البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة : الأولى

التاريخ : ٢٦/٩/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

إن المقرر يدرس ((نظرية الزمر)) ولكن سنبدأ بترميم المعلومات حول المجموعات وكل ما نحتاجه لدراسة الزمر .

وذلك لأن كل ما سندرسه حول المجموعات سنعتمد عليه في الرياضيات بشكل عام ومقررات البنى الجبرية بشكل خاص.

الكتاب المقرر : البنى الجبرية (١) للدكتور حمزة حاكمي ومتوفر في المكتبة .

مدخل في نظرية المجموعات

المجموعة : هي كمية (أسرة) من العناصر تشترك فيما بينها بخاصة معينة أو تجمعها صفة مشتركة حيث تمكننا هذه الصفة من الحكم على عنصر ما فيما اذا كان ينتمي الى هذه المجموعة ام لا.

نرمز للمجموعة بالأحرف الكبيرة $A, B, C, \dots$ أما عناصرها بالأحرف الصغيرة $a, b, c, \dots \dots$

تعريف المجموعة الجزئية : نقول عن A أنها مجموعة جزئية من B إذا كان كل عنصر من A هوعنصر من B ونعبر عن ذلك $A \subseteq B$.

تعريف الجداء الديكارتي : لتكن A, B مجموعات غير خالية نسمي المجموعة

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

بالجداء الديكارتي للمجموعتين A, B .

مثال : $B = \{3,4,5\}$ $\qquad$ $A = \{1,2\}$

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$$

Syria Math

تعريف العلاقة :

لتكن A, B مجموعات غير خالية نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ علاقة من A إلى B .

ونرمز لها :

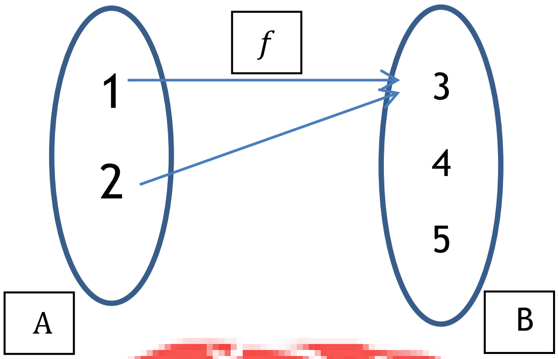
$$f: A \longrightarrow B$$

مثال : $B = \{3,4,5\}$ $\qquad$ $A = \{1,2\}$

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$$

$$f = \{(1,3),(2,3)\}$$

حيث f علاقة من A إلى B.



ملاحظة : الجداء الديكارتي غير تبديلي .

ملاحظة : في مقررنا سنعتمد دراسة العلاقات عندما يكون المجموعتين متساويتين $A = B$.

تذكرة : نقول عن المجموعتين A , B متساويتين إذا كان :

$$A \subseteq B \quad \text{و} \quad B \subseteq A$$

عندها نكتب $A = B$.

ملاحظة المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية في أي مجموعة.

تعريف العلاقات الثنائية : لتكن P مجموعة غير خالية نسمي كل مجموعة جزئية في الجداء الديكارتي $P \times P$ علاقة ثنائية على P ويرمز لها $(\mathcal{P})$.

إذا كانت $\mathcal{P}$ علاقة على المجموعة P وكان $(a,b) \epsilon \mathcal{P}$ فإننا نقول إن العنصر b يرتبط بالعنصر a وفق العلاقة $\mathcal{P}$

وتكتب : $a\mathcal{P}b$ أي أنه $\forall (a,b) \epsilon \mathcal{P}$ فإن :

$$(a,b) \epsilon \mathcal{P} \Leftrightarrow a\mathcal{P}b$$

تعاريف:

لتكن P مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}$ علاقة معرفة على P .

١) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها انعكاسية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a \epsilon P \, ; (a,a) \epsilon \mathcal{P} \Leftrightarrow a\mathcal{P}a$$

٢) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها تناظرية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b \in P\ ; (a,b)\in\mathcal{P} \Longrightarrow (b,a)\in\mathcal{P}$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b \in P\ ;\ a\mathcal{P}b \Longrightarrow b\mathcal{P}a$$

٣) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها تخالفية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b \in P : \begin{cases}(a,b)\in\mathcal{P}\\(b,a)\in\mathcal{P}\end{cases} \Longrightarrow a=b$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b \in P :\ a\mathcal{P}b\ \wedge b\mathcal{P}a \Longrightarrow a=b$$

٤) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها متعدية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b,c \in P : \begin{cases}(a,b)\in\mathcal{P}\\(b,c)\in\mathcal{P}\end{cases} \Longrightarrow (a,c)\in\mathcal{P}$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b,c \in P :\ a\mathcal{P}b\ \wedge b\mathcal{P}c \Longrightarrow a\mathcal{P}c$$

ملاحظة: العلاقة $a\mathcal{P}b$ تقرأ من اليمين إلى اليسار والعكس غير صحيح حيث b مرتبط مع a.

مثال :

$$P=\{1,2,3,4\} \qquad \mathcal{P}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,4),(4,3),(1,2),(2,1)\}$$

العلاقة $\mathcal{P}$ انعكاسية والإثبات بأن نأتي بكل عناصر P ونتأكد من الشرط

$1\in P$ ولكن $(1,1)\in\mathcal{P}$

$2\in P$ ولكن $(2,2)\in\mathcal{P}$

$3\in P$ ولكن $(3,3)\in\mathcal{P}$

$4\in P$ ولكن $(4,4)\in\mathcal{P}$

العلاقة $\mathcal{P}$ تناظرية لان الشرط محقق من اجل جمع العناصر الممكنة.
فمثلاً

$$\forall\ 1,2\in P : (1,2)\in\mathcal{P} \Rightarrow (2,1)\in\mathcal{P}$$

العلاقة $\mathcal{P}$ ليست تخالفيه لان :

$$\forall\ 1,2\in P : (1,2)\in\mathcal{P}\ \wedge\ (2,1)\in\mathcal{P}$$

ولكن $1\neq 2$

العلاقة $\mathcal{P}$ متعدية لان :

$$\forall\ 1,2,3,4 \in P : (1,1) \in \mathcal{P}, (1,2) \in \mathcal{P}$$

$$\Rightarrow\ (1,2) \in \mathcal{P}$$

و بنفس الأسلوب نتحقق من الشرط لجميع العناصر الممكنة.

والان لنأخذ العلاقة $\mathcal{P}_1$ المعرفة كما يلي :

$$\mathcal{P}_1 = \{(2,2), (3,3), (4,4), (3,4), (4,3), (1,2), (2,1)\}$$

نلاحظ أن شرط الانعكاسية قد اختل ذلك لان

$1 \in P$ ولكن $(1,1) \notin \mathcal{P}_1$

لكنها تناظرية وليست تخالفية وليست متعدية (تحقق من ذلك)

والان بأخذ العلاقة $\mathcal{P}_2$ كما يلي :

$$\mathcal{P}_2 = \{(2,2), (3,3), (4,4), (4,3), (1,2), (2,1)\}$$

تصبح العلاقة ليست تناظرية وليست انعكاسية وليست متعدية وليست تخالفية .

Syria Math

انتهت المحاضرة