السؤال الأول:

عدد البيانات المعطاة $n = 5$

التابع المطلوب من الشكل: $y = bx^a$

نجري التحويل التالي:

$$y = bx^a \xrightarrow[\text{بأخذ لوغرتيم الطرفين}]{\hspace{6em}} \ln y = \ln b + a \cdot \ln x$$

بوضع: $Y = \ln y \ , X = \ln x \ , B = \ln b \ , A = a$

نجد: $Y = AX + B$

وهو تابع خطي من الدرجة الأولى نحصل على الثوابت بحل جملة

المعادلات المكتوبة بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} 1 & \sum_{i=1}^{5} X_i \\ \sum_{i=1}^{5} X_i & \sum_{i=1}^{5} X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} Y_i \\ \sum_{i=1}^{5} X_i \cdot Y_i \end{pmatrix}$$

أولاً نشكل الجدول:

$X = \ln x_i$	1.38629	1.43508	1.50407	1.54756	1.62924
$Y = \ln y_i$	4.63044	4.72897	4.86838	4.95617	5.12116

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7.50224 \\ 7.50224 & 11.29284 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.30512 \\ 36.54153 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ 5B + 7.50224A = 24.30512$$

$$7.50224B + 11.29284A = 36.54153$$

بحل جملة المعادلتين باستخدام الآلة الحاسبة وذلك عن طريق ضغط:

$$Mode \rightarrow\ 5 \rightarrow 1$$

ثم نقوم بتعبئة بالأرقام وذلك بإدخال رقم رقم وبين كل رقم ورقم نضغط يساوي وبعد انتهاء التعبئة نضغط يساوي أول مرة تنتج قيمة B ومرة ثانية فتنتج قيمة A.

وعليه فإن:

$$B = 1.83008\ \ , A = 2.02002$$

$$\Rightarrow A = a = 2.02002\,, B = \ln b \Rightarrow b = e^{B} = e^{1.83008}$$

$$= 6.23438$$

$$\Rightarrow y = 6.23438\, x^{2.02002}$$

لحساب الخطأ المرتكب من القانون:

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(y_i - b \cdot x_i^{a}\right)^2}$$

نشكل الجدول الآتي:

i	x_i	y_i	$f(x_i) = bx_i^a$	$(y_i - bx_i^a)^2$
1	4	102.56	102.55727	0.0000074
2	4.2	113.18	113.17989	0.000000012

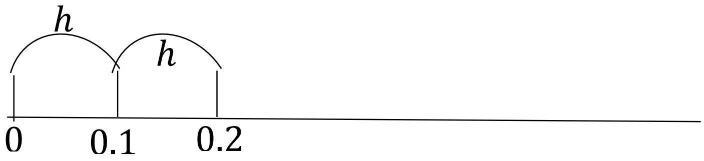
3	4.5	130.11	130.10548	0.0000204
4	4.7	142.05	142.05102	0.00000104
5	5.1	167.53	167.53254	0.0000064

ومنه بالحساب نجد أن:

$$E = 0.00593$$

السؤال الثاني:

لدينا $f(x,y) = \frac{x-y}{2}$ و $h = 0.1$ و $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$



أي: $x_1 = 0.1 \, , x_2 = 0.2$

والمطلوب إيجاد y_1, y_2

انطلاقاً من معادلة رالستون: $y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$

حيث: $k_1 = f(x_i \, , y_i)$ وَ $k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h \, , y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$

من أجل $i = 0$

$$\Longrightarrow y_1 = y_0 + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)(0.1) \ldots . (*)$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = \frac{0-1}{2} = -0.5$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{3}{4}(0.1), y_0 + \frac{3}{4}(k_1)(0.1)\right)$$

$$k_2 = f(0.075\,,0.9625) = \frac{0.075 - 0.9625}{2}$$
$$= -0.44375$$

نعوض في (*):

$$\Longrightarrow y_1 = 1 + \left(\frac{1}{3}(-0.5) + \frac{2}{3}(-0.44375)(0.1)\right)$$
$$\Longrightarrow y_1 = 0.95375$$
$$\Longrightarrow (x_1, y_1) = (0.1\,,0.95375)$$

من أجل $i = 1$

$$\Longrightarrow y_2 = y_1 + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)(0.1) \dots .(**)$$
$$k_1 = f(x_1, y_1) = \frac{0.1 - 0.95375}{2} = -0.42687$$
$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{3}{4}(0.1), y_1 + \frac{3}{4}(k_1)(0.1)\right)$$
$$k_2 = f(0.175\,,0.921734) = \frac{0.175 - 0.921734}{2}$$
$$= -0.37336$$

نعوض في (**):

$$\Longrightarrow y_1 = 0.95375$$
$$+ \left(\frac{1}{3}(-0.42687) + \frac{2}{3}(-0.37336)(0.1)\right)$$
$$\Longrightarrow y_1 = 0.91463$$
$$\Longrightarrow (x_2, y_2) = (0.2\,,0.91463)$$

السؤال الثالث:

نحسب الأن: $\rho(B_J)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix}$$

وعليه لحساب القيم الذاتية من المعادلة المميزة:

$$\det\left(B_J - \lambda I\right) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - \frac{1}{9} = 0 \Longrightarrow \lambda = \mp\frac{1}{3}$$

حسب تعريف طيف المصفوفة فهي أعظم قيمة ذاتية بالقيمة المطلقة وعليه

فإن:

$$\Longrightarrow \rho\left(B_J\right) = \frac{1}{3} < 1$$

إذاً طريقة جاكوبي متقاربة.

لحساب w_{Opt} نعوض في العلاقة:

$$w_{Opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\rho\left(B_J\right)\right)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{9}}} \approx 1.02944$$

بما أن جملة المعادلات متقاربة بطريقة جاكوبي فهي متقاربة بطريقة

$S.O.R$ أو يمكن التأكد من تقاربها عن طريق تحقق من الشرطين:

المصفوفة متناظرة: وهو شرط محقق

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

المصفوفة معرفة إيجابياً: وهو شرط محقق لإن:

$$\det(3) = 3 > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 1 = 8 > 0$$

للحل الآن أولاً نطبق طريقة غاوس–سيدل:

$$x^{k+1} = \frac{1}{3}(4 + y^k)$$

$$y^{k+1} = \frac{1}{3}(-4 + x^{k+1})$$

ندخل العنصر $w = 1.02$ ومنه:

$$x^{k+1} = (1 - w)x^k + \frac{w}{3}(4 + y^k)$$

$$y^{k+1} = (1 - w)y^k + \frac{w}{3}(-4 + x^{k+1})$$

انطلاقاً من $x^0 = y^0 = 0$ نجد أن من أجل $k = 0$:

$$x^1 = (1 - 1.02)(0) + \frac{1.02}{3}(4 + 0) = 1.36$$

$$y^1 = (1 - 1.02)(0) + \frac{1.02}{3}(-4 + 1.36) = -0.8976$$

ونجد أن من أجل $k = 1$:

$$x^2 = (1 - 1.02)(1.36) + \frac{1.02}{3}(4 - 0.8976)$$
$$= 1.02761$$

$$y^2 = (1 - 1.02)(-0.8976) + \frac{1.02}{3}(-4 + 1.02761)$$
$$= -0.99266$$

السؤال الرابع:

شروط مبرهنة بيكارد للوجود والوحدانية هي:

١) $|f(x\ ,y_0)| \leq k$ وذلك $\forall\ x \in [x_0, x_{final}]$ وَ $k > 0$

٢) $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$

٣) $h \geq \frac{k}{L}\left(e^{L(x_{final}-x_0)} - 1\right)$

الشرط الأول محقق أي أن تابع $f(x\ ,y_0)$ محدود ذلك لإن:

$$f(x\ ,y) = 1 + x\sin(xy) \Rightarrow |f(x\ ,y_0 = 0)|$$
$$= |1 + x\sin(0)| = 1 \leq 1$$

وعليه فإن $f(x, y_0)$ محدود.

الشرط الثاني محقق لإن:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |x^2 \cdot \cos(xy)| = |x^2| \cdot |\cos(xy)| \leq 2^2(1) = 4$$
$$= L$$

أي أن: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L = 4$

الشرط الثالث محقق بتحقق شرط الأول وثاني.

أي أن f يحقق شروط السابقة ومسألة القيمة الابتدائية لها حل وحيد.

السؤال الخامس:

-١- حسب التعريف المصفوفة A تكون مسيطرة قطرياً تماماً عندما:

$$a_{ii} > \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|$$

وبالتالي من أجل السطر الأول العلاقة محققة.

ومن أجل السطر الثاني:

$$|2| > \left|\frac{1}{2}\right| + |\alpha| \Rightarrow |\alpha| < \frac{3}{2}$$

ومن أجل السطر الثالث:

$$|2| > \left|\frac{1}{4}\right| + |\beta| \Rightarrow |\beta| < \frac{7}{4}$$

ومن أجل السطر الرابع:

$$|2| > |\delta| \Rightarrow |\delta| < 2$$

وبالتالي مجموعة القيم التي تجعل المصفوفة مسيطرة قطرياً تماماً هي:

$$S_1 = \left\{(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R} : |\alpha| < \frac{3}{2}, |\beta| < \frac{7}{4}, |\delta| < 2\right\}$$

-٢-

نوجد أقراص جيشغورين:

$$D_j(a_{ii}, d_j) = \left\{ |a_{ii} - \lambda| \leq d_j \; ; d_j = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, i = 1, \dots, n \right\}$$

$$a_{11} = 2 \Longrightarrow |2 - \lambda| \leq 1 \Longrightarrow \lambda \in D_1(2,1)$$

$$a_{22} = 2 \Longrightarrow |2-\lambda| \leq \frac{1}{2} + |\alpha| \Longrightarrow \lambda \in D_2(2\,,\frac{1}{2} + |\alpha|)$$
$$a_{33} = 2 \Longrightarrow |2-\lambda| \leq \frac{1}{4} + |\beta| \Longrightarrow \lambda \in D_3(2\,,\frac{1}{4} + |\beta|)$$
$$a_{44} = 2 \Longrightarrow |2-\lambda| \leq |\delta| \Longrightarrow \lambda \in D_4(2,|\delta|)$$

نعلم أن الحد الأعلى للقيم الذاتية للمصفوفة A تنتمي إلى $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

وحتى يتحقق العلاقة $0 \leq \lambda \leq 1$ يجب أن يكون $\lambda \in D(2,1)$ ومنه

يجب أن يكون:

$$\frac{1}{2} + |\alpha| \leq 1\,, \frac{1}{4} + |\beta| \leq 1\,, |\delta| \leq 1$$
$$\Rightarrow\ |\alpha| \leq \frac{1}{2}\,, |\beta| \leq \frac{3}{4}\,, |\delta| \leq 1$$

ومنه المجموعة المطلوبة:

$$S_2 = \left\{(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R} : |\alpha| \leq \frac{1}{2}\,, |\beta| \leq \frac{3}{4}\,, |\delta| \leq 1\right\}$$