البنى الجبرية 1

الدكتور : حمزة الحاكمي

المحاضرة :الثامنة

التاريخ : ١٨/١٠/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

سنبدأ بأمثلة على الزمر الجزئية

وجدنا ان شرطي تحقيق الزمرة الجزئية هو

$$\forall\, a,b \in H\ ;\ a.b \in H$$

$$\forall\, c \in H\ ;\ \ c^{-1} \in H$$

او يمكن دمج الشرطين في شرط واحد وهذا ما سنستخدمه في حل الأمثلة غالبا@

$$\forall\, a,b \in H\ ;\ a.b^{-1} \in \mathrm{H}$$

مثال : لنأخذ زمرة الأعداد الصحيحة $(Z,+)$ ولتكن $n\in Z$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة :

$n\,Z = \{m.n \qquad \forall m \in Z\}$ ((جميع المضاعفات لهذا العدد))

المجموعة $n\,Z$ تشكل زمرة جزئية في $(Z,+)$.

الحل :

١) nZ ليست خالية واضح من التعريف $nZ \subseteq Z$ كون $\emptyset \neq nZ$ $0 \in nZ$.

٢) لنبرهن أنها زمرة جزئية باستخدام الشرط الثالث من الشروط المتكافئة :

ليكن $x,y \in n\,Z$ عندئذ يوجد $m_1,m_2 \in \mathrm{Z}$ بحيث :

$y = m_2.n$ و $x = m_1.n$

$$x - y = m_1.n\ - m_2.n = \underbrace{(m_1 - m_2)}_{\text{عدد صحيح}}\,n$$

الشرط محقق ومنه $n\,Z$ زمرة جزئية في Z .

مثال : لتكن G زمرة و $a \in G$ لنأخذ المجموعة $< a >= \{a^n : n \in Z\}$

تشكل زمرة جزئية في G .

الحل :

$0 \neq < a > \subseteq G$ لأن: $a^0 = e$ ومنه $e \in\ < a >$.

لتكن $x,y \in\ < a >$ عندئذ $y\ = a^n$ و $x = a^m$ بحيث $n,m \in Z$

$$x.y^{-1}\ =\ \ \underbrace{a^m(a^n)^{-1}}_{\text{فحسب المحاضرة السابقة}}$$

$$= a^m a^{-n} = a^{m-n} \in\ < a >$$

ومنه $< a >$ تشكل زمرة جزئية ل G وتسمى الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر a ويسمى العنصر a مولد لهذه الزمرة الجزئية.

تمرين : لتكن G زمرة ولتكن المجموعة :

$$Z(G) = \{a : a \in G \,,\; x.a = a.x \;,\; \forall\, x \in G\}$$

هل المجموعة $Z(G)$ تشكل زمرة جزئية في G .

الحل :

$\emptyset \neq Z(G) \subseteq G$ لأن $e \in G$ وأن $\forall\, x \in G : e.x = x.e$

وليكن $a, b \in Z(G)$ عندئذ :

$$\forall\, x \in G : a.x = x.a \quad , b.x = x.b$$

$$\xrightarrow{\text{نضرب بمقلوب } b \text{ من اليمين}} b.x.b^{-1} = x \xrightarrow{\text{نضرب بالمقلوب من اليسار}} x.b^{-1} = b^{-1}.x$$

$$x(a.b^{-1}) = (xa)b^{-1} = (ax)b^{-1} = a(xb^{-1}) = a(b^{-1}.x\,) = (ab^{-1})x$$

$$a.b^{-1} \in Z(G)$$

وهذا يبين أن $Z(G)$ زمرة جزئية في G .

ملاحظة : لتكن G زمرة

١) الزمرة $Z(G)$ تبديلية لأن $\forall\, a, b \in Z(G) \;;\; a_1.b_1 = b_1.a_1$
لأنه ننظر إلى a_1 أنه من $Z(G)$ وأن b_1 من G .

٢) اذا كانت G تبديلية فإن $Z(G) = G$ نسمي الزمرة $Z(G)$ مركز الزمرة G .

٣) في اي زمرة G كل من G والمحايد $\{e\}$ يشكلان زمرة جزئية في G.

تمهيدية :

سندرس الان العمليات على المجموعات الجزئية ((عملية التقاطع على الزمر الجزئية))

تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية هو زمرة جزئية .

الاثبات :

لتكن $(G,.)$ زمرة و Σ أسرة من الزمر الجزئية في G لنضع $K = \cap_{D \in \Sigma} D$ إن $\emptyset \neq K \in G$ لأن $e \in D$ فإن $e \in K$

ليكن $x, y \in K$ عندئذ : $x, y \in D$ أيا كان $D \in \Sigma$ ومنه طالما $x, y^{-1} \in D$ لان D زمرة جزئية فإن

$$x, y^{-1} \in \cap_{D \in \Sigma} D = K$$

ومنه فإن K زمرة جزئية في G .

ملاحظة : إن اجتماع زمرتين جزئيتين **ليس بالضرورة** أن يكون زمرة جزئية وهذا ما سوف يوضحه المثال التالي :

مثال : في زمرة الأعداد الصحيحة $(Z, +)$ لنأخذ الزمرتين الجزئيتين $3Z, 2Z$.

لنفرض جدلا أن $3Z \cup 2Z$ هو زمرة جزئية

$$3,2 \in 3Z \cup 2Z$$

$$3 + 2 = 5 \notin 3Z \cup 2Z$$

وهذا غير ممكن لأن : $5 \notin 3Z \cup 2Z$ وبالتالي $3Z \cup 2Z$ ليست زمرة جزئية في Z .

مبرهنة : لتكن G زمرة و H مجموعة منتهية وغير خالية في G فإن الشرط الأزم والكافي كي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط : $\forall\, a, b \in H \;;\; a.b \in H$

الاثبات :

١) لزوم الشرط : لنفرض أن H زمرة جزئية عندئذ حسب المبرهنة الاخيرة فإنها تحقق الشرط الثاني أي تحقق a, b $\forall\, a, b \in H ; a.b \in H$ ويتم المطلوب .

٢) كفاية الشرط : لنفرض أن H تحقق الشرط a, b $\forall\, a, b \in H ; a.b \in H$ ولنبرهن على انه $\forall\, a \in H ;\; a^{-1} \in H$

- ليكن $a \in H$ نميز حالتين :

١) $a = e$ عندئذ $a^{-1} = e^{-1} = e = a \in H$

٢) $a \neq e$ وحسب الشرط اذا كان $a = b \Leftarrow a, a^2, a^3, \dots \dots . \in H$

وبما أن H منتهية يوجد $i, j \in N$ بحيث $i \neq j$ و أن $a^i = a^j$ وكون $i \neq j$ نفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > 0$

أي أن $i - j \geq 1$

لدينا أيضا $a^i = a^{i-j}.a^j$

$$(a^i)(a^i)^{-1} = a^{i-j}.a^i.(a^i)^{-1} \quad (*)$$

$e = a^{i-j}$ وهذا بين أن $i - j \neq 1$ لأنه بحالة $i - j = 1$ فإنه العلاقة $(*)$ تصبح $e = a$ وهذا يخالف كوننا فرضنا أن $e \neq a$ وهذا يبين أن $i - j \neq 1$ ومنه فإن $i - j > 1$ وبالتالي $i - j - 1 > 0$

ونحن لدينا $\mathrm{i - j - 1} \in \mathrm{N}$; $a.\underbrace{a^{i-j-1}}_{a \text{ مقلوب}} = e$

حيث $a^{i-j-1} \in H$ ونضرب مع عنصر ينتمي إلى H فنحصل على المحايد .

وهذا يبين أن $a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$ مما سبق نجد أن H زمرة جزئية في G.

زمرة الجمع بالمقاس n

ليكن $n \geq 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة $Z_n = \{0,1,2,3, \dots \dots \dots, (n-1)\}$

لنعرف على Z_n عملية ثنائية جمعية $\oplus$ بالشكل الاتي :

$$\forall\, \mathrm{a, b} \in Z_n \ ; a \oplus b = r$$

حيث r باقي القسمة $a + b$ على n حيث $r \in Z_n$ بحسب خوارزمية القسمة .

$$a \oplus b = \begin{cases} r = a + b & a + b < n \\ r = a + b - n & a + b \geq n \end{cases}$$

وبالتالي فإن $(Z_n, \oplus)$ زمرة تبديلية

مثال : من أجل $n = 7$ فإن $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

نطبق خوارزمية القسمة $a + b = an + r \ ; \ 0 \leq r < n$

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	1	1
3	3	4	5	6	1	2	2
4	4	5	6	1	2	3	3
5	5	6	1	2	3	4	4
6	6	0	1	2	3	4	5

نلاحظ أن كل النتائج تنتمي للمجموعة Z_6 عمودياً وافقياً .

- تحوي العنصر المحايد هو الصفر .
- زمرة تبديلية لو أخذنا القطر الرئيسي نلاحظ أنها تبديلية وأن لكل عنصر نظير حيث يظهر النظير عند وجود المحايد .
- نظير 2 نذهب إلى السطر الذي يظهر فيه المحايد الصفر ونقرأ النظير هو 4 .

زمرة منهية الضرب بالمقاس n

تعريف :

ليكن $n > 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة :

$$U(n) = \{m : m \in Z \,; 1 \leq m < n\}$$

$$\gcd(m,n) = 1$$

مثال :

من أجل $n = 5$ $\qquad U_5 = \{1,2,3,7\}$

من أجل $n = 9$ $\qquad U_6 = \{1,5\}$

لنعرف على المجموعة $U(n)$ عملية الضرب $\odot$ بالشكل الاتي :

$$\forall\, a, b \in U_n$$

$$a \odot b = r$$

حيث أننا نطبق خوارزمية القسمة $a.b = qn + r$ حيث r باقي قسمة $a.b$ على n ; $0 \leq r < n$

مثال : $n = 5$ $\qquad U_5 = \{1,2,3,4\}$

$\odot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

عملية الضرب مغلقة $(U(n)\ ,\ .)$ زمرة تبديلية والعنصر المحايد هو الواحد .

يظهر المقلوب عندما يظهر المحايد $2^{-1} = 3$.

((ليس من الضروري أن يكون مقلوب العنصر هو نفسه)) وهذا ما تبين في هذا المثال ان مثلوب ال $2^{-1} = 3$

"انتهت المحاضرة "

Syria Math