستمراً على منطقة $G$ (مترابطة ومفتوحة)

وكان $\Gamma$ طريق على هذه المنطقة $G$

وكان لـ $f$ تابع أصلي $F$ على $G$ أي

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$$

فإن:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F(z_t) - F(z_I)$$

نهاية ، بداية

Alphabet NOTEBOOK

فهنا إذا تغير الطريق لا تتأثر قيمة التكامل نقط تتأثر بالبداية والنهاية

إن الاستمرار لتابع عقدي على منطقة لا يكفي لوجود تابع أصلي على تلك المنطقة

**مثال كلية:** $f(z) = |z|^2$

إن $|z|^2 = x^2+y^2$

$f(z)$ تابع عقدي مستمر على $\mathbb{C}$

حيث $u = x^2+y^2$ و $v = 0$

مستمر لأن كل من جزئيه كثيرا حدود فهما مستمران على $\mathbb{R}^2$ وبالتالي مستمر على $\mathbb{C}$

نفرض جدلاً أن لـ $f$ تابع أصلي $F$

$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$U_x - iU_y = x^2+y^2$

$U_x = x^2+y^2 \ , \ U_y = 0 \Rightarrow$ تابع $U(x,y)$ لـ $x$ فقط ومشتقة بالنسبة لـ $x$ سيكون تابع لـ $x$

وهذا يناقض الفرض كون $U_x = x^2+y^2$

وهذا يعني: لا يوجد لـ $f(z)$ تابع أصلي على $\mathbb{C}$ ولا على أي منطقة جزئية منها

**نتيجة:** إذا كان $f$ مستمراً على منطقة $G$ وكان لـ $f$ تابع أصلي على $G$

**فإن:** $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

(( $\Gamma$ يجب أن تكون طريقاً مغلقاً ))

**مثال لتطبيق النتيجة:** احسب $\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz$ حيث $\Gamma$ أي طريق مغلق لا يحوي بداخله الصفر ولا يمر من الصفر.

**الحل:** $f$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$ فهو مستمر عليها لكن لا يمكن إيجاد تابع أصلي له على $\mathbb{C}^*$ لأننا كما نعلم

$\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$

وإنه $C^+(0,1) \subset \mathbb{C}^*$

وبالتالي يجب أن أحصل على فرع تحليلي قابل للاشتقاق يمنع الدوران حول المبدأ (نقطة التفرع)

ومنه الحل: بما أن المنحني $\Gamma$ لا يحيط بالمبدأ ولا يمر منه فنستطيع إيجاد فرع للتابع اللوغاريتمي تكون تحليلية على $\mathbb{C} \setminus G$

التابع الأصلي لـ $\frac{1}{z}$ هو $Log\,z$ / لذلك سندرس الفروع التحليلية للتابع اللوغاريتمي /

Subject

حيث $G'$ هي منحنٍ ينطلق من المبدأ ويذهب باتجاه اللانهاية

ومنه يكون $f(z)$ مستمر على $\mathbb{C}\setminus G'$

كما أن أي فرع تحليلي للتابع اللوغاريتمي على $\mathbb{C}\setminus G'$ يكون تابع أصلي لـ $f$

و $\Gamma$ طريق مغلق في $\mathbb{C}\setminus G'$

**مثال:** عين منطقة التفرع للتابع

$$g(z) = \log(z^2+4)$$

ثم أوجد منطقة تحليلية التابع

$$f(z) = Log(z^2+4)$$

**الحل:** نقاط تفرع التابع $g$ هي أصفار التابع $h(z)$

$$h(z) = z^2+4$$

$$z^2+4=0 \Rightarrow z^2=-4$$

$$\boxed{z = \mp 2i}$$

إن $f$ تركيب لتابعين

**التابع الأول:** $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

((حيث $h$ يقرن كل $z$ بـ $z^2+4$))

**التابع الثاني:** $Log: \mathbb{C}\setminus 0x^- \to$ (الشريط الأفقي الذي عرضه $2\pi i$ دون حافتيه)

ومنه $f = Log \circ h$

إن الشرط العام للتركيب هو أن يكون مستقر $h$ محتوى في منطلق $Log$

لكن مستقر $h$ هو $\mathbb{C}$

ومنطلق $Log$ هو $\mathbb{C}\setminus 0x^-$

فلا يمكن أن يكون $\mathbb{C}$ $\mathbb{C} \not\subset \mathbb{C}\setminus 0x^-$

ولجعل $\mathbb{C}$ محتوى في $\mathbb{C}\setminus 0x^-$ نقوم

**بالإجراء التالي:**

لنرى متى يكون $h(z)$ ينتمي إلى $0x^-$

لكي نستطيع أن نزيلها لتحقيق الشرط العام للتركيب.

$$h(z) = z^2+4 \in 0x^-$$

حيث $z = x+iy$

$$\Leftrightarrow h(z) = x^2-y^2+4+2xyi$$

بما أن $h(z) \in 0x^-$ فالجزء التخيلي معدوم

ومنه $2xy = 0$

أي إما $x=0$ أو $y=0$

في حال $y=0$

ومنه نحصل في $h(z) \Leftarrow x^2+4\le 0$

وهذا مستحيل لأي عدد موجب.

في حال $x=0$.

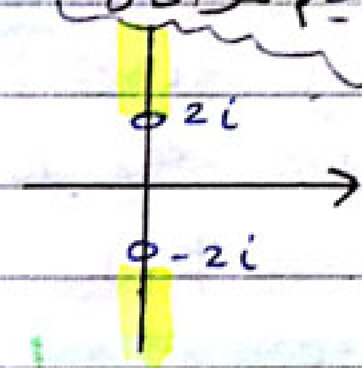
فإن $-y^2+4\le 0$

$\Rightarrow y^2\ge 4 \Rightarrow |y|\ge 2$

وبالتالي إما $\boxed{y\le -2 \text{ أو } y\ge 2}$ ★

حيث نرمز لـ ★ بـ D

أي D هي نصفي المستقيم الموضحان في الرسمة بالأصفر.




ومنه عندما $h(z)\in 0x$

فإن

$z=iy : |y|\ge 2$

أي $z\in D$

وبالتالي نجد

أن صورة $\mathbb{C}\setminus D$ وفق التابع $h$

هو الذي يكون محتواة في $\mathbb{C}\setminus 0x$

بالنتيجة: $h$ تحليلي على $\mathbb{C}$ ومنه

فهو تحليلي على $G=\mathbb{C}\setminus D$

حيث $D=\{iy : |y|\ge 2\}$.

بما أن $h(G)\subseteq \mathbb{C}\setminus 0x$

وأيضاً Log تحليلي

على $\mathbb{C}\setminus 0x$ ومنه على $h(G)$

وبالتالي حسب المبرهنة:
إذا كان $g$ تحليلي على $A$
و $f$ تحليلي على $g(A)$
فإن التركيب تحليلي على $A$

وبالتالي $f(z)=Log(z^2+4)$

تحليلي على $G$ وهي منطقة

تحليلية التابع $f(z)$

والمشتق على هذه المنطقة:

$$f'(z)=\frac{(z^2+4)'}{z^2+4}=\frac{2z}{z^2+4}, \forall z\in G$$

نتيجة: إذا كان $f$ مستمر

على منطقة $G$ وله تابع أصلي $F$

على $G$ فإن التكامل لـ $f$

مستقل عن الطريق المسلوك $G$

ويعتمد فقط على بداية الطريق

ونهايته

**مبرهنة:** ليكن f تابعاً تحليلياً على المنطقة G و $\bar{D}(a,r) \subseteq G$

أي f تحليلي على $\bar{D}(a,r)$

عندئذ: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$

$\forall z \in D(a,r)$

حيث γ هي محيط الدائرة التي مركزها a ونصف قطرها r وممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب: $\gamma(s) = a + r e^{is}$

$0 \le s \le 2\pi$

نستفيد من هذه المبرهنة بأن نحسب التكاملات من الشكل:

$$\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)} \quad \star$$

حيث: 1- f تحليلي على محيط وداخل $\bar{D}(a,r)$

2- γ هو محيط القرص الممسوح مرة واحدة بالاتجاه الموجب

أهم شي أنو نجعل المقام (z - مركز الدائرة)

3- $z_0 \in \bar{D}(a,r) \Leftrightarrow |z_0 - a| < r$

**مثال:** احسب التكامل

$$\int_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz$$

**الحل:** 1- إن $|z-i|=1$ هي $C^+(i,1)$ هي دائرة مركزها i ونصف قطرها 1 ممسوحة مرة واحدة وبالاتجاه الموجب

وهذا الشرط الأول

2- إن $\frac{\sin z}{z^2+1}$ تابعاً تحليلياً على $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$

أقوم بجعله من الشكل ★

أي على شكل تابع تحليلي على محيط وداخل $\bar{D}(i,1)$ (في البسط) أما في المقام $z-z_0$ حيث $z_0 \in \bar{D}(i,1)$

نجد أن $i \in \bar{D}(i,1)$ نضع التي في المقام ونتبع:

$$\int_{C^+(i,1)} \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{z-i}\, dz$$

(لأجعل في المقام مركز الدائرة)

Subject

ومنه $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+i}$

هي تحليلية على $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$

وبالتالي $\bar{D}(i,1) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{-i\}$

وبالتالي $f$ تحليلية على $\bar{D}(i,1)$

وهذا الشرط الثاني

أما الشرط الثالث:

$i \in \bar{D}(i,1)$ وحسب المبرهنة:

$$\int_{C^+(i,1)} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz = 2\pi f(i)$$

$$= \pi \sin i$$

$$= \pi . \left( \frac{e^{i} - e^{-i}}{2i} \right) = i \pi \, sh 1$$

تعريف المتتالية المتقاربة بانتظام

نقول عن $\{f_n\}$ إنها متقاربة بانتظام

إلى تابع $f$ على $A$ $\left(f_n \xrightarrow{u} f \vee f = u-\lim f_n\right)$

إذا وفقط إذا تقاربت $M_n$ إلى الصفر

أي $M_n = \sup |f_n(z) - f(z)| \to 0$

تعريف السلسلة المتقاربة بانتظام

نقول عن السلسلة $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$

إنها متقاربة بانتظام ومجموعها $S$

إذا وفقط إذا كانت

$S_n \xrightarrow{u} S$

أي إذا $S_n$ متقاربة بانتظام إلى $S$ على $A$

حيث $S_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$

وهي متتالية المجاميع الجزئية

للسلسلة $\sum_{n=n_0} f_n$

مبرهنة: إذا كانت $\{f_n\}$

متتالية من التوابع العقدية المستمرة

على $A$ فإن النهاية المنتظمة $f$

لـ $\{f_n\}$ مستمرة على $A$

ويبقى الأمر بالنسبة للسلاسل

**مبرهنة:** لتكن لدينا $\{f_n\}$ متقاربة
بانتظام إلى $f$ ومستمرة
على طريق $P$
عندئذ:

$$\int_P f = \lim \int_P f_n$$

نهاية التابع $f_n$ ((التكامل النهاية = نهاية التكامل))

**الإثبات:** من خواص التكامل:

$$\left|\int_P f_n - \int_P f\right| = \left|\int_P (f_n - f)\right|$$

إن كل من $f_n$ و $f$ محدود
لأن $f_n$ مستمر ومنه $f$ مستمر
و $f_n - f$ مستمر على $P$ هو متراص
والاستمرار على متراص محدود

ومنه من خواص التكامل:

$$\forall z \in P : \left|\int f(z)\right| \le M . l(P)$$

وبالتالي:

$$\left|\int_P (f_n - f)\right| \le \sup|f_n(w) - f(w)| . l(P)$$

وجعلنا الـ sup لأن $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام
ومنه $\sup|f_n(w) - f(w)| \to 0$
ولدينا $l(P)$ محدود

وبالتالي جداء محدودة
بلانتاهية في الصغر هو يسعى
إلى الصفر.

ومنه واضحاً:

$$0 \le \left|\int_P (f_n - f)\right|$$

وبالتالي:

$$\left|\int_P f_n - \int_P f\right| \to 0$$

ومنه $\int_P f_n \to \int_P f$

أي: $\boxed{\int_P f = \lim \int_P f_n}$

**نتيجة **:** لتكن $\sum f_n$ متسلسلة
مستمرة على $P$ نرمز لمجموعها
المنتظم بـ $f \overset{u}{=} \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$

عندئذ: $\int_P \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_P f_n$

**مبرهنة فايرشتراس:** لتكن $\sum f_n$
معرفة على المجموعة $A$ ولتكن $\{M_n\}$ ذات حدود موجبة
تحقق $\forall n : |f_n(z)| \le M_n \quad \forall z \in A$
عندئذ: تقارب $\sum M_n \Leftarrow$ تقارب $\sum f_n$ بانتظام

Subject

## مبرهنة تايلور:

إذا كان $f$ تحليلياً على القرص $D(z_0,r)$ عندئذ فإن $f$ قابل للنشر وفق تايلور في $D(z_0,r)$

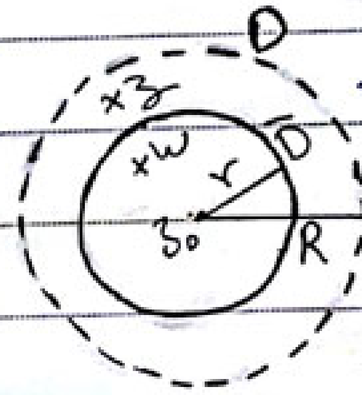
أي أن:

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n} \quad \forall z\in D(z_0,r)$$

$$\boxed{\text{حيث } a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} : \forall n\geq 0}$$

نرمز للسلسلة $f(z)$ بسلسلة تايلور

**الإثبات:**




ليكن $r$ موجباً كيفياً ويحقق:

$0<r<R$

وبالتالي:

$\bar{D}(z_0,r)\subseteq D(z_0,R)$

وبما أن $f$ تحليلي $D(z_0,R)$

وهو منطقة $D$ لأن القرص هو مجموعة مفتوحة ومحدبة فهي مترابطة وبالتالي هي منطقة

ومنه $f$ تحليلي على $\bar{D}(z_0,R)$

ومنه حسب مبرهنة سابقة

$$\star\ f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\forall z\in D(z_0,r)$

نهدف لجعله من شكل سلسلة تايلور

نأخذ

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{w-z_0}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}}_{\text{نجعله على شكل متسلسلة هندسية لأنه يحقق شروطها}}$$

حيث $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|}<\frac{r}{r}=1$

لأن $z\in D(z_0,r) \Leftarrow |z-z_0|<r$

$w\in C^+(z_0,r) \Leftarrow |w-z_0|=r$

ومنه:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}$$

نعوض في ★:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)} f(w)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

I) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+(z_0,r)} \sum \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \, dw$

نرمز لـ $f_n(w) = \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$

(( نبادل بين رمزي التكامل والمجموع

ولنستطيع أن نبادل يجب أن

أثبت أن $\sum f_n(w)$

$\boxed{\text{متقاربة بانتظام على } C^+(z_0,r)}$

أي حسب النتيجة ★★

- إن $f$ تحليلي على $D(z_0,R)$ فهو مستمر عليها. وبالتالي $f(w)$ مستمر على الطريق $C^+(z_0,r)$ المتراص

ونعلم أن مستمر على متراص محدود

ومنه $f$ محدود على $C^+(z_0,r)$

أي $|f(w)| \le M \quad \forall w \in C^+(0,r)$

نأخذ طويلة $f_n(w)$:

$$|f_n(w)| = \left| \frac{f(w) \cdot (z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \le \frac{M \cdot |z-z_0|^n}{r^{n+1}} = \frac{M}{r} \cdot \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n$$

~~نرمز بـ~~

لنطبق الآن برهنة فايرشتراس

لذا نريد أن نثبت أن $\sum M_n = \frac{M}{r} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n$ متقاربة. وذلك لكي يكون $\sum f_n(w)$ متقارب بانتظام.

إن $\sum M_n$ متسلسلة هندسية حدها الأول $\frac{M}{r}$ وأساسها $\frac{|z-z_0|}{r}$

وإن

$$\left| \frac{|z-z_0|}{r} \right| < \frac{r}{r} = 1$$

وبالتالي

$\sum M_n$ متقاربة وحسب فايرشتراس $\sum f_n(w)$ متقاربة بانتظام على $C^+(z_0,r)$

ومنه:

$$\int_{C^+(z_0,r)} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w) \, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C^+(0,r)} f_n(w) \, dw$$

ومنه تصبح المساواة (I):

$$f(z) = \sum \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \, dw$$

نخرج $(z-z_0)^n$ خارج التكامل لأنه ثابت بالنسبة لـ $w$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, dw}_{a_n} \cdot (z-z_0)^n$$

وبالتالي يكون: $f(z) = \sum_{n=0} a_n (z-z_0)^n$

$\forall z \in D(z_0, r)$

$r < R$

- لاثبات أن: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

إن f ممثلاً بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ على $D(z_0,r)$

ومنه حسب نتيجة تقول: إذا كان f تابعاً ممثلاً بمتسلسلة القوى فإنه يكون قابلاً للاشتقاق عدد غير منته من المرات على قرص تقاربه. وإن أمثال $a_n$ هي $\frac{f^{(n)}(\text{مركز})}{n!}$

وبالتالي يكون f قابلاً للاشتقاق عدد غير منته من المرات على $D(z_0,r)$ و $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

لاثبات أن $z \in D(z_0,R)$

لتكن $z \in D(z_0,R)$:

عندئذ: $|z-z_0| < R$

ويوجد r حيث:

$|z-z_0| < r < R$

$\Leftarrow z \in D(z_0,R)$

ومنه: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$\forall z \in D(z_0,R)$

---

**ملاحظة 1:** إذا كان f ممثلاً بمتسلسلة تايلور له في قرص مركزه $z_0$ (جوار مركزه $z_0$) فنقول: إن f قابل للنشر وفق تايلور في ذلك القرص. ونسمي أيضاً المتسلسلة بنشر تايلور لـ f في القرص.

**ملاحظة 2:** إذا كانت $z_0 = 0$ فإننا نسمي نشر تايلور لـ f في جوار الصفر أي $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z)^n$ أي نسميه نشر ماكلوران للتابع f

## نتائج من مبرهنة تايلور:

1- إن نصف قطر تقارب $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ هو أكبر أو يساوي نصف قطر القرص الذي ننشر فيه التابع f $(R)$

- وإذا كان f تحليلياً على المحوطة G و $z_0 \in G$ فإن f قابل للنشر وفق تايلور في أوسع قرص مركزه $z_0$ ومحتوى في G

مثال دليه: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

ومنه $f$ قابل للنشر وفق تايلور

في جوار الصفر في $D(0,1)$

أو قابل للنشر وفق ماكلوران

حيث: $G = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

وبما $0 \in G$

وأوسع قرص يكون $D(0,1)$

حيث الـ 1 هو بعد الـ $\pm i$ عن المبدأ

2- إذا كان $f$ تحليلياً عند $z_0$

فإن $f$ قابل للنشر وفق تايلور

في جوار $z_0$ أي (في قرص مركزه $z_0$)

مثال: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ هو تابع تحليلي عند الـ 2 مثلاً

((لأن الـ 2 لا تعدم المقام))

وبالتالي هو قابل للنشر وفق تايلور

في جوار الـ 2 ، ويكون النشر صحيح

عند اختيار أوسع قرص مركزه 2

ومحتوى في $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

ونصف قطرها هو البعد بين الـ 2

والـ $\pm i$ الذي هو $\sqrt{5}$

وبالتالي النشر صحيح في $D(2, \sqrt{5})$

3- إذا كان $f$ تحليلياً على المنطقة $G$

فإن $f$ قابل للاشتقاق عدد غير منته

من المرات على $G$

4- دستور مهم: (الصيغة كوشي المعممة)

$$\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{n}(z_0)$$

بينما صيغة كوشي البسيطة هي:

$$\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

5- إذا كان $f(z)$ تاماً تحليلياً ومحدوداً على $D(z_0,R)$ أي:

$\exists M : |f(z)| \le M \,, \forall z \in D(z_0,R)$

فإن: $\forall n \ge 0$:

$$|f^{n}(z_0)| \le \frac{M\, n!}{R^{n}}$$

الإثبات: نستخدم العلاقة:

$$\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{n}(z_0)$$

ومنه $f^{n}(z_0) = \int \frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

نأخذ الطويلة:

$$|f^{n}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\right|$$

ومنه حسب المبرهنة: بأن لدينا $f$ محدوداً على منحنٍ فإن

$$\left|\int_\Gamma f\right| \le M\, l(\Gamma)$$

وبالتالي:

$$|f^{n}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r$$

$$= \frac{n!\, M}{r^n} \quad \forall r<R$$

لكن هنا لدينا $r$ بل نريد $R$

لذا نأخذ نهاية طرفي المتراجحة

عندما: $r \to R$

ومنه:

$$|f^{n}(z_0)| \le \frac{M\cdot n!}{R^n}$$

انتهى البرهان

ومنه نستنتج أيضاً:

$$|a_n| \le \frac{M}{R^n}$$

وذلك لأن $\frac{|f^{n}(z_0)|}{n!} = a_n$

6- إذا كان $f$ تحليلياً ومحدوداً على $\mathbb{C}$ فإن $f$ ثابت على $\mathbb{C}$

الإثبات: $f$ تحليلي على $\mathbb{C}$

و $z_0 \in \mathbb{C}$

ومنه: $0 \le |a_n| \le \frac{M}{R^n}$

حيث $\forall R, n \ge 1$

نجعل $R \to \infty$ ومنه $R^n \to \infty$

وبالتالي $\forall n \ge 1: a_n = 0$

ومنه: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0$

ومنه $f$ ثابت على $\mathbb{C}$

مبرهنة: إذا كان $f$ تحليلي على $D(z_0,R)$ ولدينا $\Gamma$ طريق مغلق في القرص $D(z_0,R)$

فإن: $\int_\Gamma f = 0$

الإثبات: سنستخدم في الإثبات

★ مبرهنة سابقة تقول:

إذا كان $f$ مستمراً على منطقة $G$ وكان له تابع أصلي على $G$ و $\Gamma$ مغلقة فإن $\int_\Gamma f = 0$

Subject

(التوصيف الأولي التابع الأصلي)

إن $f$ تحليلي على $D(z_0,R)$

حسب تايلور

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\forall z \in D(z_0,R)$$

لنأخذ التابع : $F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$

هذا التابع يمثل سلسلة قوى

فهو قابل للاشتقاق على مجال تقاربه

وإن :

$$F'(z) = a_n (z-z_0)^n = f(z)$$

ومنه أن $F$ تابع أصلي لـ $f$ على $D(z_0,R)$

تم اثبات الشرط الأول للمبرهنة السابقة ★

وبما أن $f$ تحليلي على $D(z_0,R)$ فهو مستمر على $D(z_0,R)$ يحقق الشرط الثاني لـ ★

وجدنا $\Gamma$ مغلق وبالتالي حسب ★

$$\int_\Gamma f = 0$$

# النشور الشهيرة

هذه كلها ماكلوران

أي تايلور في جوار الصفر

1) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad : |z|<1$

في أغلب التمارين نحول الكسر بالشكل $\frac{1}{1-\text{مقدار}}$ أو $\frac{1}{1+\text{مقدار}}$

2) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad : |z|<1$

$\frac{1}{1+(z-z_0)},\ z_0=0 = \frac{1}{1+z}$

3) $(1+z)^m = 1+\sum \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} z^n$

$|z|<1$

4) $\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$

5) $\frac{1}{z-i} = -\sum \frac{z^n}{i^{n+1}}$

6) $\frac{1}{(z-i)^2} = -\left(\frac{1}{z-i}\right)' = -\left(-\sum \frac{z^n}{i^{n+1}}\right)'$

7) $\log(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot z^{n+1}}{n+1}$ $\boxed{\forall |z|<1}$

8) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}}$

9) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}}$

10) $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}$ $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}}$

توضيح لنشر :

$(1+z)^m=$

$= 1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\dots$

النشر صحيح عند $|z|<1$

## تشويه المنحنيات

★ إذا كان $\gamma_1$ و $\gamma_2$ منحنين مغلقين بسيطين ولها الاتجاه ذاته، أحدهما داخل الآخر وكانت $G$ منطقة تحوي $\gamma_1$ و $\gamma_2$ والمنطقة المحصورة بينهما. فإن : $\gamma_1$ سيكون مشوّه لـ $\gamma_2$ في $G$ أي $\gamma_1\sim\gamma_2$

★ إذا كانت $\gamma$ منحنٍ مغلقاً بسيطاً وكانت $G$ تحوي $\gamma$ وداخله، فإن : $\gamma\sim 0$ في $G$

(( كل المنحنيات المغلقة في $\mathbb{C}$ هي مشوّهه للصفر في $\mathbb{C}$ ))

(( كل المنحنيات المغلقة في $\mathbb{C}^*$ والتي لا تحيط بالصفر هي مشوّهه للصفر في $\mathbb{C}^*$ ))

★ إذا كان كل منحنٍ مغلق بسيط في $G$ مشوّه للصفر في $G$ فإن $G$ هي منطقة بسيطة الترابط

★ إذا كانت $G$ منطقة في $\mathbb{C}$ فإننا نقول عن $G$ إنها بسيطة الترابط إذا وفقط إذا $\mathbb{C}_\infty\setminus G$ مترابطة

Subject

## الشكل الأول لمبرهنة كوشي:

إذا كان $f$ تحليلياً على $G$

وكان $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في $G$

فإن:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

(( إذا كان $f$ تحليلياً على محيطي منحنيين $\boxed{\text{مغلقين}}$ بسيطين أحدهما داخل الآخر $\gamma_1 , \gamma_2$ ولهما الاتجاه ذاته. وتحليلي على المنطقة المحصورة بينهما فإن $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ ))

مثال عليه: احسب $\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$

حيث $\Gamma$ منحنى مغلق بسيط وموجه بالاتجاه الموجب ويحيط بالصفر

# هنا نقوم بإيجاد منحنى آخر حيث يكون $\Gamma$ و المنحنى مشوّهان لبعضهما.

لذا بما أن $0 \notin \Gamma$ للمبدأ فإن بعد المبدأ عن $\Gamma$ هو بعد موجب. وليكن $r$ ومنه يوجد $C^+(0,r)$ محتوى داخل $\Gamma$ وهي مغلقة وبسيطة ولها نفس اتجاه $\Gamma$

ومنه $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$

ومنه هو تحليلي على $\Gamma$ وعلى $C^+(0,r)$

وتحليلي على المنطقة المحصورة بينهما

حسب الشكل الأول لكوشي:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{C^+(0,r)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

## النفي للشكل الأول لكوشي:

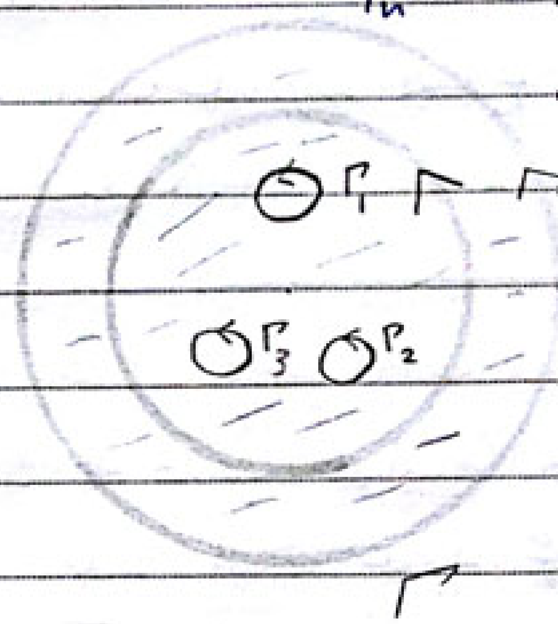
إذا كان $\int_{\gamma_1} f \neq \int_{\gamma_2} f$ فإن: $\gamma_1 \nsim \gamma_2$

((لكن أن لو كان $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ فليس من الضروري أن يكونا $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ))

## التعميم لشكل كوشي الأول

ليكن $\Gamma$ طريق مغلق وبسيط و $\Gamma_1 , \Gamma_2 , \dots , \Gamma_n$ طرقاً مغلقة وبسيطة ولكل منها اتجاه $\Gamma$ ذاته ومنفصلة مثنى مثنى وتقع في المنطقة الداخلية لـ $\Gamma$ فإذا كان $f$ تحليلي على منطقة $G$ و $G$ تحوي الطرق $\Gamma_1 , \dots , \Gamma_n$ وتحوي المنطقة الواقعة خارج $\Gamma_1 , \dots , \Gamma_n$ وداخل $\Gamma$

عندئذ: $\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f + \int_{\Gamma_n} f$




مثال: $\int_{C^+(0,2)} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)} dz$

هنا لدي مشاكل لذا لا أقوم بتطبيق الأسلوب بل أتبع أسلوب آخر: استخدم طريقة تعميم كوشي حيث نأخذ 3 دوائر:

1) $\Gamma_1$ دائرة مركزها $1$
2) $\Gamma_2$ دائرة مركزها $+i$
3) $\Gamma_3$ دائرة مركزها $-i$

((أخذت المراكز $i$ و $-i$ و $1$))

بحيث كل الدوائر 3 موجهة مرة واحدة بالاتجاه الموجب بحيث تكون هذه الدوائر غير متقاطعة.

عندئذ التكامل تحليلي على $\Gamma$ و $\Gamma_1$ و $\Gamma_2$ و $\Gamma_3$ وعلى المنطقة الواقعة ما بين $\Gamma_1$ و $\Gamma_2$ و $\Gamma_3$ وداخل $\Gamma$

نطبق تعميم كوشي:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{\frac{e^z}{(z^2+1)}}{\underbrace{z-1}_{\text{لأن مركز } \Gamma_1 \text{ هو } 1}} + \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{e^z}{(z+i)(z-1)}}{\underbrace{z-i}_{\text{لأن مركز } \Gamma_2 \text{ هو } i}} + \int_{\Gamma_3} \frac{\frac{e^z}{(z-1)(z-i)}}{\underbrace{z+i}_{\text{لأن مركز } \Gamma_3 \text{ هو } -i}}$$

حيث:

$$f_1(z) = \frac{e^z}{z^2+1}, \quad f_2(z) = \frac{e^z}{(z+i)(z-1)}$$

$$f_3(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z-i)}$$

وكل منهم تحليلي على محيط وداخل الطرق الثلاثة كاملاً علماً ومنه:

$$2\pi i f_1(1) + 2\pi i f_2(i) + 2\pi i f_3(-i)$$

تمرين: في حال كان المقام (طاقته) أكبر من الواحد ولا يكون فيه مركز للدائرة $C^+(0,2)$

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)^3} dz$$

الحل: إن التكامل $\frac{e^z}{(z-1)}$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

فهو تحليلي على $C^+(1,\frac{1}{2})$

وتحليلي على $C^+(0,2)$

وعلى المنطقة المحصورة بينهما

حسب الشكل الأول لكوشي:

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)^3} = \int_{C^+(1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\left(e^z\right)''\Big|_{z=1} = \pi i e$$

الشكل الثاني لمبرهنة كوشي:

إذا كان $f$ تحليلياً على $G$

وكان $\gamma \sim 0$ في $G$

فإن:

$$\int_\gamma f = 0$$

(( أي: إذا كان $f$ تحليلياً على محيط وداخل منحنٍ مغلق بسيط $\gamma$

فإن $\int_\gamma f = 0$ ))

مثال كلية:

$$\int_{C^+(0,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^3}$$

إن التابع المكامل تحليلي على

$\mathbb{C} \setminus \{1, \mp i\}$

فهو تحليلي على محيط وداخل الدائرة $C^+(0,\frac{1}{2})$

وهو منحنٍ مغلق

وبالتالي التكامل لهذا التابع

سيكون معدوماً

نتيجة من الشكل الثاني لمبرهنة كوشي:

إذا كان $f$ تحليلياً على منطقة بسيطة

الترابط فإن التكامل لـ $f$

على أي طريق مغلق في هذه المنطقة

سيكون معدوماً

النفي للشكل الثاني:

$f$ معرف على $G$ و $\gamma$ مغلق في $G$

فإن:

$\int_\gamma f \neq 0 \Longrightarrow$ إما $\gamma \not\sim 0$ في $G$

أو $f$ غير تحليلي على $G$

في حال كان السؤال:

إما أثبت أن المنحني غير مشوّه للصفر

في $G$

أو أثبت أن $G$ ليست منطقة

بسيطة الترابط

1- أوجد تابع تحليلي على $G$

2- تكامل التابع على ذلك المنحني غير معدوم

**مثال عليه:** أثبت أن $C^{+}(0,1)$ غير متقلص للصفر في $\mathbb{C}^{*}$

(( أو أثبت أن $\mathbb{C}^{*}$ ليست منطقة بسيطة الترابط ))

**الحل:** نأخذ $f(z)=\frac{1}{z}$ هو تحليلي على $\mathbb{C}^{*}$ وإن

$$\int_{C^{+}(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$$

حيث $C^{+}(0,1)$ مغلق في $\mathbb{C}^{*}$ ومنه حسب نفي الشكل الثاني لكوشي:

$C^{+}(0,1) \not\sim 0$ في $\mathbb{C}^{*} \Leftarrow \mathbb{C}^{*}$ ليست منطقة بسيطة الترابط.

**الشكل الثالث لمبرهنة كوشي**

إذا كان $f$ تحليلياً على منطقة $G$ وكان $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في $G$ بأطراف ثابتة (( أي $\gamma_1$ و $\gamma_2$ منحنيات مفتوحة لها نفس البداية ونفس النهاية )) عندئذٍ:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

**مبرهنة:** $f$ تحليلي على منطقة بسيطة الترابط عندئذٍ: لـ $f$ تابع أصلي على تلك المنطقة

**مثلاً:** إن التابع $f(z)=\frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{0x^{+}\}$ حيث $\mathbb{C}\setminus\{0x^{+}\}$ هي منطقة ((لأنها مترابطة ومفتوحة))

وهي بسيطة الترابط ((لأن أي منحنٍ مغلق فيها سيكون وداخله محتوى فيها أي أنه سيكون متقلص للصفر

وبالتالي لـ $f(z)$ تابع أصلي عليها وهو:

$$\ln(z) = \ln|z| + i\theta$$
$$0 < \theta < 2\pi$$

**صيغة كوشي التكاملية:**

إذا كان $f$ تحليلياً على $\Gamma$ وداخله حيث $\Gamma$ طريق مغلق بسيط موجه بالاتجاه الموجب و $z_0$ نقطة داخل $\Gamma$ فإن:

$$* \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) \\[2ex] \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{cases}$$

النص العام لصيغة كوشي التكاملية:
إذا كان f تحليلياً في منطقة
وكان P مشوه للصفر في تلك
المنطقة (بسيط وموجه بالاتجاه الموجب)
فإن عندئذ *

في حال كان المنحني ملتوٍ عدة
مرات نستخدم القانون:

$$\frac{2\pi i}{n!} \, n(P, z_0) \, f^{(n)}(z_0)$$

مثلاً في حال كان ملتوٍ 4 مرات:

$$\frac{2\pi i}{n!} \cdot 4 \cdot f^{(n)}(z_0)$$

وإذا بالاتجاه السالب تكون $-4$

## النقاط الشاذة للتابع عقدي

نقول عن نقطة $z_0$ إنها نقطة شاذة
لتابع f إذا لم يكن f تحليلياً عند $z_0$
وأن أي قرص مركزه $z_0$ يحوي
نقطة واحدة على الأقل يكون f
تحليلي عندها.

مثلاً: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ حيث $z_0 = \mp i$ نقطتان
شاذتان

النقطة الشاذة المعزولة: نقول عن
$z_0$ للتابع f إنها شاذة معزولة
إذا كان القرص الذي مركزه $z_0$
لا يحوي أي نقطة شاذة للتابع f
غير $z_0$

النقطة الشاذة الغير معزولة: نقول
عن $z_0$ للتابع f إنها شاذة غير معزولة
إذا كان القرص الذي مركزه $z_0$
يحوي نقطة شاذة أخرى غيرها
واحدة على الأقل

مثال عن الشاذة المعزولة وغير المعزولة:
مثلاً: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

كلاً من النقطتين $z = -i$ و $z = +i$
هي شاذة معزولة
لأن لو أخذنا $D(i, 1)$ هو جوار
لـ $i$
لا يحوي نقطة شاذة أخرى غير الـ $i$ للتابع f
أي لا يحوي الـ $-i$

مثال: التابع $\operatorname{Log} z$ هو تحليلي
على $\mathbb{C} \setminus Ox^-$ وبالتالي أي

وأي قرص مركزه $z_0$ سيحوي نقاط
التابع تحليلي عندها.

عدد حقيقي سالب هو نقطة
شاذة غير معزولة.
لأن لو أخذت جوار على نقطة مهما صغرت نصف القطر سيكون
في الجوار الكثير من النقاط الشاذة
للتابع $\operatorname{Log} z$

إذا كانت مجموعة من النقاط
الشاذة لتابع، مجموعة منتهية
فإن كل من هذه النقاط ستكون
شاذة معزولة
والعكس ليس صحيح بالضرورة

كما أن مجموعة النقاط الشاذة
لتابع كسري (حاصل قسمة كثيري حدود)
هي مجموعة منتهية ومنه
النقاط الشاذة للتابع معزولة

مثال: عن العكس أي إذا كان لدي
جميع النقاط معزولة فغير صحيح
بالضرورة أن تكون النقاط منتهية

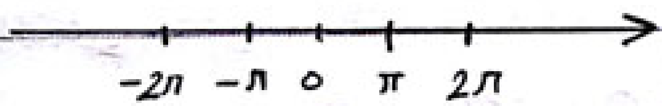
$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$z = \pi k \Leftarrow \sin z = 0$

ومنه النقاط الشاذة غير منتهية

$\{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$

رغم أنها جميع هذه النقاط شاذة معزولة




بين كل نقطة ونقطة مقدار $\pi$
وهذا يعني أن $D(z_k, \frac{\pi}{2})$ لا يحوي إلا
$z_k$

إن النقاط الشاذة لحاصل قسمة
تابعين: هي مجموعة النقاط الشاذة
للبسط اجتماع مجموعة النقاط الشاذة
للمقام اجتماع أصفار المقام

مثال: $f(z) = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

البسط هو 1 ليس له نقاط شاذة
المقام هو تركيب تحليلين: حيث
$\frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$ و $\sin z$ تحليلي على $\mathbb{C}$

ومنه التركيب تحليلي على $\mathbb{C}^*$
ومنه للمقام نقطة شاذة وحيدة هي $z=0$

أما أصفار المقام هي حلول المعادلة

$\sin\frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \pi k$

ومنه

$$\left\{z_k = \frac{1}{\pi k} \; ; \; k \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

وبالتالي مجموعة النقاط الشاذة لـ f

$$\left\{0 , z_k = \frac{1}{\pi k} : k \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

حيث $z_k$ نقاط شاذة معزولة

وهي تقترب إلى الصفر ولا تتوقف

أما $z=0$ هي شاذة غير معزولة

لأن أي قرص مركزه $z=0$ سيحوي

كل حدود المتتالية $z_k$ باستثناء

عدد منها

النقطة الشاذة الكاذبة له تعريفين:

1- نقول عن النقطة الشاذة المعزولة

$z_0$ للتابع f إنها شاذة كاذبة

أو قابلة للإزالة.

إذا وجد تابع g تحليلي على قرص

مركزه $z_0$ بحيث:

$$f(z) = g(z)$$

$$\forall z \in D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$$

أي $\forall z \in a_{nn}(z_0, 0, R)$

2- لتكن $z_0$ نقطة شاذة.

تكون $z_0$ شاذة كاذبة لـ f

إذا وفقط وإذا:

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$$

مثال: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

حيث $z=0$ شاذة معزولة.

$$\lim (z-0)\cdot\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \sin z$$

$$= 0$$

النقطة الشاذة الصادقة:

$z_0$ نقطة شاذة لـ f

تكون $z_0$ نقطة شاذة صادقة للتابع f

إذا وفقط إذا:

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) \neq 0$$

مثال: $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$

$z=0$ شاذة:

$$\lim (z-z_0)\cdot f(z) = \lim z \cdot \frac{\sin z}{z^2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1\neq 0.$$

ومنه $z=0$ شاذة صادقة للتابع $f$

النقطة الشاذة الصادقة نوعان:

**1- القطب**: نقول عن النقطة الشاذة الصادقة $z_0$ إنها قطب من المرتبة $m$ إذا كانت

$z_0$ صادقة للتابع $(z-z_0)^L f(z)$ ، $z_0$ حاذفة للتابع $(z-z_0)^m \cdot f(z)$

$L<m$

يكافئ

$\lim (z-z_0)^L \cdot f(z)\neq 0 \quad \forall L\leq m$ ، $\lim (z-z_0)^{m+1}\cdot f(z)=0$

إذا كانت $m=1$ نسمي $z_0$ قطباً بسيطاً لـ $f$.

إذا كانت $m\geq 2$ فنسمي $z_0$ قطباً مضاعفاً من المرتبة $m$

((أي نفاضل مشتق لحتى يساوي الصفر))

مثال: $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$

الحل: $z=0$ نقطة شاذة معزولة

$$\lim_{z\to 0}(z-z_0)^1\frac{\sin z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^2}$$

عند التعويض يصبح حالة عدم تعيين

لذا سنستخدم أوبيتال:

$$\lim\frac{\cos z}{2z}=\infty\neq 0$$

ومنه $z_0=0$ شاذة صادقة

لذا سنستخدم مرتبة أعلى (لحتى نريد أن تساوي الصفر)

$$\lim_{z\to 0}(z-z_0)^2\frac{\sin z}{z^3}=\lim_{z\to 0} z^2\cdot\frac{\sin z}{z^3}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1\neq 0$$

نستخدم مرتبة أعلى:

$$\lim_{z\to 0}(z-z_0)^3\frac{\sin z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\sin z=0$$

وبالتالي $z_0=0$ قطب لـ $f(z)$ وهو قطب من المرتبة الثانية:

$$m+1=3\Rightarrow m=2$$

## 2- الشاذة الأساسية

نقول عن النقطة الشاذة المعزولة $z_0$ إنها شاذة أساسية لـ $f$.

إذا كانت صادقة للتابع:

$(z-z_0)^L \cdot f(z) \quad \forall L$

$\Longleftrightarrow$ يكفي:

$\lim (z-z_0)^L \cdot f(z) \neq 0 \quad \forall L$

**مثال:** إن $z_0=0$ شاذة أساسية لـ $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

---

## أصفار تابع عقدي

نقول عن النقطة $z_0$ إنها صفر لتابع $f$ إذا وفقط إذا $f(z_0)=0$

## رتبة صفر التابع:

توجد طريقتين:

1- نقول عن $z_0$ صفراً للتابع $f$ إنها من المرتبة $m>1$ إذا تحقق:

$f(z)=(z-z_0)^m \cdot g(z_0) \quad : g(z_0)\neq 0$

2- ليكن $f$ تحليلي عند $z_0$ و $z_0$ صفراً لـ $f$

فيكون $z_0$ صفراً لـ $f$ من المرتبة $m$ إذا

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\dots=f^{(m-1)}(z_0)=0$$

و $f^{(m)}(z_0)\neq 0$

((منضل منشتق لحتى $\neq$ الصفر))

**مثال:** عين أصفار التابع $f(z)=z\sin z$ وبين مرتبة كل منها

الحل:

أصفار $f$ هي حلول المعادلة

$f(z_0)=0 \Rightarrow z\sin z=0$

$\Rightarrow \{\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$

أو هي $\{0, \pi k : k\in\mathbb{Z}^*\}$

$f'(z)=\sin z + z\cos z$

$f'(\pi k)=\sin\pi k+\pi k\cos\pi k$

$= 0+\pi k(-1)^k\neq 0$

جميع أصفار $\pi k$ بسيطة لـ $f$ أي من المرتبة الأولى

$f'(0)=0$

طالما المشتق ينعدم فأرفع مرتبة الاشتقاق

$f''(z)=\cos z+\cos z - z\sin z$

$f''(0)=2\neq 0$

$z=0$ من المرتبة الثانية

**خاصية مهمة:**

- إذا كانت $z_0$ صفراً من المرتبة $r$ لـ $f$
- وكانت $z_0$ صفراً من المرتبة $k$ لـ $g$

فإنها صفر من المرتبة $r+k$ لـ $g.f$

- وإنها صفر من المرتبة $r.L$ لـ $(f(z))^L$

**مثال:** $f(z)=z.\sin z$

أن $z=0$ هي صفر لـ $z$ من المرتبة الأولى لأن $f'(z)=1\neq 0$

$z=0$ هي صفر لـ $\sin z$ من المرتبة الأولى لأن $f'(\sin z)=\cos z|_{z=0}=1\neq 0$

وبالتالي: هي صفر لـ $z\sin z$ من المرتبة $1+1$ من المرتبة $2$

**مثال:** $(z-i)^5$

إن $z=i$ صفر لـ $(z-i)$ من المرتبة الأولى

وهي صفر من المرتبة $1\times 5$ لـ $(z-i)^5$

**تصنيف النقاط الشاذة لحاصل قسمة تابعين تحليليين:**

يجب أن يكونوا تحليليين على نفس المجموعة

ليكن $g$ و $h$ تابعين تحليليين على $G$

فإن النقاط الشاذة $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ للتابع $f$ في $G$

هي أصفار المقام $h(z)$

- ولتكن $z_0$ صفراً للمقام من المرتبة $r \geq 1$

وصفر للبسط من المرتبة $k$

فإن:

1- إذا كانت مرتبة البسط أكبر أو تساوي مرتبة المقام فإن $z_0$ شاذة كاذبة لـ $f$

2- إذا كانت مرتبة المقام أكبر من مرتبة البسط فإن: $z_0$ قطب من المرتبة

$$m = \underbrace{r}_{\text{مرتبة المقام}} - \underbrace{k}_{\text{مرتبة البسط}}$$

مثال: عيّن النقاط الشاذة للتابع

$$f(z) = \frac{z - i}{z^3 (z^2+1) \sin^4 z}$$

وبين نوع كل منها

الحل 1 - كل من البسط والمقام تحليلي على $G$ وهي $\mathbb{C}$

لأن: البسط كثير حدود

المقام جداء توابع تحليلية على $\mathbb{C}$

ومنه النقاط الشاذة للتابع هي أصفار المقام أي

$z^3 (z^2+1) \sin^4 z = 0$

وهي: $z_1 = -i \quad , z_2 = i$

$z_3 = 0 \quad , z_4 = \pi k \; : k \in \mathbb{Z}$

نأخذ $z_1 = -i$ هي صفر لـ $(z+i)$

نشتق: $2z$ في $(z^2+1)$

وعندما $z = -i$ $\quad -2i \neq 0$

وهي لا يعدم المشتق فهي صفر بسيط

نوعها: ليست صفر للبسط

وبالتالي المقام > البسط

فإن $1 - 0 = 1$ فهي من المرتبة الأولى هي قطب

---

$z = i$ هي صفر لـ $(z - i)$

نشتق $2z\big|_{z=i} = 2i \neq 0 \in (z^2+1)$

وبالتالي هي صفر بسيط

ونوعها: هي صفر للبسط من المرتبة الأولى ومنه: المقام = البسط

النقطة $z = i$ شاذة كاذبة لـ $f$

---

$z = \pi k$ : هي صفر من المرتبة الرابعة للمقام

نوعها: مرتبة المقام > مرتبة البسط

فهي قطب من المرتبة $4 - 0$

---

$z = 0$ هي صفر من المرتبة السابعة للمقام، وهو لا يعدم البسط

فهو قطب من المرتبة 7

Subject

**مبرهنة لوران:** إذا كان f تحليلي على الحلقة

$A = a_{nn}(z_0, R_1, R_2)$

فإن f قابل للنشر وفق لوران في الحلقة A أي أن:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

$\forall z\in A$

حيث: $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

$a_{nn}(z_0,R_1,R_2) = \{z\in\mathbb{C} : R_1<|z-z_0|<R_2\}$

إذا كان f تحليلي على القرص $D(z_0,R)$ فإن نشر لوران في الحلقة $a_{nn}(z_0,0,R)$ هو ذاته نشر تايلور لـ f في القرص $D(z_0,R)$

* أي إذا كان f تابعاً تحليلياً على حلقة وعلى القرص الداخلي المغلف للحلقة أي تحليلي على القرص الخارجي للحلقة رأساً هو مفتوح

فإن نشر لوران لذلك التابع في الحلقة هو نشر تايلور ذاته في القرص

**مثال:** $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ هو تحليلي على الحلقة $A=a_{nn}(0,0,\infty)=\mathbb{C}^*$

إن $\frac{1}{z}=z^{-1}$ منشور في الحلقة هو لا يتعدى $z^{-1}$

إن $\sin z$ ننشره في الحلقة A لكن الـ $\sin z$ تحليلي على $\mathbb{C}$ بكامله أي ليس فقط بالحلقة بل هو قابل للنشر عند الصفر وفي كل $\mathbb{C}$ ومنه حسب *:

فإن نشر لوران هو نشر تايلور

ومنه نشر وفق تايلور هو:

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots\right)$$

$$\forall z\in\mathbb{C}^*: f(z)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots$$

ومنه نكون حصلنا على مجموع متسلسلة وهو نشر لوران في الحلقة A وال $f(z)$ ليس له قوى سالبة

في حال قيل لنا أن ننشر ولم يحدد النشر: ننظر إلى $z_0$ فإذا كانت غير شاذة فالنشر هو تايلور بجوار $z_0$.

وإذا كانت شاذة فالنشر هو نشر لوران في $a_{nn}(z_0,0,R)$

Alphabet NOTEBOOK

مثال: $f(z)=\frac{1}{z+1}$

في الحلقة $|z|>1$ أي

$ann(0,1,\infty)=A$

f تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ فيمكن نشره في A وفق لوران في حال كتبت ...

فإن نشره يكون وفق النشر الشهير

$|z|<1$ : $\sum(-1)^n z^n$

لكن هنا لدينا $|z|>1$

لذا:

$$f(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$$

$$|z|>1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

وهنا نستخدم النشر الشهير:

$$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} \quad \forall z\in ann(0,1,\infty)$$

يسمى هذا النشر نشر f في جوار الـ $\infty$ (هو خارج أي حلقة مركزه 0)

في حال كان النشر لدينا الشاذ لـ $ann(0,\frac{1}{2},\infty)$ فلم يعد التابع تحليلي على الحلقة فنشر لوران غير محقق.

تصنيف النقاط الشاذة باستخدام نشر لوران في جوارها:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$=\underbrace{\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\dots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}}$$

الجزء الرئيسي لنشر لوران لـ f في جوار $z_0$

$$+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\dots+a_n(z-z_0)^n}$$

الجزء التحليلي (الصحيح) لنشر لوران لـ f في جوار $z_0$

(الدليل سالب هو جزء رئيسي
الدليل موجب هو جزء تحليلي)

يسمى $a_{-1}$ براسب التابع f عند $z_0$ يرمز له بـ $Res(f,z_0)$ وإن قانونه

$$Res(f,z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(z_0,r)}f(z)\,dz$$

$R_1<r<R_2$ داخلي ← $R_1$، خارجي ← $R_2$

نبدأ بالتصنيف:

1- إذا كان الجزء الرئيسي لنشر لوران لتابع $f$ بجوار نقطة شاذة $z_0$ غير موجود فإن النقطة $z_0$ هي نقطة شاذة كاذبة لـ $f$ وإن الراسب عندها معدوم

مثال: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

2- إذا كان الجزء الرئيسي لنشر لوران لتابع $f$ في جوار النقطة شاذة له يتكون من عدد منته من الحدود فإن $z_0$ قطب لـ $f$. ومرتبته هي القيمة المطلقة لأصغر أس موجود في النشر

مثال: $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$

النشر في جوار $z=0$

$$= \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \cdots}{z^5} = \underbrace{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!\,z^2}}_{\text{جزء رئيسي}} + \underbrace{\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \cdots}_{\text{تحليلي}}$$

بما أن الجزء:

لنبين نوع النقطة $z=0$

بما أن الجزء الرئيسي لنشر لوران لـ $f$ في جوار الصفر يتكون من عدد منته من الحدود فإن $z=0$ قطب وهو من المرتبة الرابعة لأن $z^{-4} = \frac{1}{z^4}$ وهو أصغر أس

حساب الراسب:

$$\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z^5}, 0\right) = 0$$

لأن أمثال الراسب $a_{-1}$ هي $\frac{1}{(z-z_0)}$ وهو ليس موجود في النشر

3- إذا كان الجزء الرئيسي لنشر لوران لتابع في جوار نقطة شاذة له يتكون من عدد غير منتهي من الحدود فإن النقطة الشاذة هي شاذة أساسية

مثال: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

النقطة الشاذة $z=0$

لنبين ما نوعها: نشر $e^u$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots \quad \forall u \in \mathbb{C}$$

Alphabet NOTEBOOK

Subject

وبالتالي :

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} ...$$

$\forall z \in \mathbb{C}^*$

القسم التحليلي مكون من حد واحد هو الواحد.

أما الرئيسي فله عدد غير منتهي

ومنه $z=0$ شاذة أساسية

والراسب عندها = الصفر

$$Res(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 1.$$

---

كل نقطة شاذة كاذبة يكون الراسب عندها معدوم والعكس غير صحيح

لبيان العكس :

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$$

إذن $z_0=0$ قطب من المرتبة الرابعة ليست كاذبة ثم ومع ذلك الراسب عندها معدوم

حساب التكامل :

$$\int_{c^+(0,2)} z^5 . e^{\frac{1}{z}} dz$$

الحل :

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+(z_0,r)} f(z) dz$$

حيث $R_1 < r < R_2$

من الامثلة : $Res(e^{\frac{1}{z}} . z^5, 0) = \frac{1}{720}$

ومنه بالتعويض :

$$\int_{c^+(0,2)} z^5 . e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{\pi i}{360}$$

---

دستور لحساب الراسب دون أن ننشر

نميز حالتين :

1- إذا كان $z_0$ قطباً بسيطاً لـ $f$ فإن :

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z-z_0)f(z) \neq 0$$

2- إذا كان $z_0$ قطب مضاعف من المرتبة $m$

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0}\left[(z-z_0)^m . f(z)\right]^{(m-1)}$$

الرواسب للتابع عند ∞ هو:

$$Res(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^{-}(z_0,r)} f(z)\,dz$$

أو:

$$Res(f,\infty) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{C^{+}(z_0,r)} f(z)\,dz$$

(حيث الدائرة يجب أن تكون محتواة في جوار الـ ∞)

«التابع تحليلي في جوار ∞ إذا وفقط إذا كانت هذه الدائرة تحوي بداخلها كل النقاط الشاذة للتابع $f$»

وعند استخدام النشر يكون الراسب للتابع عند ∞: هو سالب أمثال $\frac{1}{z-0}$

«النشر في جوار ∞ هو النشر في حلقة $ann(0,R_1,\infty)$»

علاقة تربط الراسب عند ∞ بالرواسب عند النقاط الشاذة الأخرى $z_0$

إذا كانت جميع النقاط الشاذة ما عدا ∞ لتابع معزولة فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k) + Res(f,\infty) = 0$$

في حال كان التابع كسريًا (حاصل قسمة كثيري حدود) فيكون الراسب للتابع مساوي الصفر أي $Res(f,\infty)=0$ فقط إذا كان: درجة المقام أكبر تمامًا بدرجة من درجة البسط أي درجة المقام ناقص درجة البسط أكبر تمامًا من الواحد.

مثال: انشر $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2)^2}$ في جوار الـ $i$

الحل: بما أن الـ $i$ نقطة شاذة لـ $f$ فالنشر وفق لوران أي النشر في الحلقة مركزها النقطة الشاذة $i$ ونصف قطرها الداخلي صفر

أما نصف قطرها الخارجي

فهو بعد النقطة الشاذة $i$

إلى أقرب نقطة شاذة أخرى

وهي الـ 2 :

$|z_1 - z_2| = |2 - i|$

$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{5}$

ومنه الحلقة هي $a_{nn}(i, 0, \sqrt{5})$

ولننشر: نتبع طريقتين:

إما تفريق الكسور

أو :

$f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{(z-2)^2}$

منشور فوراً في الحلقة

لأنها قوى لـ $z-i$

أي قوى لـ $\boxed{z - \text{النقطة أي الشاذة نفسها}}$

النشر الآن : $\frac{1}{(z-2)^2}$

ننشر الأول لـ $\frac{1}{z-2}$ والنشر

بعد نشر $\frac{1}{z-2}$ أقوم $\frac{1}{(z-2)^2}$

تشتق $-\frac{1}{z-2}$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-i)+(i-2)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{z-i}{i-2}} \cdot \frac{1}{i-2} \quad \checkmark \quad \frac{1}{1+\frac{i-2}{z-i}} \cdot \frac{1}{z-i}$$

لنرى من الذي طويلته أصغر من 1

$$\left|\frac{z-i}{i-2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\left|\frac{i-2}{z-i}\right| > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

لأن $|z-i| < \sqrt{5}$ و $\frac{1}{|z-i|} > \sqrt{5}$

ومنه

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{i-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-i)^n}{(i-2)^n}$$

ومنه:

$$\frac{1}{(z-2)^2} = -\left(\frac{1}{z-2}\right)'$$

عند الاشتقاق يصبح $\sum_{n=1}^{\infty}$

لنرى ما نوع $z = i$

أي أستنتج نوعها

# لو كتب أستنتج نوع $z = i$ فأقوم بالنشر فقط

نقوم بالنشر:

$$\frac{1}{(i-2)^2} \cdot \frac{1}{(z-i)} - \frac{2}{(i-2)}$$

فإن الجزء الرئيسي تكون
من عدد منتهٍ فإن $z=i$
قطب بسيط

(لأن أصغر أس موجب هو $-1$)

---

ليكن $f = \frac{1}{(z-i)(z-2)^2}$

انشره في الحلقة: $1<|z|<2$

إن التابع تحليلي في الحلقة $a_{nn}(0,1,2)$
لكن بنشره وفق لوران
ولا ننشره وفق تايلور
لأنه غير تحليلي في القرص الداخلي للحلقة.

---

للنشر أقوم بتفريق $(z-2)$
و $(z-i)$
لأن كلاهما لهما قوة لـ $z$

ملاحظة:
$$\frac{1}{z-i} = \begin{cases} \frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{i}} & \text{مرفوض} \\ \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z}} & \text{مقبول} \end{cases}$$

في لوران عند النشر ونحصل على
شكل شهير نختار الذي طويلة
أصغر من الواحد والآخر نرفضه
ضمنياً حيث أن تكون النقطة الشاذة عندنا $z$
بينما في النشر في تايلور فيجب
أن تكون على شكل المنشور
الشهيرة: 1 - أن يكون
النقطة الشاذة $z$
ننشر عندها
2 - أكتبه بالشكل الشهير
ومن ثم نشترط أن الطويلة
أصغر من الواحد

---

بالنسبة لـ $\frac{1}{z-2}$ أو $\frac{1}{(z-2)^2}$ هو
تحليلي في الحلقة وعلى محيط وداخل
القرص الداخلي وبالتالي نشر لوران
له هو نشر تايلور

---

النشر $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2)^2}$
في جوار الـ $\infty$
أي أنشر في جوار $\infty$ أي في حلقة
مركزها الصفر ونصف قطرها
الخارجي $\infty$

ونصف قطرها الداخلي :
وهي أبعد نقطة بين النقطة الشاذة والمبدأ وهي 2
وهي 2.
ثم انشر كما في السابق.

لتعيين الراسب : بما أنه تابع كسري (حاصل قسمة كثيري حدود) فاستعين بدرجة مقام والبسط

بما أن درجة المقام - درجة البسط = $3 > 1$ فإن الراسب
$Res(f,\infty)=0$.

وإذا لم يكن تابع كسري أقوم بالنشر واختار سالب أمثال $\frac{1}{z}$

مبرهنة الرواسب :

إذا كان $f$ تحليلياً على محيط وداخل منحنٍ مغلق $\Gamma$ باستثناء عدد منتهي من النقاط الشاذة داخل $\Gamma$ ولتكن $z_1, z_2, \ldots, z_n$

عندئذ :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k)$$

إذا كان $\Gamma$ ممسوح $\boxed{\text{عدة مرات}}$ نستخدم القانون :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} n(\Gamma,z_k)\, Res(f,z_k)$$

احسب التكامل :

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z+i}{(z^2+9)(z-1)^2}\,dz$$

1) حيث $\Gamma_1$ دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$

الحل : يوجد للتابع ثلاث نقاط شاذة
$z_1 = 1 \,,\ z_2 = -3i$
$z_3 = 3i$

التابع المكامل تحليلي على محيط وداخل $\Gamma_1$ إذاً حسب الشكل الثاني لكوشي هذا التكامل معدوم

2- $\Gamma_2 : |z|=2$

التابع المكامل تحليلي على محيط وداخل $\Gamma_2$ باستثناء النقطة

$\boxed{\text{حسب مبرهنة الرواسب}}$

$$\int_{|z|=2} \frac{z+i}{(z^2+9)(z-1)^2}\, dz = 2\pi i\, Res(f,1)$$

لحساب الراسب دون النشر يجب معرفة نوع $z=1$ هي صفر من الرتبة الثانية لمقام المكامل وهي لا تعدم البسط إذن قطب من الرتبة 2

حسب القانون:

$$2\pi i\left[\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{z+i}{(z^2+9)(z-1)^2}\right]'\right]$$

$$= 2\pi i\,\frac{10-2(1+i)}{100}$$

نعوض $z=1$

4- $\Gamma_4 : |z| = \frac{7}{2}$

$\Gamma_4$ تحوي النقاط الشاذة الثلاث

نستخدم أي حسب القانون للرواسب

$$\int_{\Gamma_4} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} Res(f, z_k) \; \star$$

لنا نستخدم قانون آخر لحسابه ★

لدينا

$$\sum_{k=1}^{3} Res(f, z_k) + Res(f,\infty) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3} Res(f, z_k) = -Res(f,\infty) = 0$$

ومنه $\int_{\Gamma_4} = 0$

ملاحظة تفيدنا في حال كان لدي ثلاث 3 نقاط شاذة خارج المنحني و 50 نقطة شاذة داخل المنحني فنقوم بإيجاد نوع النقاط الخارج المنحني وأحسب الرواسب عندهم من القانون

$$\underbrace{\sum Res\, f}_{\text{داخل المنحني}} + Res(\infty) + \underbrace{\sum Res\, f}_{\text{خارج المنحني}} = 0$$

مثال: احسب

$$\int_{C^+(0,3)} \frac{1}{(2z^2-2z+1)(z^5+32)^{100}}$$

لدي 7 نقاط شاذة

تعطيني $(2z^2-2z+1)$

$(z^5+32)^{100}$ 5 نقاط

نواجه مشكلة في تعيين النقاط وتعيين أنواعها.

لأن: موقع النقاط الشاذة ل $(z^5+32)$ هي $z_1$

و $z_2$ و $z_3$ ، $z_4$ ، $z_5$

بسيطة تحاكي القدري 1

كل منها قطب من المرتبة 100

لذا اعتمد على خاصية تقول:

الجذور من المرتبة m للعدد العقدي

هي تقع على محيط دائرة

نصف قطرها الجذر النوني

لطويلة z.

لتطبيق:

$z^5+32=0 \Leftrightarrow z^5=-32$

$\sqrt[5]{32}=2$

و 2 تقع داخل $C^+(0,3)$

وبالنسبة ل $2z^2-2z+1=0$

الجذر $\sqrt{\Delta}=2i$

$z_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \Rightarrow |z_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1<3$

$z_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \Rightarrow |z_2|<3$

بما أن الطويلة لكل من الجذرين

داخل $C^+(0,3)$

وبالتالي نطبق مبرهنة الرواسب:

وذلك لأن جميع النقاط الشاذة داخل المنحني

$$\int_{C^+(0,3)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k Res(z_k)$$

$$= -2\pi i \underbrace{Res(\infty)}_{=0}$$

إذا كانت $z_0$ صفراً بسيطاً للمقام

$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ ولا يعدم البسط للتابع

فإن الراسب f عند $z_0$:

$$Res(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

انتهى زينه البني