Syria Math

التحليل العددي1

الدكتورة: رشا بعاج

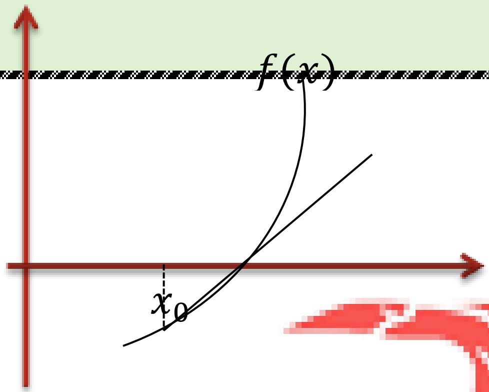
المحاضرة : السادسة

التاريخ : ٢٦/١٠/٢٠١٦

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

مرحبا اصدقائي: سنتابع معكم حل المعادلات غير الخطية. الطرق المجالية حيث تحدثنا عن طريقة تنصيف المجال وطريقة الوضع الخاطئ واليوم نتابع معكم طريقة نيوتن وطريقة القاطع والمقارنة بينهما.

طريقة نيوتن:



تعتمد هذه الطريقة على اختيار نقطة تقريبية x_0

يتم رسم المماس للدالة في هذه النقطة
ثم الوصول على نقطة تقاطع هذا المماس
مع المحور ox لتشكل جذراً تقريبياً جديداً
يتم الحصول على نقطة التقاطع من القانون:

$$x_{(n+1)} = x_n - [\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}]$$

ثم نكرر العمل للحصول على الجذر التقريبي المطلوب.

- **خوارزميّة طريقة نيوتن:**

١) تحديد شرط التوقف .
٢) تحديد النقطة الابتدائية x_0
٣) $x_{(n+1)} = x_n - [\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}]$
٤) إذا تحقق شرط التوقف عندئذ x هي الجذر التقريبي المطلوب
٥) العودة إلى الخطوة (٣)

مثال: ص٦٨,٦٩ أوجد باستخدام طريقة نيوتن جذر الدالة

$$f(x) = x^6 - x - 1 \qquad \varepsilon = (10)^{-6} \text{ ، } x_0 = 1.5$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$(x_n - x_{n-1})$
0	1.5	8.890625	44.5625	
1	1.3004909	2.5372645	21.319674	0.1995091
2	1.1814804	0.5384583	12.812868	0.1190105
3	1.1394556	0.0492352	10.52492	0.0420248
4	1.347776	0.00055	10.290288	0.004678
5	1.1344242	$0.6 * 10^{-5}$	10.287632	$0.534 * 10^{-4}$

6	1.1347241	$-0.3 * 10^{-6}$	10.287627	$0.1 * 10^{-6}$

حيث $f'(x) = 6x^5 - 1$

نعوض بالقانون: $x_{(n+1)} = x_n - \left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]$

$$x_1 = 1.5 - \left[\frac{8.890625}{44.5625}\right] = 1.300490884$$

التكرار (٦) هو الجذر التقريبي المطلوب.

وبنفس الطّريقة أوجدنا الجدول كلّه

- **مساوئ طريقة نيوتن:**

١) اختيار القيمة الابتدائيّة للجذر في جوار نقطة الانعطاف للدالة ممّا يؤدي إلى تباعد القيم التّكراريّة

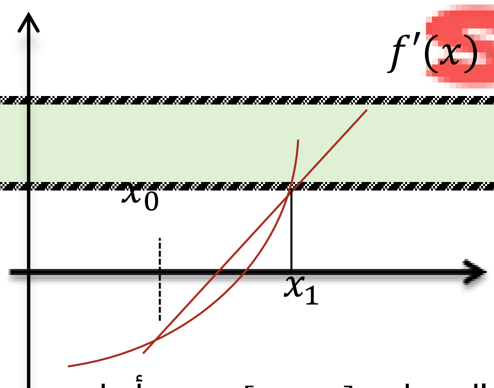
٢) بما أنّ العلاقة التّكراريّة تحوي على مشتق الدالة f لذا يجب الانتباه إلى أنّ هذا المشتق من أجل القيمة المطلوبة غير معدوم أو قريب جداً من الصفر لأن هذا يجعل القيمة الجديدة كبيرة جداً بالمقارنة مع القيم السابقة وبالتالي تتباعد سلسلة القيم

٣) بعض الدّوال تتأرجح حول الجذر وهذا مؤشر إلى فشل هذ الطريقة.

- **تقدير الخطأ لطريقة نيوتن:**

نطبّق $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

طريقة القاطع:



قد جرى الرّوتين في الطّرق المجاليّة السّابقة

التي تعرفنا عليها أن يكون للدّالة $f(x)$ محصور في مجالنا المعطى $[x_0, x_1]$ حيث أننا نقوم باختيار شرط البدء وهو $f(x_0).f(x_1) < 0$ فإذا كان محقق عندئذٍ يوجد جذر للدّالة في هذا المجال

- أمّا في هذه الطريقة طريقة القاطع يختلف الكلام.

- نفترض أنّ هناك قيمتين تقريبيتين ابتدائيتين معروفتين ولنرمز لهما x_0 وَ x_1 يمكن أن تكون هاتان القيمتان على جانبين مختلفين من جذرنا المطلوب
- تحدد النقطتان $(x_0,f(x_0))$ وَ $(x_1,f(x_1))$ خطّاً مستقيماً يدعى الخطّ القاطع ونقطة تقاطعه مع المحور ox هي x_2 فإذا كانت $|f_2|<\varepsilon$ إذاً x_2 هي الجذر المطلوب وإذا لم يتحقق سنتعرف بماذا ستقوم عن طريق الخوارزمية
- إذا كان عندنا متتالية من القيم $x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,\dots,x_n$ لحساب x_3 مثلاً نحتاج فقط لحدّين قبلها هما x_2,x_1

أي نعتمد طريقة القاطع على نقطتين، لأننا نحتاج عند البدء إلى قيمتين تقريبيّتين كي نحصل على قيمة تقريبية أفضل

ولحساب x_2

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1-x_0}{f(1)-f(0)}\right] f_1$$

حتى لا نقع في خطأ سنعتمد على هذا القانون:

$$x_n = x_{n-1} - \left[\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{f_{n-1}-f_{n-2}}\right]$$

خوارزميّة طريقة القاطع:

١) إدخال القيم الابتدائية: $\varepsilon>0$ ، $\varepsilon=$ من نص السؤال

عدد التّكرارات $n>0$

x_0,x_1 نقطتين لأننا نحتاج عند البدء إلى قيمتين تقريبيّتين

كي نحصل على قيمة تقريبية أفضل

(نلاحظ أنه لم نقم باختبار الشّرط $f(x_0).f(x_1)>0$ لأنه ليس بالضرورة أن يكون الجذر المطلوب محصور في هذا المجال $[x_0,x_1]$ وإنّما النقطتان x_0 وَ x_1 هما وسيلة لإيجاد x_2)

٢) $f_1=f(x_1)$ ، $f_0=f(x_0)$

$i=1$ يمثّل رقم التّكرار الذي وصلنا عنده

٣) طالما أنّ $i\le m$

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1-x_0}{f(1)-f(0)}\right].f_1$$

حيث $f_2=f(x_2)$

نختبر $|f_2|<\varepsilon$ عندئذٍ x_2 هي الجذر التّقريبي عندئذٍ تتوقف

الخوارزمية إذا لم يتحقق الشّرط $i = i + 1$

هنا يجب أن نغيّر المسميات كي لا نقع بأخطاء أي نحن قمنا

بحساب x_2 عن طريق x_0 وَ x_1

والآن نريد أن نحسب x_3 عن طريق الحدّان اللذان سبقاها وهما x_2 وَ x_1 ولذلك يجب علينا أن نسمي x_3 بـ x_2 والحدان

السابقان x_2 بـ x_1 وَ x_1 بـ x_0

وهكذا

$$\overset{x_0}{\curvearrowright} \quad \overset{x_1}{\curvearrowright} \quad \overset{x_2}{\curvearrowright}$$
$$x_0 \;,\; x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3$$

$$x_0 = x_1 \qquad f_0 = f_1$$

$$x_1 = x_2 \qquad f_1 = f_2$$

٤) إخراج: تفشل الطريقة في إيجاد الجذر من أجل عدد التّكرارات m

مثال: أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^6 - x - 1$ بطريقة القاطع

n	x_n	$f(x_n)$	$(x_n - x_{n-1})$
0	1	-1	
1	2	61	1
2	1.016129	-0.9153678	0.98371
3	1.0306242	-0.831921	0.014547
4	1.1756891	0.4652291	0.1450144
5	1.123679	-0.110635	0.0520101
6	1.1336711	-0.0108057	$0.99921 * 10^{-2}$
7	1.1347527	$0.2938 * 10^{-3}$	$0.10861 * 10^{-2}$
8	1.1347241	$-0.3 * 10^{-6}$	$0.286 - 10^{-4}$
9	1.1347241		

التكرار (٩) هو الجذر التقريبي المطلوب لان تكرر مع التكرار (٨)

حيث $x_1 = 2$ وَ $x_0 = 1$ في التكرارين 0 وَ 1 هما قيمتان نحن قمنا بفرضها علماً أنّ في الامتحان تكون القيم موجودة بصيغة السؤال لا داعي بأن نقوم بفرض قيم

هذا السؤال لتوضيح فكرة أي في الامتحان سيكون مطلوب عدد التّكرارات التي نريد أن نحسبها

نلاحظ أنّ طريقة القاطع تعتمد على نقطتين وقد رأينا سابقاً أنّ تنصيف المجال أيضاً طريقة تعتمد على نقطتين ولكن طريقة القاطع ستتقارب في معظم الحالات بشكل أسرع من طريقة تنصيف المجال.

تقدير الخطأ لطريقة القاطع:

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| . |x_n - x_{n-1}|$$

• المقارنة بين طريقة نيوتن وطريقة القاطع:

- تتقارب طريقة نيوتن بشكل أسرع من طريقة القاطع، إلّا أنّ نيوتن تتطلب حساب $f(x_n)$ وَ $f'(x_n)$

في حين أنّ طريقة القاطع تحتاج فقط حساب $f(x_n)$ وبالتالي فإن طريقة القاطع تحتاج وقت أقل في الحساب علماً أننا نحسب تكرارات أكثر لكن كلفة العمليّات أقل من كلفة عمليات طريقة نيوتن

- يعتمد قرار استخدام إحدى الطّريقتين على صعوبة حساب المشتق

• مقارنة بين طريقة الوضع الخاطئ وطريقة القاطع

	الوضع الخاطئ	القاطع
شرط البدء	$f_0.f_1 < 0$	لا يوجد شرط للبدء
القانون	$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right].f_1$	$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right].f_1$
شرط القيمة	$f_1.f_2 < 0$ أو $f_0.f_1 < 0$	لا يوجد شرط
تتالي القيمة	لا يوجد تتالي	متتالية قيم $x_n, \dots, x_2, x_1, x_0$
تسارع التّقارب	بطيئة	سريعة

"انتهت المحاضرة"